دانشگاه پیام نور

مرکز مشهد

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ کارشناسی ارشد

عنوان:

نگاشت های ثابت متعامد در فضاهای متعامد متساوی الساقین

استاد راهنما:

سرکار خانم دکتر شادکام

استاد مشاور:

آقای دکتر محمد صال مصلحیان

نگارش:

سمانه ناصری

بهمن ۸۸

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور
مرکز مشهد
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت کارشناسی ارشد

عنوان:

نگاشت های ثابت متعامد در فضاهای متعامد متساوی الساقین

استاد راهنما:
سرکار خانم دکتر شادکام

استاد مشاور:
آقای دکتر محمد صال مصلحیان

نگارش:
سمانه ناصری

بهمن ماه ۸۸

دانشگاه پیام نور
مرکز مشهد
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت کارشناسی ارشد

عنوان:

پایداری نگاشت های ثابت متعامد در فضاهای متعامد متساوی الساقین

استاد راهنما:
سرکار خانم دکتر شادکام

استاد مشاور:
آقای دکتر محمد صال مصلحیان

نگارش:
سمانه ناصری

بهمن ماه ۸۸

تاریخ: ۱۳۸۸/۱۱/۱۲
شماره: ۰۸۱/۲۴۷۱۰
پیوست:

دانشگاه پیام نور

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

بسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : **نگاشت های ثابت متعامد در فضاهای متعامد متساوی الساقین** که توسط **سمانه ناصری** تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تایید می باشد.

تاریخ دفاع : ۸۸/۱۱/۵   نمره : ۱۸/۵ هجده و پنج دهم   درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیأت داوران :

نام و نام خانوادگی:	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر صدیقه شادکام تربتی	استاد راهنما	استادیار	
	استاد راهنمای همکار		
دکتر محمد صال مصلحیان	استاد مشاور	استاد	
دکتر ثریا طالبی	استاد داور	استادیار	
دکتر عقیله حیدری	نماینده گروه آموزشی	دانشیار	

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

تاریخ: ۱۳۸۸/۱۱/۱۰۳
شماره: ۸۱۰/۲۴۷۸۰
پیوست: ....

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : **نگاشت های ثابت متعامد در فضاهای متعامد متساوی الساقین** که توسط **سمانه ناصری** تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تایید می باشد.

تاریخ دفاع : ۸۸/۱۱/۵   نمره : ۱۸/۵ هجده و نیم   درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیأت داوران :

نام و نام خانوادگی:	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر صدیقه شادکام تربتی	استاد راهنما	استادیار	
	استاد راهنمای همکار		
دکتر محمد صال مصلحیان	استاد مشاور	استاد	
دکتر ثریا طالبی	استاد داور	استادیار	
دکتر عقیله حیدری	نماینده گروه آموزشی	دانشیار	

مشهد: خیابان امام خمینی ۴۰ – صندوق پستی ۹۱۹ تلفن : ۸۵۲۸۵۲۸ (۰۵۱۱)
دورنگار: ۸۵۲۸۵۲۰ (۰۵۱۱)   پست الکترونیک: mashhad@pnu.ac.ir

چکیده

مسئله پایداری معادله های تابعی تاکنون توسط ریاضیدانانی مثل اولام، هایرز، راسیاس، جونگ، پارک و غیره مورد بررسی قرار گرفته است.

قضیه پایداری هایرز – اولام – راسیاس درباره معادله های تابعی در فضاهای باناخ حقیقی که مشخصه هایی از تعامد در فضاهای ضرب داخلی اند، از اهمیت بیشتری برخوردار است و مورد مطالعه قرار می گیرد.

مقدمه

در فصل اول انواع تعامد را معرفی می کنیم سپس نظریه نگاشت های ثابت متعامد در یک فضای متعامد متساوی الساقین را بیان می کنیم و نگاشت های ثابت متعامد را پایدار می سازیم. به عنوان یک کاربرد ، پایداری تعامد معادله درجه دوم از نوع پکسیدر را مورد بحث قرار می دهیم.

در فصل دوم پایداری نگاشت های پکسیدر را در سراسر مدول های باناخ یک جبر باناخ یکدار بررسی می کنیم و به عنوان یک نتیجه پایداری اولام – هایرز از معادله تابعی کشی متعامد از نوع پکسیدر را جایی که رابطه $\perp$ تعامد به مفهوم راتز می باشد، پایه گذاری می کنیم.

در فصل سوم با بکار بردن قضیه تناوبی نقطه ثابت پایداری تعامد معادله تابعی درجه دوم از نوع پکسیدر را جایی که f و g، h و k نگاشت هایی از فضای متعامد متقارن به فضای باناخ هستند را پایه گذاری می کنیم.

