بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اراک

دانشکده علوم

دترمینان ماتریس هنکل با درایه‌های دوجمله‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (گرایش آنالیزعددی)

استاد راهنما: دکتر علی محمد نظری

استاد مشاور: دکتر بهنام سپهریان

تدوین: سمیه صالحی

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا دترمینان ماتریس هنکل با درایه‌هایی به صورت $a_k(x) = \sum_{m=0}^{k} \binom{2k+2-m}{k-m} x^m$ را با استفاده از یک عملگر جدید به نام γ، نوشتن معادله دیفرانسیل مرتبه دوم آن و حل آن حول نقاط $x = 2$ و $x = -2$ بدست می‌آوریم. در قسمت بعدی پایان‌نامه، تبدیل $k-$دوجمله‌ای دنباله‌ها را بدست می‌آوریم و نشان می‌دهیم دترمینان آن‌ها تحت تبدیل $k-$دوجمله‌ای پایااست.

کلمات کلیدی: دترمینان هنکل، محاسبه ضرب تقریبی، ضرایب دوجمله‌ای، معادله دیفرانسیل، تبدیل ماتریس هنکل، تبدیل $k-$دوجمله‌ای.

پیشگفتار

طرح کلی این پایان‌نامه به شرح ذیل می‌باشد

در فصل اول به تعاریف و نکاتی اشاره می‌شود که در این پایان‌نامه به آن‌ها نیاز داریم.

در فصل دوم ابتدا ماتریس هنکل انتقال داده شده را معرفی می‌کنیم. سپس یک عملگر جدید به نام γ معرفی می‌کنیم، با اعمال این عملگر بر روی ماتریس هنکل انتقال داده شده معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای ماتریس هنکل با درایه‌هایی به صورت $a_k(x) = \sum_{m=0}^{k} \binom{2k+2-m}{k-m} x^m$ بدست می آوریم. با حل این معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، دترمینان ماتریس هنکل مورد نظر را حول نقاط $x = 2$ و $x = -2$ بدست می‌آوریم. در پایان فصل دوم جدولهای عملگر γ بر روی ماتریس هنکل انتقال داده شده ارائه شده است.

در فصل سوم ابتدا تبدیل‌های $k-$دوجمله‌ای را معرفی می‌کنیم. سپس توابع مولد تبدیل‌های $k-$دوجمله‌ای را بدست می‌آوریم. و در نهایت ثابت می‌کنیم تبدیل‌های $k-$دوجمله‌ای تحت تبدیل هنکل پایا هستند.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف، قضایا و مقدمه

در ابتدا، چند مفهوم و تعریف را که در این رساله به آن نیازمندیم، بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. ماتریس $A = [a_{i,j}] \in M_{n+1}(\mathbb{C})$، یک ماتریس هنکل[1] نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم، $0 \leq i, j \leq n$ و $a_{i,j} = a_{i+j}$، به عبارت دیگر عناصر روی قطرهای فرعی با هم برابرند. در این پایان‌نامه i، اندیس سطرها و j، اندیس ستون‌ها را نشان می‌دهد.

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-1} & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

مثال ۱.۱.۱. ماتریس زیر یک ماتریس هنکل است.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

تعریف ۲.۱.۱. دترمینان ماتریس هنکل $(n+1) \times (n+1)$، را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$H_n = \det[a_{i+j}]_{0 \leq i,j \leq n}.$$

n، مرتبه ماتریس هنکل را نشان می‌دهد.

تعریف ۳.۱.۱ چندجمله‌ای $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$، به‌طوری‌که $a_n = 1$ و

---

[1] Hankel

$a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ اعداد ثابت هستند، را چندجمله‌ای تکین[2] می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. خاصیت چند خطی بودن دترمینان را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$det \begin{pmatrix} a+d & b+c \\ e & f \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} d & c \\ e & f \end{pmatrix}.$$

تعریف ۵.۱.۱. اگر $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد، $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ راتابع مولد معمولی و $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ را تابع نمایی دنباله فوق می‌نامیم.

تعریف ۶.۱.۱. در معادله دیفرانسیل $F(x, y, y', \ldots, y^n) = 0$، هرگاه $n = 1$ باشد به آن معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌گوییم و هرگاه $n = 2$ باشد به آن معادله دیفرانسیل مرتبه دوم می‌گوییم.

