بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی

گرایش جبر همولوژی

مدول های تصویری گرنشتاین (n, m)- قوی

استاد راهنما: دکتر فیروزه جهانشاهی

استاد مشاور:

تألیف و تدوین:

بتول سجادی راویز

آذر ۱۳۹۰

دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد رشته‌ی ریاضی محض

« مدول‌های تصویری گرنشتاین (n,m)- قوی »

خانم بتول سجادی راویز

در تاریخ ۹۰/۹/۲۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ...عالی...... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه خانم دکتر فیروزه جهانشاهی با مرتبه ی علمی استادیار — امضاء

۲- استاد داور داخل گروه آقای دکتر مرتضی جعفرپور با مرتبه ی علمی استادیار — امضاء

۳- استاد داور خارج از گروه آقای دکتر اسفندیار اسلامی با مرتبه ی علمی استاد — امضاء

۴- نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی آقای دکتر روح ا... صابری با مرتبه ی علمی استادیار — امضاء

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی ازتحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان است.

تقدیم به:

مادر عزیز و فداکارم

که وجودش برایم همه عشق است و وجودم برایش همه رنج.

تقدیم به:

همسر و پسر مهربانم

که گرمی کلامشان سرمایه‌ی جاودان زندگی‌ام است.

قدردانی و تشکر

خدای یگانه‌ام را سپاس که از زحمت بیکرانش بی‌دریغ به من ارزانی داشت.

ستایش او را که در این راه بزرگ من را یاری نمود تا توانستم گامی کوچک، اما مشتاق در راهی بردارم که او برایم گشوده بود.

بدینوسیله مراتب قدر دانی و تشکر عمیق خود را از سرکار خانم دکتر فیروزه جهانشاهی به خاطر راهنمایی های ارزنده و مساعدت های گرانبهای ایشان در تهیه و تدوین این پایان نامه ابراز می دارم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر اسلامی و جناب آقای دکتر جعفرپور که زحمت داوری این پایان نامه را تقبل نمودند صمیمانه سپاس گزاری می نمایم.

از کلیه اساتیدی که در مراحل مختلف تحصیل از محضر ایشان کسب علم نموده ام و همچنین از دوستان عزیزم که از هر گونه کمک به بنده دریغ نکرده اند تقدیر و تشکر را دارم.

از خانواده‌ام که در این مدت حامی‌ام بوده‌اند سپاس‌گذارم.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا زیررده‌ای از رده مدول‌های تصویری گرنشتاین را معرفی می‌کنیم. این زیر رده برای اعداد صحیح $n \geqslant ۱$ و $m \geqslant ۰$، تصویری گرنشتاین (n,m)- قوی (به طور خلاصه SG- (n,m)- تصویری) نامیده می‌شوند. بعد از تعریف این مدول‌ها، ما روابط بین آن‌ها و همچنین خواص ابتدایی آن‌ها را بررسی می‌کنیم. در ادامه سی‌زی‌جی‌های این نوع مدول‌ها را مورد توجه قرار خواهیم داد. مهمترین مطلبی که در این قسمت در مورد آن بحث می‌شود این است که، اگر M یک مدول تصویری گرنشتاین (n,m)- قوی باشد، به طوری که برای یک عدد صحیح مثبت k، $Gpd_R(M) = k \leq m$، آنگاه برای هر $۱ \leq i \leq k$، i- امین سی‌زی‌جی از M یک مدول تصویری گرنشتاین $(n,m-i)$- قوی است و برای هر $i \geq k$، i- امین سی‌زی‌جی از M یک مدول تصویری گرنشتاین $(n,۰)$- قوی است. سپس به بررسی عکس این قضیه در حالت $n = ۱$ می‌پردازیم، در واقع ثابت می‌کنیم که برای دو عدد صحیح $d \geq ۱$ و $m \geq ۰$، اگر d- امین سی‌زی‌جی از M یک مدول تصویری گرنشتاین $(۱,m)$- قوی باشد، آنگاه برای یک عدد صحیح k، $Gpd(M) = k \leq d+m$. همچنین M یک مدول تصویری گرنشتاین $(۱,k)$- قوی است. به عنوان نتایجی از این مباحث ابتدا ثابت می‌کنیم مدول M، از بعد تصویری گرنشتاین حداکثر m است اگر و تنها اگر $M \oplus G$، برای یک مدول تصویری مانند G، یک مدول تصویری گرنشتاین $(۱,m)$- قوی باشد و سپس بررسی خواهیم کرد که روی حلقه‌های از بعد یکدست چپ متناهی، یک مدول از بعد تصویری گرنشتاین متناهی، بعد تصویری متناهی دارد اگر و تنها اگر از بعد یکدست متناهی باشد.