در فصل چهارم، پایداری اولام – هایرز معادله های تابعی مکعبی متعامد را اثبات می کنیم.

فهرست مطالب

فصل اول

تعاریف مقدماتی و مفاهیم اساسی

۱-۱-۱ تعریف

فرض کنید X یک فضای برداری مختلط است هرگاه به ازای هر x عضو فضای X یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که

۱) به ازای هر $x, y \in X$ و $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

۲) به ازای هر x و اسکالر α، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

۳) اگر $\|x\| = 0$ ، آنگاه $x = 0$

فضای برداری X با این شرایط یک فضای نرم دار است.

نکته :

هر فضای نرم دار یک فضای متری با متر تعریف شده به صورت $d(x, y) = \|x - y\|$ است.

۱-۱-۲ تعریف

هر فضای خطی نرم دار که با متر تعریف شده به وسیله نرمش تام باشد، یک فضای باناخ می نامیم.

۱-۱-۳ تعریف

فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی گوئیم هرگاه به هر جفت مرتب از بردارهای x و y در H یک عدد مختلط مانند $<x, y>$ به نام حاصل ضرب داخلی x و y چنان مربوط باشد که قواعد زیر برقرار باشند :

i) $(x, y \in H)$ $\quad <y, x> = \overline{<x, y>}$

ii) $(x, y, z \in H)$ $\quad <x + y, z> = <x + z> + <y + z>$

iii) (αاسکالر $x, y \in H$) $<\alpha x, y> = \alpha <x, y>$

iv) $(x \in H)$ $<x, x> \geq 0$

v) $<x, x> = 0 \Leftrightarrow x = 0$

نرم x یعنی نرم بردار $x \in H$ راتعریف می کنیم

$$\| x \|^2 = <x, x>$$

هر گاه این فضای متری تام باشد (هر دنباله کشی در H در آن همگرا باشد) آنگاه H را یک فضای هیلبرت است.

۱-۱-٤ تعریف

فضای متعامد[۱] X یک فضای نرم دار حقیقی است که یکی از انواع تعامد در آن تعریف شده باشد.

۱-۱-۵ انواع تعامد

۱) تعامد بدیهی[۲] $\perp_v$:

به ازای هر عنصر متعلق به X، $0 \perp_v x$ و $x \perp_v 0$.

و برای هر عنصر غیرصفر که $x, y \in X$ می گوییم $x \perp_v y$ اگر و فقط اگر x و y مستقل خطی باشند.

۲) بیرکهف – جیمز[۳] $\perp_B$:

گوییم $x \perp_B y$ اگر برای هر اسکالر α، داشته باشیم $\| x \| \leq \| x + \alpha y \|$

[1] Orthogonal space
[2] Trivial
[3] Birkhoff – James

۳) فیثاغورس[1] $\perp_P$:

اگر $\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$ آنگاه گوییم $x \perp_P y$

٤) متساوی الساقین[2] $\perp_I$:

اگر $\| x+y \| = \| x-y \|$ آنگاه گوییم $x \perp_I y$

۵) دیمینی[3] $\perp_D$:

گوییم $x \perp_D y$ اگر $\sup\{f(x)g(y)-f(y)g(x) : f,g \in S^*\} = \| x \| \| y \|$ به طوری که S^* کره واحد از فضای دوگان X است.

٦) کارلسون[4] $\perp_C$:

$x \perp_C y$ اگر $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \| \beta_i x + \gamma_i y \|^2 = 0$ و $m \geq 2$ و $\alpha_i \neq 0$ و γ_i و β_i اعداد حقیقی ثابت هستند به طوری که

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i \gamma_i = 1 \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i {\beta_i}^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i {\gamma_i}^2 = 0$$

۷) T متعامد[5] $\perp_T$:

فرض کنید $T : X \to X^*$ نگاشت خطی باشد؛ می گوییم $x \perp_T y$ اگر $T(x)(y)=0$.

۸)راتز[6] $\perp_R$:

فرض کنید X فضای برداری حقیقی با بعد ناکمتر از ۲ و ($\perp$) یک رابطه دوتایی روی X

[1] Phythagorean
[2] Isoscales
[3] Diminnie
[4] Carlsson
[5] T - orthogonality
[6] Ratz

است با شرایط زیر:

(۰۱) تمامیت تعامد برای صفر : به ازای هر x متعلق به X، $0 \perp x$ و $x \perp 0$.

(۰۲) استقلال : اگر $x, y \in X - \{0\}$ و $x \perp y$، آنگاه x و y مستقل خطی اند.

(۰۳) همگن : اگر $x, y \in X$ و $x \perp y$، آنگاه به ازای هر α و β عضو اعداد حقیقی $\alpha x \perp \beta y$.