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به‌صورت

$$y'' + ay' + by = 0,$$

در نظر بگیرید که در آن a و b اعداد ثابت هستند. برای حل این معادله می‌توانیم معادله مشخصه را به‌صورت $r^2 + ar + b = 0$ بنویسیم و حل کنیم.

اگر معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به‌صورت

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0,$$

باشد می‌توانیم برای آن حول نقطه $x = x_0$، جوابی به‌صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ در نظر بگیریم.

تعریف ۷.۱.۱. جهت ساده سازی در معرفی دنباله‌ها از کدهای سلوان[3] که توسط همین شخص ارائه شده است استفاده می‌شود و جدیداً بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. منتها مشکلش این است که کاربران آماتور ممکن است این کدها را در خاطر نداشته باشند. کدهای سلوان را در $OEIS$[4] نمایش می‌دهند که یک پایگاه داده قابل جستجوی بزرگ از دنباله‌های اعداد صحیح می‌باشد که به رایگان روی وب قرار دارد. $OEIS$، اطلاعات دنباله اعداد صحیح را ثبت می‌کند. در $OEIS$ دنباله اعداد گویا به‌وسیله دو دنباله، دنباله اعداد صورت و دنباله اعداد مخرج نشان داده می‌شوند. به عنوان مثال دنباله

---

[2] Monic polynomial

[3] Soloan

[4] On-lineencyplodia

$$\left\{\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{2}{5}\frac{1}{3},\dots\right\},$$

به‌وسیله دنباله صورت $\{1,1,1,2,\dots\}$ و دنباله مخرج $\{5,4,3,5,3,\dots\}$ نشان داده می‌شود. در $OEIS$، هر دنباله به‌وسیله یک حرف A و شش شماره ایجاد می‌شود، حرف A، اول کلمه $Absoult$ است. از برنامه‌های $Maple$ و $Mathematica$ برای نوشتن دنباله‌ها به شکل مورد نظر در $OEIS$ استفاده می‌شود. به عنوان مثال دنباله اعداد فاکتوریل را در $OEIS$ به‌صورت $A000142$ نشان می‌دهند. در جدول زیر دنباله اعداد و شکل $OEIS$ آن‌ها که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد بیان می‌کنیم.

$OEIS$	$Formula$	$Sequence$
$A000034$	$Asimple\ periodic\ sequence$	$1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\dots$
$A007680$	$(2n+1)n!$	$1,\ 3,\ 10,\ 42,\dots$
$A000165$	$2^n n!$	$1,\ 2,\ 8,\ 48,\dots$
$A019074$	$Cycle\ class\ sequence$	$0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 22,\dots$
$A002315$	$a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}$	$1,\ 7,\ 41,\ 239,\dots$
$A007070$	$a_n=4a_{n-1}-2a_{n-2}$	$1,\ 4,\ 14,\ 48,\ 164,\dots$
$A003645$	$2^n c_{n+1}\ c_n, catalan\ number$	$1,\ 4,\ 20,\ 120,\dots$
$A059304$	$2^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}$	$1,\ 4,\ 24,\ 160,\dots$
$A000165$	$2^n n!$	$1,\ 2,\ 8,\ 48,\dots$
$A010845$	$3na_{n-1}+1\ ,a_0=1$	$1,\ 4,\ 25,\dots$
$A001907$	$e^{\frac{-x}{(1-4x)}}$	$1,\ 3,\ 25,\ 299,\dots$
$A000354$	$e^{\frac{-x}{(1-2x)}}$	$1,\ 1,\ 5,\ 29,\dots$

تعریف ۸.۱.۱. دنباله اعداد درانگمنت[5] به‌صورت یک جایگشت از عضوهای یک مجموعه است به‌طوری‌که هیچ یک از عضوها در موقعیت قبلی خود ظاهر نمی‌شوند. دنباله اعداد درانگمنت به صورت

$$n!-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}!(n-i),$$

به‌دست می‌آیند.

تعریف ۹.۱.۱. دنباله اعداد متزکین[6] برای عدد n، تعداد روش‌های متفاوت رسم وتر غیر

[5] Derangement

[6] Motzkin

متقاطع در دایره بین n نقطه را نشان می‌دهد.

$$\{1,2,4,9,21,51,127,333,\dots\}.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. دنباله اعداد فاکتوریل[7] به‌صورت $0!,1!,2!,\dots$ می‌باشند.