واژگان کلیدی: مدول‌های تصویری گرنشتاین، بعد تصویری گرنشتاین، مدول‌های تصویری گرنشتاین n- قوی، مدول‌های تصویری گرنشتاین (n,m)- قوی.

فهرست مندرجات

۱ تعاریف و پیش‌نیازها ۱

۱.۱ مفاهیم اولیه ۱

۲.۱ هومولوژی ۷

۳.۱ مدول‌های حل‌پذیر ۲۲

۴.۱ مدول‌های عقب‌کشنده و جلوبرنده ۴۲

۲ مدول‌های تصویری گرنشتاین (قوی و n- قوی) ۴۵

۱.۲ مدول‌های تصویری گرنشتاین ۴۶

۲.۲ مدول‌های تصویری گرنشتاین قوی ۵۴

۳.۲ مدول‌های تصویری گرنشتاینn - قوی ۵۶

۴.۲ خواص مدول‌های تصویری گرنشتاین n- قوی ۵۹

۳ مدول‌های تصویری گرنشتاین (n,m)- قوی ۶۳

۱.۳ مفاهیم اولیه ۶۴

۲.۳ سی‌زی‌جی‌های مدول‌های تصویری گرنشتاین (n,m)- قوی ۷۱

A واژه‌نامه ۱۱۳

A.۱ انگلیسی به فارسی ۱۱۳

A.۲ فارسی به انگلیسی ۱۱۴

کتاب نامه ۱۱۷

پیش‌گفتار

بعدهای تصویری، انژکتیو و یکدست مدول‌ها، نقش مهم و اساسی در جبر هومولوژی پایه ایفا می‌کنند. در سال ۶۹-۱۹۶۶، اسلاندر[۱] و بریدگر[۲] در [۴] و [۵] یک زیر رده مهم از مدول‌های متناهی مولد روی حلقه‌های نوتری را معرفی کردند و آن را G- رده نامیدند. سپس ثابت کردند که مدول‌های از G- رده خواص یکسانی با مدول‌های از بعد تصویری متناهی دارند. آن‌ها بعدها موافقت کردند که مدول‌های در G- رده را، G- تصویری بنامند. چندین دهه بعد، در اواسط قرن بیستم، ایناکس[۳] و جندا[۴] در [۱۲] ایده‌های اسلاندر و بریدگر را تعمیم داده و مدول‌های G- تصویری نامتناهی را روی حلقه‌های دلخواه تعریف کردند و آن‌ها را مدول‌های تصویری گرنشتاین نامیدند و دوگان تعریفشان را مدول‌های انژکتیو گرنشتاین معرفی کردند. آن‌ها سه بعد هومولوژیکی جدید را بر اساس تحلیل‌هایی از مدول‌های یکدست، انژکتیو و تصویری گرنشتاین معرفی کردند و به ترتیب آن‌ها را بعدهای یکدست، انژکتیو و تصویری گرنشتاین نامیدند. بعدها، این بعدها توسط محققان بسیاری از جمله اوراموف[۵] ،کریستین‌سن[۶] ، ایناکس، فاکسبی[۷] و جندا در [۶] و [۱۱] و [۱۳] مطالعه شدند. همچنین هولم[۹] در [۱۴] توصیف جدیدی از مدول‌های در G- رده روی حلقه‌های جابه‌جایی دلخواه ارایه داد. چندی بعد، این سوال مطرح شد که مدول‌های تصویری(انژکتیو- یکدست) گرنشتاین و مدول‌های تصویری(انژکتیو- یکدست) چه شباهتی با هم دارند؟ در سال ۲۰۰۷، بنیز[۱۰] و مهدو[۱۱] در [۷] یک زیر رده ازمدول‌های تصویری(انژکتیو- یکدست) گرنشتاین به نام مدول‌های تصویری(انژکتیو- یکدست) گرنشتاین قوی (SG- تصویری) را معرفی کردندکه شباهت زیادی با مدول‌های تصویری(انژکتیو- یکدست) دارند. این رده از مدول‌ها به طور اکید شامل مدول‌های تصویری(انژکتیو- یکدست) و مشمول در رده مدول‌های