(۰٤) خاصیت تالس : اگر P زیرفضای ۲- بعدی از X باشد و $x \in P$ و $\lambda \in R_+$، آنگاه $y_0 \in P$ وجود دارد چنان که $x \perp y_0$ و $x + y_0 \perp \lambda x - y_0$.

دوتایی ($X, \perp$) یک فضای متعامد نامیده می شود .

دراین فصل دوتایی ($X, \perp$) را یک فضای متعامد متساوی الساقین و Y را یک فضای نرم دار درنظر می گیریم.

اگر P تابع داده شده باشد آنگاه تابع زوج[1] و فرد[2] را به ترتیب زیر تعریف می کنیم

$$P^e(x) := \frac{P(x) + P(-x)}{2}$$

$$P^0(x) := \frac{P(x) - P(-x)}{2}$$

۱-۱-٦ تعریف

رابطه $\perp$ متقارن[3] نامیده می شود اگر $x \perp y$ نتیجه بدهد $y \perp x$ ($x, y \in X$).

در بین تعامد های ذکر شده تعامد بدیهی و تعامد معمولی (ضرب داخلی)، تعامد فیثاغورس، تعامد متساوی الساقین و تعامد کارلسون، متقارن هستند.

[1] even
[2] odd
[3] Symmetry

تذکر:

تعامد بریخوف – جیمز متقارن نیست، مگر در حالتی که X فضای نـرم دار حقیقـی بـا بعـد بزرگتـر مساوی ۳ ، یک فضای ضرب داخلی باشد، عکس این مطلب نیز برقرار است.

اثبات :

فرض کنید $x \perp y$ و $\| x \| = < x, x >^{\frac{1}{2}}$ در این صورت اگر $x \perp_B y$

آنگاه نشان می دهیم $y \perp_B x$ داریم

$$\| y \|^2 = < y, y > \qquad ,$$

$$\| y + \lambda x \|^2 = < (y + \lambda x, y + \lambda x) >$$

$$= < x, y > + < y, \lambda x > + < \lambda x, y > + < \lambda x, \lambda x >$$

چون X فضای ضرب داخلی فرض شده پس $< x, y > = 0$ بنابراین

$$< y, y > \leq < y, y > + < \lambda x, \lambda x >$$

و این یعنی

$$\| y \|^2 \leq \| y + \lambda x \|^2$$

$$\| y \| \leq \| y + \lambda x \|$$

پس $y \perp_B x$.

۱–۱–۷ نکته

اگر X فضای ضرب داخلی باشد، دیگر تعامدها از آن نتیجه می شود.

توجه به این نکته حایز اهمیت است که تعامدهای ذکر شده در صورتی که X فضای ضرب داخلی باشد، یکدیگر را نتیجه می دهند. به عنوان مثال تعامد متساوی الساقین به راحتی تعامد فیثاغورس را نتیجه می دهد.

اگر $<x, y> = 0$ و $\|x - y\| = \|x + y\|$ آنگاه

$$\|x + y\|^2 = \|x - y\|^2$$

$$<(x + y), (x + y)> = <(x - y), (x - y)>$$

$$= <x, x> + <x, -y> + <-y, x> + <-y, -y>$$

$$= <x, x> + <-y, -y>$$

بنابراین

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

۱-۱-۸ مثال

به عنوان مثال نقض اگر X فضای نرم دار باشد.

مثال ۱) اگر $\|x\| := \sup |x_i|$

$$x = (1,1,2,0,0,...) \qquad , \qquad y = (-1,1,0,2,0,0,...)$$

آنگاه

$$\|x\| = 2 \ , \ \|y\| = 2$$

$$\|x + y\| = \|x - y\| \Rightarrow x \perp_I y$$

ولی

$$\|x\|^2+\|y\|^2 \neq \|x+y\|^2$$

$$4+4\neq 4 \Rightarrow x \not\perp_p y$$

مثال ۲) فرض کنید X فضای نرم دار حقیقی با نرم $\|x\| := \sum |x_i|$ باشد و

$$x=(1,1,1) \qquad , \qquad y=(-1,2,1)$$

$$x+y=(0,3,2) \quad , \quad x-y=(2,-1,0)$$

آنگاه

$$\|x\|=3 \;,\; \|y\|=4 \;,\; \|x+y\|=5 \;,\; \|x-y\|=3$$

$$\|x+y\|\neq\|x-y\| \Rightarrow x \not\perp_I y$$

در حالی که

$$\|x\|^2+\|y\|^2 = \|x+y\|^2$$

$$3^2+4^2=5^2 \Rightarrow x\perp_p y$$

مثال ۳) فرض کنید X همراه با همان نرم سوپرمم در مثال ۱ باشد، دیدیم که تعامد متساوی الساقین برقرار است، اگر $x=(1,1,2,0,0,...)$ در این صورت $\|x\|=2$

و

$$\|x+\alpha y\|=\|(|1-\alpha|,|1+\alpha|,|2-\alpha|,|-2\alpha|,|0|,|0|,...)\|$$

حال قرار می دهیم $\alpha=\frac{1}{2}$ آنگاه

$$\|x+\alpha y\|=\sup(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},1,0,0,...)$$

$$=\frac{3}{2}$$

پس

$$2 \not\leq \frac{3}{2}$$

یعنی برای هر α، $\|x\| \leq \|x+\alpha y\|$ برقرار نیست.