تعریف ۱۱.۱.۱. دنباله اعداد ضرایب مرکزی[8] به‌وسیله $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ تعیین می‌شوند.

$$\{1,2,6,20,70,\dots\}$$

تعریف ۱۲.۱.۱. عدد صحیح نامنفی n و اندیس‌های نامنفی i، j و k، به‌طوری‌که $i+j+k=n$ را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت ضرایب تبدیل سه‌جمله‌ای[9] به صورت زیر بدست می آیند.

$$\binom{n}{ijk}=\frac{n!}{i!j!k!}.$$

تعریف ۱۳.۱.۱. دنباله اعداد کاتالان[10] از $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ بدست می آید.

۱.۱ تاریخچه

درایه های ماتریس هنکل دارای شکل خاصی هستند. اغلب درایه های آن را به صورت یک دنباله مانند دنباله اعداد کاتالان، یک دو جمله‌ای یا حالتهای مختلف دیگر در نظر می گیرند. کارهای بسیاری برای به دست آوردن دترمینان ماتریس هنکل انجام شده وتکنیک‌های مختلفی ارائه شده است. روش‌های رایج، روش تراکم دادکسون[11]، بسط کسر وتجزیه LU می باشند. همه روش‌ها در صورتی که قابل اعمال باشند دارای شکل ضربی هستند. نوشته های فراوانی برای این موضوع وجود دارد. برای اطلاع بیشتر درباره این موضوع می توان به رساله موير[12]

[7] Factorial numbers

[8] Centralcoefficient

[9] Trinomial coefficient

[10] Catalan

[11] Dodgson

[12] muir

ومجموعه جدیدتر، شامل حالت‌های مختلف قضیه دترمینان‌ها و شامل دامنه وسیعی از روش‌های مورد استفاده برای محاسبه دترمینان‌ها همراه با مراجع بسیاری برای آن‌هاکه نوشته کراتتندالر[13] است، رجوع کرد. موردهای کلاسیک دترمینان ماتریس‌های هنکل با درایه‌هایی به صورت دو جمله‌ایی $\binom{k}{k}$ و $\binom{3k+2}{k}$ به‌طوری‌که $k = i + j$ و $0 \leq i, j \leq n$ هر دو دارای شکل ضربی یعنی به صورت ضرب عامل‌های ساده هستند که در فصل بعدی چند نمونه از آن را ذکر می‌کنیم. در این پایان‌نامه حالت دیگر از دو جمله‌ای را که دترمینان آن‌را عمر اوقسی اوقلو[14] بدست آورده‌اند، مورد بررسی قرار می دهیم.

دترمینان ماتریس هنکل با نام تبدیل هنکل در سال 2001 به‌وسیله لایمون[15][7] معرفی شد. ارنبورگ[16]، پرت[17] و وان و پرت[18] در مقاله‌های خود درباره دترمینان ماتریس هنکلی که درایه‌های آن به‌صورت دنباله باشد، بحث کرده‌اند. لایمون در [7] ثابت می‌کند دترمینان ماتریس هنکل تحت تبدیل دوجمله‌ای پایاست. یعنی اگر دنباله $B(A)$ تحت تبدیل دوجمله‌ای از دنباله A حاصل شده باشد، دترمینان ماتریس هنکل حاصل از هر دو دنباله با هم برابر است.

---

[13] krattenthaler

[14] Omer Egecioglu

[15] Laymon

[16] Ehrenborg

[17] Peart

[18] Woan and Peart

فصل ۲

دترمینان هنکل

۱.۲ مقدمه

بسط دترمینان

$$\det[a_k],$$

به‌طوری‌که

$$a_k = a_k^{(\beta,\alpha)} = \binom{\beta k + \alpha}{k}, \tag{1.2}$$

و α وβ اعداد صحیح نامنفی هستند با استفاده از قاعده اصلی محاسبه دترمینان کار بسیار مشکلی است. با استفاده از خاصیت چند خطی بودن دترمینان‌ها می توان بسط‌های مختصر و واضح‌تری را برای کلاس معین داده شده از دترمینان‌ها بدست آورد. این دترمینان‌ها ممکن است دارای شکل ضربی باشند. (مانند دترمینان واندرموند[1] و کوشی [2]) یک بررسی وسیع از دترمینان ماتریس‌های هنکل که درایه‌های آن به صورت a_k در (1.2) هستند نشان می‌دهد در حالت کلی دترمینان این ماتریس‌ها دارای شکل ضربی نیستند و در واقع دترمینان کلاس محدودی از این نوع ماتریس‌ها دارای شکل ضربی می‌باشند. در حقیقت در نمونه‌هایی که H_n شکل ضربی دارد، α وβ می تواند شامل موارد زیر باشد.