Auslander[۱]
Bridger[۲]
Enochs[۳]
Jenda[۴]
Avarmov[۵]
Cheristensen[۶]
Foxby[۷]
Holm[۹]
Benis[۱۰]
Mahdou[۱۱]

تصویری(انژکتیو- یکدست) گرنشتاین می‌باشند و با استفاده از آن یک توصیف جدید از مدول‌های تصویری(انژکتیو- یکدست) گرنشتاین به دست آوردند. آن‌ها همچنین نشان دادند که یک مدول، تصویری(انژکتیو- یکدست) گرنشتاین است اگر و تنها اگر جمعوند مستقیم یک مدول تصویری (انژکتیو- یکدست) گرنشتاین قوی باشد. در سال ۲۰۰۸، لی[۱] و یانگ[۲] در [۱۹] ثابت کردند که مدول M، تصویری (انژکتیو- یکدست) گرنشتاین قوی است اگر و تنها اگر برای هر مدول تصویری(انژکتیو- یکدست) H، $M \oplus H$ نیز یک مدول تصویری(انژکتیو- یکدست) گرنشتاین قوی باشد. آن‌ها همچنین توسیعی از قضیه‌ی لمبگ را برای مدول‌های تصویری گرنشتاین قوی ارایه دادند. در همان سال، بنیز و مهدو در [۸] توسیعی از مدول‌های تصویری(انژکتیو- یکدست) گرنشتاین قوی را بیان کردند و آن را مدول‌های تصویری(انژکتیو- یکدست) گرنشتاین n- قوی (SG- n- تصویری) نامیدند و ثابت کردند که یک مدول تصویری گرنشتاین n- قوی است اگر و تنها اگر دارای بعد یکدست متناهی باشد. در سال ۲۰۱۰، ژاو[۳] و هوانگ[۴] در [۲۰] رابطه بین مدول‌های تصویری گرنشتاین n- قوی و مدول‌های تصویری گرنشتاین m- قوی وقتی $(n \neq m)$ را بررسی کردند. همچنین نشان دادند که مدول‌های تصویری گرنشتاین n- قوی تحت جمعوند مستقیم بسته نیستند. آن‌ها با اثبات این مطلب که، یک مدول تصویری گرنشتاین n- قوی متناهی مولد یک مدول یکدست گرنشتاین n- قوی از نمایش متناهی است، نشان دادند که تحت چه شرایطی یک مدول تصویری گرنشتاین n- قوی یک مدول یکدست گرنشتاین n- قوی است. در ادامه، به بررسی قضیه لمبگ برای مدول‌های تصویری گرنشتاین n- قوی پرداختند و توانستند طرف رفت آن قضیه (اگر M مدول یکدست گرنشتاین n- قوی باشد، آنگاه M^+ مدول انژکتیو گرنشتاین n- قوی است.) را اثبات کنند و در این راستا این مطلب مهم را که، روی جبر آرتینی R، اگر M یک R- مدول انژکتیو n- قوی باشد، آنگاه M^+ یک R^{op}- مدول یکدست گرنشتاین n- قوی است، را ارایه دادند.

در ادامه مباحثی که در بالا گفته شد، ما در فصل سوم مدول‌های تصویری گرنشتاین n- قوی را که (n,m)- قوی نام دارند به تفصیل مورد بررسی قرار می‌دهیم.