مثال ٤) مثال ٢ را برای تعامد بریخوف – جیمز بررسی می کنیم اگر $x=(1,1,1)$ و $y=(1,2,1)$ آنگاه

$$\|x\| = 3, \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \|x+\alpha y\| &= \|(1-\alpha, 1-2\alpha, 1-\alpha)\| \\ &= |1-\alpha| + |1-2\alpha| + |1-\alpha| \\ &= \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

بنابراین

$$3 \not\leq 1$$

پس رابطه برقرار نیست.

مثال ٥) فرض کنید X فضای نرم دار حقیقی با نرم $\|x\| = \sum |x_i|$ باشد

$$\|x\| \leq \|x+\alpha y\| \quad (\alpha \in R)$$

$$x=(1,1,0) \qquad , \qquad y=(0,0,1)$$

$$x+\alpha y = (1,1,\alpha) \qquad , \qquad \|x+\alpha y\| = 2+|\alpha|$$

$$\|x\| = 2 \ , \ \ 2 < 2+|\alpha| \Rightarrow x \perp_B y$$

و همچنین

$$\| x \| = 2 \ , \ \| y \| = 1$$

$$\| x + y \| = \| x - y \| \Rightarrow x \perp_I y$$

ولی

$$\| x + y \|^2 = 9 \ , \ \| x \|^2 = 4 \ , \ \| y \|^2 = 1$$

$$\| x + y \|^2 \neq \| x \|^2 + \| y \|^2 \Rightarrow x \not\perp_P y$$

۱-۱-۹ نگاشت های متعامد

i) $C : X \to Y$ یک نگاشت ثابت متعامد می نامیم اگر به ازای هر $x, y \in X$ که $x \perp y$ داشته باشیم

$$C(x + y) = C(x - y)$$

ii) $F : X \to Y$ یک نگاشت تقریبا ثابت متعامد است اگر یک مقدار مثبت $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشدبه طوری که

$$\| f(x + y) - f(x - y) \| \le \varepsilon \qquad (x \perp y \ , \ x, y \in X)$$

۱-۱-۱۰ لم

فرض کنید $C : X \to Y$ یک نگاشت ثابت متعامد باشد اگر $x, y \in X$ و $\| y \| = \| x \|$ آنگاه $C(x) = C(y)$.

اثبات:

فرض کنید $\| y \| = \| x \|$ قرار می دهیم $k = \frac{x - y}{2}, h = \frac{x + y}{2}$ آنگاه $h = k - y$ و $h + k = x$ چون $\| y \| = \| x \|$ لذا $\| h + k \| = \| h - k \|$ و X یک فضای متساوی الساقین است پس $h \perp k$ در این صورت $C(h + k) = C(h + k)$ بنابراین

$$C(x) = C(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}) = C(h+k) = C(h-k) = C(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}) = C(y)$$

۱-۱-۱۱ گزاره

فرض کنید که $C: X \to Y$ یک نگاشت ثابت متعامد باشد؛ آنگاه یک نگاشت $g: R \to Y$ وجود دارد

چنان که به ازای هر $x \in X$

$$C(x) = g(\| x \|)$$

اثبات :

فرض کنید $x_0 \neq 0$ یک عنصر ثابت از X باشد، g را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$g: R \to Y \qquad \text{و} \qquad g(r) := C(\frac{r x_0}{\| x_0 \|})$$

می دانیم که $\| \frac{x_0}{\| x_0 \|} \| = 1$ و به کمک لم (۱-۱-۱۰) بدست می آوریم :

$$g(\| x \|) = C(\frac{\| x \| x_0}{\| x_0 \|}) = C(x)$$

۱-۱-۱۲ گزاره

فرض کنید $F: X \to Y$ یک نگاشت تقریبا ثابت متعامد باشد چنان که به ازای $\varepsilon > 0$ و به ازای همه

$x, y \in X$ که $x \perp y$؛ داشته باشیم

$$\| F(x+y) - F(x-y) \| \leq \varepsilon$$

در این صورت یک نگاشت ثابت متعامد $C: X \to Y$ وجود دارد به طوری که

$$\| F(x) - C(x) \| \leq \varepsilon \qquad (x \in X)$$