[1] Vandermonde

[2] Cauchy

(1) $\beta = 1$ و α دلخواه

(2) $\beta = 2$ و $\alpha = 0,1,2,3,4$

(3) $\beta = 3$ و $\alpha = 0,2$

شاید موارد دیگری باشد که دترمینان آن‌ها دارای شکل ضربی باشد اما این سؤال باز باقی می ماند که آیا محاسبات ممکن در این موارد وجود دارد؟

در اینجا دترمینان با نمایش ضربی در موردهای (α,β) هایی را که قبلاً حل شده است را ذکر می کنیم.

$$det\left[\binom{3(i+j)+2}{(i+j)}\right]_{0\leq i,j\leq n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{(6i+4)!(2i+1)!}{2(4i+2)!(4i+3)!},$$

و

$$det\left[\binom{3(i+j)}{(i+j)}\right]_{0\leq i,j\leq n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{3(3i+1)!(6i)!(2i)!}{(4i)!(4i+1)!}.$$

رجوع کنید به [2] در بین این دو مورد برای حالتی که a_k به صورت زیر است.

$$\binom{3(i+j)+1}{(i+j)}.$$

روش استاندارد جوابگو نیست چون نتیجه محاسبات به صورت ضرب در نمی‌آید. در مقاله[2] عمر اوقسی اوقلو ثابت می‌کند دترمینان ماتریس هنکلی که درایه‌های آن به شکل (1.2) می‌باشند، به‌صورت ضرب تقریبی است، یعنی جمع $n+1$ ضرب از عامل‌های ساده می‌باشند.

$$det\left[\binom{3(i+j)+1}{(i+j)}\right]_{0\leq i,j\leq n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{(6i+4)!(2i+1)!}{2(4i+2)!(4i+3)!} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!(4n+3)!(3n+i+2)!}{(3n+2)!i!(n-i)!(4n+2i+3)!}.$$

روش ارائه شده در [2] برای به‌دست آوردن شکل صریحی از ضرب تقریبی برای دترمینان ماتریس هنکل که درایه های آن به صورت (1.2) است دارای مراحل زیر می باشد:

(1) استفاده از $k = i + j$ وجایگذاری a_k با چند جمله‌ای

$$a_k(x) = \sum_{m=0}^{k} \binom{3k+1-m}{k-m} x^m,$$

به‌طوری‌که $a_k(x)$ یک چند جمله‌ای تکین از درجه k با $a_k = a(0)$ است. متعاقباً $H_n(x)$، دترمینان این ماتریس، یک چند جمله‌ای است و $H_n = H_n(0)$.

(2) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با $H_n(x)$ به‌دست می‌آوریم.

(3) معادله مرتبه دوم را حل کرده و جواب را در $x = 0$ به دست می آوریم.

دراین رساله، مسئله، محاسبه‌دترمینان ماتریس هنکلی است که درایه های آن به صورت

$$a_k^{(\beta,\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^{k} \binom{\beta k+\alpha-m}{k-m} x^m, \tag{2.2}$$

برای $\alpha = 2$ و $\beta = 2$ است.

دترمینان ماتریس هنکل را به صورت

$$H_n(x) = \det[a_{i+j}]_{0\le i,j\ge n}, \tag{3.2}$$

نشان می‌دهیم. تعدادی از این چند جمله‌ای‌ها و دترمینان ماتریس‌های هنکل در زیر آمده است.

$$\begin{aligned}
a_0(x) &= 1,\\
a_1(x) &= 4 + x,\\
a_2(x) &= 15 + 5x + x^2,\\
a_3(x) &= 56 + 21x + 6x^2 + x^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1,\\
H_1(x) &= -1 - 3x,\\
H_2(x) &= -1 - x + 5x^2,\\
H_3(x) &= 1 + 6x + 3x^2 - 7x^3.
\end{aligned}$$

قسمت اصلی محاسبه دترمینان، در مرحله (2) است و بدست آوردن معادله دیفرانسیل مرتبه دوم در مرحله (2) خود بر سه اصل متکی است. بدست آوردن معادله مرتبه دوم، در مقاله های قبلی عمراوقسی اوقلو با مشکلات فراوانی همراه بود. عمراوقسی اوقلو در مقاله اخیر خود از یک عملگر جدید به نام γ که بعداً به معرفی آن می پردازیم استفاده می کند که محاسبات برای

بدست آوردن معادله مرتبه دوم را بسیار ساده می کند. عملگر γ بسیاری از جملات غیر خطی را که در طی محاسبه معادله مرتبه دوم در مقالات قبلی عمراوقسی اوقلو به‌وجود می آمد حذف می کند.