---

[۱] Liu

[۲] Yang

[۳] Zhao

[۴] Huang

اما فصل اول از این پایان‌نامه، به بیان تعاریف و قضایای مربوط مفاهیم هومولوژیکی اختصاص دارد. این فصل شامل چهار بخش است. در بخش اول قضایای ابتدایی که دارای کاربردهای زیادی در فصل‌های بعدی هستند را بیان می‌کنیم. در بخش دوم وارد مبحث هومولوژی شده و تعاریف و قضایای مربوط به آن را می‌آوریم. بخش سوم نیز به معرفی مدول‌های حل‌پذیر و اثبات قضایای مرتبط به آن اختصاص داده شده است. در بخش چهارم تعریف مدول‌های جلوبرنده و عقب‌کشنده را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم به بررسی مدول‌های تصویری گرنشتاین (قوی و n- قوی) می‌پردازیم. این فصل شامل چهار بخش است. در بخش اول، دوم و سوم، به ترتیب مدول‌های تصویری گرنشتاین، تصویری گرنشتاین قوی و تصویری گرنشتاین n- قوی را تعریف کرده و قضایای مرتبط به آن‌ها را بیان می‌کنیم. دربخش چهارم، به بررسی این موضوع می‌پردازیم که اگر M یک مدول تصویری گرنشتاین n- قوی باشد انگاه هر i- امین سی‌زی‌جی از آن نیز چنین است.

هدف اصلی این پایان‌نامه که بررسی تعمیم مدول‌های تصویری گرنشتاین n- قوی است، یعنی مدول‌های تصویری گرنشتاین (n,m)- قوی، همان طور که گفته شد، در فصل پایانی آورده شده است. این فصل به دو بخش تقسیم می‌شود. در بخش اول، مدول‌های تصویری گرنشتاین (n,m)- قوی $(n \geq ۱, m \geq ۰)$ را تعریف کرده و روابط بین آن‌ها و همچنین خواص ابتدایی آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش دوم، سی‌زی‌جی های این مدول‌ها را بررسی می‌کنیم. مهم‌ترین مطلبی که در این قسمت در مورد آن بحث می‌شود این است که، اگر M یک مدول تصویری گرنشتاین (n,m)- قوی باشد، به طوری که برای یک عدد صحیح مثبت k، $Gpd_R(M) = k \leq m$، آنگاه برای هر $۱ \leq i \leq k$، i- امین سی‌زی‌جی از M یک مدول تصویری گرنشتاین $(n, m-i)$- قوی است و برای هر $i \geq k$، i- امین سی‌زی‌جی از M یک مدول تصویری گرنشتاین $(n,۰)$- قوی است. این مطلب یکی از اهداف اصلی این پایان نامه است. همچنین دولم را که در قضیه‌ی اصلی دیگری در پایان نامه کاربرد دارند، بیان می‌کنیم.
درادامه، به بررسی دومین قضیه‌ی اساسی این پایان نامه، که در واقع عکس اولین هدف اصلی است، می‌پردازیم، یعنی به این سوال پاسخ می‌دهیم که اگر i- امین سی‌زی‌جی ازمدول M، یک مدول تصویری گرنشتاین (n,m)- قوی باشد، آیا M یک مدول تصویری گرنشتاین $(n, m+i)$- قوی است یا نه؟ در پایان دو مطلب مهم که بیان رابطه‌ی بعد یکدست و بعد تصویری است و از این دو قضیه اصلی نتیجه می‌شود، را بیان کرده واثبات می‌کنیم.

فصل ۱

تعاریف و پیش‌نیازها

در این فصل تعاریف و پیش‌نیازهای لازم که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد، گنجانده شده است. این فصل مشتمل برچهار بخش می‌باشد. در بخش اول از این فصل، بعضی از مفاهیم و قضایای ابتدایی در مورد مدول‌ها بیان می‌شود. در بخش دوم، مبحث هومولوژی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ابتدا تحلیل‌های تصویری(انژکتیو و یکدست) را تعریف کرده و با توجه به آن‌ها مفاهیم Tor و Ext و قضایای مربوط به آن‌ها را ارایه می‌دهیم. در ادامه، سی‌زی‌جی (هم سی‌زی‌جی) یک مدول را در یک تحلیل معرفی می‌کنیم و قضایای مربوط را که در فصل‌های بعدی کاربرد بسیاری دارند را می‌آوریم. در بخش سوم، مدول‌های حل‌پذیر و دنباله‌های سره و هم سره را تعریف کرده و با توجه به آن‌ها صورت دیگری از لم هورسشو را که در فصل‌های بعدی کاربرد زیادی دارد را بیان می‌کنیم. در بخش پایانی مدول‌های جلوبرنده و عقب‌کشنده را تعریف کرده و قضایای مورد نیاز مربوط به آن‌ها را بیان خواهیم کرد.

۱.۱ مفاهیم اولیه

در سرتاسر این پایان‌نامه، R حلقه‌ی جابجایی و یکدار است و همه مدول‌ها، R- مدول‌های چپ در نظر گرفته می‌شوند مگر این که جایی تاکید شود. اما تمام نتایج برای R- مدول‌های

راست نیز برقرار هستند.

نماد گذاری کلاس همه R- مدول‌های چپ را با $_RM$ و کلاس همه R- مدول‌های راست را با M_R نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۱ دیاگرام جابه‌جایی زیر از مدول‌ها و نگاشت‌های بین آن‌ها را با سطرهای دقیق در نظر بگیرید،

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[r] & 0 \\ B' \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "q"] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

در این‌صورت یک نگاشت منحصر به فرد $h : A'' \longrightarrow B''$ وجود دارد که دیاگرام بالا را جابه‌جا می‌سازد.

برهان. به قضیه ۷۰.۲ ازمرجع [۱۸] مراجعه کنید.

قضیه ۲.۱.۱ . دیاگرام جابه‌جایی زیر از مدول‌ها و نگاشت‌های بین آن‌ها را با سطرهای دقیق در نظر بگیرید،

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[d, "h"] \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "q"] & B'' \end{tikzcd}$$

در این‌صورت یک نگاشت منحصربه فرد $f : A' \longrightarrow B'$ وجود دارد که دیاگرام بالا را جابه‌جا می‌سازد.

برهان. به قضیه ۷۱.۲ از مرجع [۱۸] مراجعه کنید.

قضیه ۳.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. شرایط زیر برای R- مدول P با هم معادلند:

۱- P تصویری است،

۲- $Hom_R(P, -)$ دقیق است،

۳- هر دنباله‌ی دقیق کوتاه $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ دقیق تجزیه است (یعنی $B \simeq A \oplus P$)،

۴- اگر $\beta : B \longrightarrow P$ یک هومومورفیسم پوشا باشد، آنگاه هومومورفیسم $\gamma : P \longrightarrow B$ وجود دارد به طوری که $\beta \circ \gamma = 1_P$. بنابراین P یک جمعوند مستقیم از B است،

۵- مدول آزاد F وR- مدول K وجود دارند به طوری که $F \simeq K \oplus P$.

برهان. به گزاره های ۲.۳ و ۳.۳ و قضیه‌ی ۵.۳ از مرجع [۱۸] مراجعه کنید.

قضیه ۴.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد، آنگاه مجموع مستقیم $\bigoplus_{i\in\in I} P_i$ از R- مدول‌ها تصویری است اگر و تنها اگر هر P_i تصویری باشد.

برهان. به نتیجه‌ی ۶.۳ از مرجع [۱۸] مراجعه کنید.

قضیه ۵.۱.۱ هر R مدول آزاد، تصویری است. عکس این مطلب در صورتی درست است، که R دامنه ایده‌ال اصلی باشد.

برهان. به قضیه‌ی ۱.۳ از مرجع [۱۸] و نتیجه‌ی ۶.۳ از مرجع [۱۵] مراجعه کنید.

گزاره ۶.۱.۱ فرض کنید

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0 \tag{۱.۱}$$

یک دنباله دقیق کوتاه از R- مدول‌های چپ باشد وM یک R- مدول چپ دلخواه باشد، آنگاه دو دنباله دقیق کوتاه زیر را داریم:

$$0 \longrightarrow A \oplus M \longrightarrow B \oplus M \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \oplus M \longrightarrow C \oplus M \longrightarrow 0$$

برهان. ثابت می‌کنیم دنباله اول یک دنباله دقیق کوتاه است، دقیق بودن دنباله دوم به طور مشابه ثابت می‌شود. نگاشت‌های i و p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$i : A \oplus M \longrightarrow B \oplus M$$

$$(a, m) \longmapsto (\varphi(a), m)$$

و

$$p : B \oplus M \longrightarrow C$$

$$(b, m) \longmapsto \psi(b)$$

به وضوح i و p همریختی‌های R- مدولی هستند. حال ثابت می‌کنیم دنباله‌ی زیر دقیق است.

$$0 \longrightarrow A \oplus M \xrightarrow{i} B \oplus M \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$$

چون φ یک‌به‌یک است، به وضوح i نیز یک‌به‌یک است. همچنین چون ψ پوشاست، پوشا بودن p هم واضح است.