در این فصل ابتدا دترمینان ماتریس هنکل انتقال داده شده را معرفی می‌کنیم. سپس به معرفی عملگر γ می‌پردازیم و مثال هایی برای عملگر γ ارائه می‌دهیم. سه اصل را بیان می‌کنیم با استفاده از این سه اصل پنج معادله بدست می آوریم. معادله‌ها را بر حسب H_0 و H_1 که آن‌ها را در قسمت ماتریس هنکل انتقال داده شده نشان خواهیم داد بیان می‌کنیم. سپس از H_0 و H_1 مشتق می‌گیریم و معادله دیفرانسیل مرتبه اول را بدست می آوریم. بلافاصله با استفاده از معادله دیفرانسیل مرتبه اول، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را می‌نویسیم. با حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم دترمینان ماتریس هنکل مورد نظر را بدست می آوریم.

۲.۲ نمایش دترمینان ماتریس هنکل انتقال داده شده

ماتریس هنکل $A=[a_{i+j}]$، با نماد $a_k=a_{i+j}$ را در نظر می گیریم و از نماد H_n برای دترمینان ماتریس A از بعد n استفاده می کنیم. n را از این به بعد ثابت فرض می‌کنیم. افراز λ به‌صورت دنباله‌ای از جمعوندهای نزولی $\lambda=(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_p\geq 0)$ از عدد صحیح m به‌طوری‌که $m=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_p$ باشد، در نظر می گیریم. هر λ_i یک قسمت از λ است به عنوان مثال $\lambda=(3,2,2)$ یک افراز از $m=7$ با $p=3$ است. از نماد $\lambda=m^{\alpha_m}\ldots 2^{\alpha_2}1^{\alpha_1}$ برای افراز λ از m استفاده می کنیم که نشان می دهد λ، به تعداد α_i جمعوند از اندازه i دارد. به‌عنوان مثال $\lambda=3^2 21^3$ یک افراز $3+3+2+1+1+1$ از 11 را نشان می دهد. برای $n\geq 0$ هر افراز $\lambda=(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_p\geq 0)$ که $p\leq n+1$، دترمینان ماتریس هنکل انتقال داده شده از ماتریس هنکل $(n+1)\times(n+1)$، $A=[a_{i+j}]$ که با H_λ نمایش داده می‌شود متناظر با این افراز را به شرح زیر تعریف می‌کنیم.

فرض کنیم $\mu_i=\lambda_i$ برای $i=1,2,\ldots p$ و $\mu_i=0$ برای $i=p+1\ldots n+1$ آن‌گاه داریم

$$H_\lambda=det[a_{i+j+\mu_{n+1-j}}]_{0\leq i,j\leq n}. \tag{4.2}$$

حال نمونه هایی از دترمینان ماتریس هنکل را وقتی $n = 3$ است، بیان می کنیم.

فرض کنیم عدد $m = 5$ به‌صورت $5 = 3 + 1 + 1$ افراز شده باشد. یعنی به‌صورت ماتریس هنکل $H_{31^2} = det[a_{i+j+\mu_{4-j}}]_{0\leq i,j\leq 3}$ باشد. ماتریس

$$H_{31^2} = \begin{pmatrix} a_{0+0+\mu_4} & a_{0+1+\mu_3} & a_{0+2+\mu_2} & a_{0+3+\mu_1} \\ a_{1+0+\mu_4} & a_{1+2+\mu_3} & a_{1+2+\mu_2} & a_{1+3+\mu_1} \\ a_{2+0+\mu_4} & a_{2+1+\mu_3} & a_{2+2+\mu_2} & a_{2+3+\mu_1} \\ a_{3+0+\mu_4} & a_{3+1+\mu_3} & a_{3+2+\mu_2} & a_{3+3+\mu_1} \end{pmatrix}$$

با افراز $3 + 1 + 1$ را در نظر می گیریم که در این صورت داریم

$$\mu_1 = \lambda_1 = 3,\ \mu_2 = \lambda_2 = 1,\ \mu_3 = \lambda_3 = 1,\ \mu_4 = \lambda_4 = 0.$$

همچنین

$$i = 0 \qquad j = 0 \qquad a_{0+0+\mu_{4-0}} = a_{0+\mu_4} = a_{0+0} = a_0,$$

$$i = 0 \qquad j = 1 \qquad a_{0+1+\mu_{4-1}} = a_{1+\mu_3} = a_{1+1} = a_2,$$

$$i = 0 \qquad j = 2 \qquad a_{0+2+\mu_{4-2}} = a_{2+\mu_2} = a_{2+1} = a_3,$$

$$i = 0 \qquad j = 3 \qquad a_{0+3+\mu_{4-3}} = a_{3+\mu_1} = a_{3+3} = a_6,$$

و همین طور برای بقیه سطر و ستون‌ها عمل می کنیم.

$$H_{31^2} = \det\begin{pmatrix} a_0 & a_2 & a_3 & a_6 \\ a_1 & a_3 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_4 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_5 & a_6 & a_9 \end{pmatrix}.$$

در H_0 همه μ_iها برابر صفر می‌باشند که همان دترمینان ماتریس هنکل معرفی شده در مقدمه است.

$$H_0 = \det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}.$$

در H_2، $\mu_1 = 2$ وبقیه μ_iها برابر صفر است. یعنی

$$H_2 = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_7 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_8 \end{pmatrix}.$$

در این جا لازم است ذکر کنیم وقتی $a_k = a_k(x)$ تابعی از x است. آن‌گاه $H_\lambda = H_\lambda(x)$ هم یک تابعی از x است، وقتی ما می خواهیم وابستگی دترمینان ماتریس هنکل انتقال داده شده $(n+1) \times (n+1)$ رابه n و x نشان دهیم می نویسیم $H_\lambda(n, x)$. به‌عنوان مثال $H_0(x)$ را که در قضیه (2.10.2) نمایش داده می‌شود، می توان به صورت زیر نوشت.

$$H_0(x) = H_0(n, x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{2n^2 + 4n + 2k^2 + 1}{2k+1} \binom{n+k}{2k} (x-2)^k, \qquad (5.2)$$

فرمول بالا را بعداً اثبات می کنیم.

دترمینان ماتریس هنکل $(n+1) \times (n+1)$ ممکن است به‌وسیله تعداد متنوعی از نمادها در این رساله نمایش داده شود در بین آنها $H_n = H_n(x) = H_0(n, x) = H_0(x)$ است. باید دقت شود که زیرنویس 0 افراز را شامل می شود و ربطی به مرتبه ماتریس هنکل که رابطه با n دارد، نخواهد داشت. همان‌طور که قبلاً ذکر شد هدف در قسمت عمده‌ای از این کار به‌دست آوردن یک دستگاه از معادلات خطی مرتبه اول است که در زیر مشخص شده است.

$$\begin{aligned} Q\tfrac{d}{dx}H_0 &= Q_0H_0 + Q_1H_1, \\ U\tfrac{d}{dx}H_1 &= U_0H_0 + U_1H_1. \end{aligned} \qquad (6.2)$$

ضرایب Q،U، Q_0، Q_1، U_0 و U_1 در دستگاه بالا توابع چند جمله‌ای بر حسب n و x هستند. از این دستگاه، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای H_0 و H_1 داده شده در قضیه (1.8.2) فوراً به‌دست می آید.

در فرآیند دیفرانسیل گیری از H_0 و H_1 با پنج دترمینان زیر مواجه می شویم.

$$H_1^2, \quad H_2, \quad H_1^3, \quad H_21, \quad H_3,$$

که در اینجا دو حالت $m = 2$ و $m = 3$ مطرح است که بالطبع افرازهای آنها مورد بررسی قرار گرفته است و هر یک از این پنج دترمینان را در عبارت‌هایی بر حسب دترمینان H_0 وH_1 به صورت جداگانه بیان می کنیم.

۳.۲ عملگر γ

عملگر چند خطی γ را روی ماتریس‌های mتایی که$1 \leq m$ و $m \leq n+1$، به‌صورت زیر تعریف می کنیم .