اکنون نشان دهیم $Kerp = Imi$. برای این منظور، ثابت می‌کنیم $Kerp \subseteq Imi$ و $Imi \subseteq Kerp$. فرض می‌کنیم $(b,m) \in Kerp$، پس $p(b,m) = ۰$ و بنابراین طبق تعریف p تعریف $\psi(b) = ۰$، یعنی $b \in Ker\psi = Im\varphi$. پس یک $a \in A$ وجود دارد که $\varphi(a) = b$، بنابراین

$$i(a,m) = (\varphi(a), m) = (b,m).$$

در نتیجه $(b,m) \in Imi$. حال فرض می‌کنیم $(a,m) \in A \oplus M$، بنابراین

$$p \circ i(a,m) = p(\varphi(a), m) = \psi(\varphi(a))$$

و چون دنباله ی (۱.۱) دقیق است، $p \circ i(a,m) = ۰$. در نتیجه $p \circ i = ۰$ و این یعنی $Imi \subseteq Kerp$. $\square$

تعریف ۷.۱.۱ اگر $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند، آنگاه

۱) تابعگون همورد $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ دقیق چپ نامیده می‌شود، اگر دقیق بودن دنباله‌ی

$$۰ \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

در $\mathcal{C}$، دقیق بودن دنباله

$$۰ \longrightarrow TA \longrightarrow TB \longrightarrow TC$$

در $\mathcal{D}$ را نتیجه دهد. همچنین T دقیق راست نامیده می‌شود، اگر دقیق بودن دنباله‌ی

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow ۰$$

در $\mathcal{C}$، دقیق بودن دنباله

$$TA \longrightarrow TB \longrightarrow TC \longrightarrow ۰$$

در $\mathcal{D}$ را نتیجه دهد.

۲) تابعگون پادورد $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ دقیق چپ نامیده می‌شود، اگر دقیق بودن دنباله‌ی

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow ۰$$

در $\mathcal{C}$، دقیق بودن دنباله

$$0 \longrightarrow FC \longrightarrow FB \longrightarrow FA$$

در $\mathcal{D}$ را نتیجه دهد. همچنین F دقیق راست نامیده می‌شود، اگر دقیق بودن دنباله‌ی

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

در $\mathcal{C}$، دقیق بودن دنباله

$$FC \longrightarrow FB \longrightarrow FA \longrightarrow 0$$

در $\mathcal{D}$ را نتیجه دهد.

۳) تابعگون L دقیق نامیده می‌شود، اگر هم دقیق راست و هم دقیق چپ باشد.

گزاره ۸.۱.۱ تابعگون $T :_R M \longrightarrow_R M$ را در نظر بگیرید.

۱) اگر T یک تابعگون همورد دقیق چپ باشد، آنگاه به ازای همریختی R- مدولی $f : A \longrightarrow B$،

$$TKerf \cong KerTf$$

۲) اگر T یک تابعگون پادورد دقیق چپ باشد، آنگاه به ازای همریختی R- مدولی $f : A \longrightarrow B$،

$$TImf \cong ImTf$$

برهان. ۱) می‌دانیم دنباله‌ی

$$0 \longrightarrow Kerf \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} Imf \longrightarrow 0 \qquad (۲.۱)$$

که در آن i نگاشت شمول است ، دقیق می‌باشد. اگر T یک تابعگون همورد و دقیق چپ باشد، آنگاه دنباله‌ی دقیق زیر را داریم:

$$0 \longrightarrow T(Kerf) \xrightarrow{Ti} TA \xrightarrow{Tf} TB$$

بنابراین طبق قضیه اول یکریختی داریم:

$$T(Kerf) \cong ImTi = KerTf.$$

۲) اگر T یک تابعگون پادورد و دقیق چپ باشد، آنگاه از دنباله دقیق (۲.۱)، دنباله‌ی دقیق زیر را به دست می‌آوریم:

$$0 \longrightarrow TImf \xrightarrow{Tf} TA \xrightarrow{Ti} TKerf$$

طبق قضیه اول یکریختی خواهیم داشت:

$$TImf \cong ImTf.$$

قضیه ۹.۱.۱ دنباله دقیق از R- مدول‌های

$$\varphi = \cdots \rightarrow X_1 \xrightarrow{\chi_1} X_0 \xrightarrow{\chi_0} Y^0 \xrightarrow{\nu^0} Y^1 \xrightarrow{\nu^1} \cdots$$

را در نظر بگیرید. قرار دهید $M = Im\chi_0 = Ker\nu^0$. لذا φ به دو دنباله دقیق زیر تجزیه می‌شود :

$$\varphi_1 = \cdots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{\chi_2} X_1 \xrightarrow{\chi_1} X_0 \xrightarrow{\chi_0} M \longrightarrow 0$$

$$\varphi_2 = 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} Y^0 \xrightarrow{\nu^0} Y^1 \xrightarrow{\nu^1} Y^2 \longrightarrow \cdots$$

که در آن i، نگاشت شمول است. اگر $T: {}_R M \longrightarrow {}_R M$ تابعگون همورد(پادورد) جمعی باشد. در این‌صورت

۱) اگر $T(\varphi_1)$ ، $T(\varphi_2)$ هر دو دقیق باشند، آنگاه $T(\varphi)$ نیز دقیق است.

۲) اگر $T(\varphi)$ دقیق بوده و T دقیق چپ یا دقیق راست باشد، آنگاه $T(\varphi_1), T(\varphi_2)$ دقیق هستند.

برهان. به قضیه ۶.۲.۱ از مرجع [۱] مراجعه کنید.

تعریف ۱۰.۱.۱ یک R- مدول B، یکدست است، اگر تابعگون $B \otimes -$ دقیق باشد.

قضیه ۱۱.۱.۱ فرض کنید $\{B_k | k \in K\}$ یک خانواده از R- مدول‌ها باشد. در این‌صورت $\bigoplus_{k\in K} B_k$ یکدست است اگر و تنها اگر هر B_k یکدست باشد.

برهان. به گزاره ۴۶.۳ از مرجع [۱۸] مراجعه کنید.

قضیه ۱۲.۱.۱ هر مدول تصویری، یکدست است.

برهان. به گزاره ۴۶.۳ از مرجع [۱۸] مراجعه کنید.

گزاره ۱۳.۱.۱ دنباله دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

را در نظر بگیرید که در آن M یکدست و P تصویری است. در این‌صورت M تصویری است.

برهان. به گزاره ۵.۲ از مرجع [۹] مراجعه کنید.

۲.۱ هومولوژی

در این بخش به معرفی بعضی تحلیل‌های خاص می‌پردازیم و پس از این که n- امین هومولوژی یک مدول را تعریف کردیم با استفاده از این تحلیل‌ها مفاهیم Ext و Tor را بیان کرده و قضایای مربوط به آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

نماد گذاری کلاس همه R- مدول‌های تصویری، یکدست و انژکتیو را به ترتیب با $P(R)$، $F(R)$ و $I(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱ یک همبافت (مجتمع زنجیری) A، یک دنباله از R- مدول‌ها و نگاشت‌های بین آن‌ها به صورت

$$\mathbf{A} = \cdots \longrightarrow A_{n+۱} \xrightarrow{d_{n+۱}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-۱} \longrightarrow \cdots \qquad (۳.۱)$$

با شرط $d_n \circ d_{n+۱} = ۰$، برای همه $n \in \mathbb{Z}$ است و آن را با (A, d) نمایش می‌دهیم.

نکته ۲.۲.۱ شرط $d_n \circ d_{n+۱} = ۰$، در تعریف بالا با $Imd_{n+۱} \subseteq Kerd_n$ معادل است.

مثال واضح است که هر دنباله دقیق یک همبافت است.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{H}$ یک کلاس از R- مدول‌ها باشد، برای هر R- مدول M از کلاس $\mathcal{H}$، دو نوع تحلیل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱- یک $\mathcal{H}$- تحلیل چپ از M، یک دنباله دقیق

$$X = \cdots \longrightarrow X_۱ \longrightarrow X_. \longrightarrow M \longrightarrow ۰$$

باشرط $X_n \in \mathcal{H}$ برای همه $n \geq ۰$ است.

۲- یک $\mathcal{H}$- تحلیل راست از M، یک دنباله دقیق

$$X = ۰ \longrightarrow M \longrightarrow X^{۰} \longrightarrow X^{۱} \longrightarrow \cdots$$

باشرط $X^n \in \mathcal{H}$ برای همه $n \geq ۰$ است.