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنیم A ماتریسی از بعد $(n+1) \times (n+1)$ باشد و ماتریس های متغیر $X_1, X_2, \ldots, X_m$، همان بعد A را داشته باشند. در این‌صورت تعریف می کنیم

$\gamma_A([a_{i+j}]) = det(A),$

$\gamma_A(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \partial_{t_1}\partial_{t_2}\ldots\partial_{t_m} det(A + t_1X_1 + \ldots + t_mX_m)|_{t_1=\ldots t_m=0}.$

در بالا از دترمینان ماتریس به‌دست آمده از جمع درایه‌های نظیر به نظیر A و ماتریس‌های $t_1X_1, t_2X_2, \ldots, t_mX_m$ نسبت به $t_1, t_2, \ldots, t_m$ مشتق می‌گیریم، بعد با قرار دادن $t_1 = \ldots = t_m = 0$ حاصل $\gamma_A(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ را به‌دست می آوریم.

تعریف ۲.۳.۲. فرض کنیم A و $X_1, \ldots, X_m$ ماتریس‌های $(n+1) \times (n+1)$ باشند، برای یک زیر مجموعه از اندیس‌های $S = \{j_1, \ldots, j_m\} \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ و جایگشت σ از $\{1, 2, \ldots, m\}$ ، ماتریس $A_{s,\sigma}$ ماتریسی است که از A با جایگذاری ستون j_k ام A با ستون j_k ام ماتریس X_k برای $k = \{1, 2, \ldots, m\}$ بدست می آید.

گزار ۱.۳.۲. برای $m \leq n+1$،

$$\gamma_A(X_1, \ldots, X_m) = \sum_{s,\sigma} det(A_{s,\sigma}). \tag{7.2}$$

این مجموع روی همه زیر مجموعه های S از $\{1, \ldots, m\}$ با$| S |= m$ تعریف شده است، نماد $| S |= m$، تعداد متغیرهای X_i را در $\gamma_A()$ نشان می دهد و جایگشت σ از $\{1, 2, \ldots, m\}$ می باشد.

نکته: در بالا می توان همین اعمال را برای سطرها انجام داد و گزاره برای سطرها نیز برقرار است . انگیزه‌ی استفاده از عملگر γ این است که آن‌ها به خوبی دیفرانسیل پذیرند و مشتق یک γ به صورت مجموعی از γ هاست.

گزاره ۲.۳.۲. برای $m \leq n$

$$\frac{d}{d_x}\gamma_A(X_1,\ldots,X_m) = \gamma_A(\tfrac{d}{d_x}A, X_1,\ldots X_m) \\ +\sum_{j=1}^{m}\gamma_A(X_1,\ldots,X_{j-1},\tfrac{d}{d_x}X_j, X_j+1,\ldots,X_m).$$

اثبات این دو گزاره در قسمت آخر این فصل آمده است.

با استفاده از گزاره (1.3.2) می توانیم γ_A را روی ماتریس‌های هنکل انتقال داده شده با افراز λ که آن‌را با H_λ نشان می‌دهیم بدست آوریم.

۴.۲ محاسبات صریح γ_A

فرض کنیم $A = [a_{i+j}]$ ماتریس مفروض باشد با یک مثال محاسباتی ساده شروع می کنیم.

مثال ۱.۴.۲. در محاسبه $\gamma_A([a_{i+j}])$، $S = \{j\} \subseteq \{0,1,\ldots,n\}$، فقط یک متغیر $X_1 = [a_{i+j}]$ را داریم و جایگشت همانی است. ماتریس A و X_1 از بعد $n = 3$ را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$A_= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}, \qquad X_1 = [a_{i+j}] = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}.$$

اگر ستون اول ماتریس A را با ستون اول X_1 جابجا کنیم همان ماتریس A حاصل می شود که دترمینان آن برابر با H_0 است. چون $n+1$ ستون داریم اگر این جایگذاری را برای هر یک از ستون‌های A در نظر بگیریم دترمینان در هر جایگذاری H_0 می شود با توجه به رابطه (7.2) داریم

$$\gamma_A(X_1) = \sum_{s=\{j=0,1,\ldots,n\},\sigma} \det A_{S,\sigma} = H_0 + H_0 + \ldots H_0 = (n+1)H_0.$$

مثال ۲.۴.۲ در محاسبه $\gamma_A([a_{i+j+2}])$ دوباره $S = \{j\} \subseteq \{0,1,\ldots,n\}$ با یک عضو می باشد. برای $j \leq n-2$ دترمینان $A_{s,\sigma}$ به علت برابر بودن ستون j ام و ستون $(j+1)$ ام