تعریف ۴.۲.۱ ۱) یک تحلیل تصویری از یک مدول M، یک $P(R)$- تحلیل چپ از M است.

اگر

$$\mathbf{P} = \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

یک تحلیل تصویری از M باشد، آنگاه همبافت

$$\mathbf{P}_M = \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

را تحلیل تصویری محذوف M می‌نامیم.

۲) یک تحلیل یکدست از یک مدول M، یک $F(R)$- تحلیل از M است. اگر

$$\mathbf{F} = \cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

یک تحلیل یکدست از M باشد، آنگاه همبافت

$$\mathbf{F}_M = \cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow 0$$

رایک تحلیل یکدست محذوف از M می‌نامیم.

۳) یک تحلیل انژکتیو از یک مدول M، یک $I(R)$- تحلیل راست از M است. اگر

$$\mathbf{E} = 0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \cdots$$

یک تحلیل انژکتیو از M باشد، آنگاه همبافت

$$\mathbf{E}_M = 0 \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \cdots$$

رایک تحلیل انژکتیو محذوف از M می‌نامیم.

نکته واضح است که هر $P(R)$- تحلیل و هر $I(R)$- تحلیل از یک مدول A، همبافت هستند.

گزاره ۵.۲.۱ هر R- مدول M، دارای تحلیل تصویری و تحلیل انژکتیو است.

برهان. به گزاره های ۲.۶ و ۴.۶ از مرجع [۱۵] مراجعه کنید.

تعریف ۶.۲.۱ اگر A یک R- مدول چپ باشد. بعد تصویری A، که آن را با $pd(A)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از کوچکترین عدد صحیح n، به طوری که یک تحلیل تصویری به صورت

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

از A وجود داشته باشد. n را طول تحلیل تصویری A گوییم. اگر A هیچ تحلیل تصویری از طول متناهی، به صورت بالا نداشته باشد، قرار می‌دهیم $pd(A) = \infty$.

مثال ۷.۲.۱ $pd(A) = 0$ اگر و تنها اگر A تصویری باشد.

تعریف ۸.۲.۱ اگر A یک R- مدول چپ باشد، در این صورت بعد یکدست A، که آن را با $fd(A)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از کوچکترین عدد صحیح n، به طوری که یک تحلیل یکدست

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

از A وجود داشته باشد. n را طول تحلیل یکدست A گوییم. اگرA هیچ تحلیل یکدستی از طول متناهی، به صورت بالا نداشته باشد، قرار می‌دهیم $fd(A) = \infty$.

تعریف ۹.۲.۱ اگر A یک R- مدول چپ باشد، در این صورت بعد انژکتیو A، که آنرا با $id(A)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از کوچکترین عدد صحیح n، به طوری که یک تحلیل انژکتیو

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \longrightarrow 0$$

از A وجود داشته باشد. n را طول تحلیل انژکتیو A گوییم. اگرA هیچ تحلیل انژکتیو از طول متناهی، به صورت بالا نداشته باشد، قرار می‌دهیم $id(A) = \infty$.

نماد گذاری کلاس همه R- مدول‌های با بعد تصویری متناهی، بعد یکدست متناهی و بعد انژکتیو متناهی را به ترتیب با $\overline{P}(R)$، $\overline{F}(R)$ و $\overline{I}(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱ اگر (A, d) یک همبافت به شکل (۳.۱) باشد، n- امین مدول هومولوژی A را با، $H_n(A)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$H_n(A) = Kerd_n \diagup Imd_{n+1}$$

تعریف ۱۱.۲.۱ یک همبافت A به طور هومولوژیکی بدیهی گفته می‌شود، هرگاه برای هر n، $H_n(A) = 0$.

نکته ۱۲.۲.۱ واضح است که همبافت A یک دنباله دقیق است اگروتنها اگر به طور هومولوژیکی بدیهی باشد.

تعریف ۱۳.۲.۱ اگر (C, d) و (C', d') دو همبافت باشند. یک نگاشت زنجیری $f : C \longrightarrow C'$ یک دنباله از نگاشت‌های R- مدولی به شکل $(f_n : C_n \longrightarrow C'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ است، به طوری که دیاگرام زیرجابه‌جا می‌شود.