فصل ۱

تعاریف ومفاهیم اولیه

دراین فصل تعاریف ومفاهیم اولیه جهت استفاده در فصل های بعدی بیان می کنیم که در آنها به بیان مختصری از تعاریف وقضایایی در آنالیز تابعی وآنالیز هارمونیک می پردازیم.

۱.۱ پیشنیازهایی از آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم Gیک گروه موضعا فشرده باشد فرض کنیم $C(G)$ مجموعه ی همه ی توابع پیوسته روی Gباشد تعریف می کنیم:

$$L_x f: G \to R$$

$$L_x f(y) = f(xy)$$

$$R_x f: G \to R$$

$$R_x f(y) = f(yx)$$

نگاشتهای $L_x f(y)$ و $R_x f(y)$ را بترتیب انتقال چپ وراست تابع f گوییم.

تعریف ۲.۱.۱. درتعریف فوق f پیوسته یکنواخت راست گوییم هرگاه:

$$\lim_{x \to 1} \|R_x f - f\|_{\sup} = 0$$

و f را پیوسته یکنواخت چپ گوییم هرگاه:

$$\lim_{x \to 1} \|L_x f - f\|_{sup} = 0$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X یک فضای موضعا محدب باشدتوپولوژی ضعیف روی X به وسیله ی خانواده ی از نیم نرم ها به صورت زیر تعریف می شود

$$\{P_{x^*} \quad | \quad x^* \epsilon X^*\} \qquad s.t \quad P_{x^*}(x) = |\langle x, x^* \rangle|$$

این توپولوژی را با w نمایش میدهیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید X یک فضای موضعا محدب باشد w^* - توپولوژی روی X به وسیله ی خانواده ی از نیم نرم ها به صورت زیر تعریف می شود

$$\{P_x \quad | \quad x \epsilon X \} \qquad s.t \quad P_x(x^*) = |\langle x, x^* \rangle|$$

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید تور $\{a_n\}$ در A باشدگوییم $\{a_n\}$نسبت به توپولوژی w - همگرا به a است هرگاه داشته باشیم:

$$\langle f, a_n\rangle \to \langle f, a\rangle \qquad (f\epsilon A^*)$$

این نوع همگرایی را با نماد $a_n \xrightarrow{w} a$ نمایش می دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید تور $\{a_n\}$ در A^{**} باشد گوییم $\{a_n\}$ نسبت به توپولوژی w^*- همگرا به a است هرگاه داشته باشیم :

$$\langle a_{\mathrm{n}}, f\rangle \to \langle a, f\rangle \qquad (f\epsilon A^*)$$

این نوع همگرایی را با نماد $a_n \xrightarrow{w^*} a$ نمایش می دهیم.

تعریف ۷.۱.۱. دنباله ی $\{a_n\}\subseteq \mathrm{A}$ را همگرای ضعیف به a گوییم هرگاه :

$$\langle f, a_n\rangle \to \langle f, a\rangle \qquad (f\epsilon A^*)$$

تعریف ۸.۱.۱. دنباله ی $\{a_n\}\subseteq A$ رابه طور ضعیف کوشی گوییم هرگاه برای هر $f\epsilon A^*$ دنباله ی $\{\langle f, a_n\langle\}$ کوشی در C باشد .

قضیه هان باناخ

قضیه ۹.۱.۱.[هان باناخ][1] فرض کنیم X یک فضای برداری و q یک تابعک خطی روی آن باشد .فرض کنیم M یک زیر فضای خطی از X و $f: M \to \mathrm{R}$ یک تابعک خطی باشد بطوری که :

$$f(x) \le q(x) \qquad (x\epsilon M)$$

آنگاه تابعک خطی $F: X \to R$ وجود دارد بطوری که $F_{|_M} = f$ و

$$F(x) \le q(x) \qquad (x\epsilon \mathrm{X})$$

اثبات : رجوع کنیدبه[۲۴]

---

[1] $Hahn - Banach$

نتیجه ۱.۱.۱۰. فرض کنید X یک فضای برداری و M زیر فضای خطی از X و $f: M \to R$ یک تابعک خطی کراندارباشد آنگاه :

$$\exists \quad F \epsilon X^* \ \text{s.t} \qquad F_{|_M} = f \ ;$$
$$\|F\| = \|f\| \ .$$

قضیه نقطه ثابت مارکوف

قضیه ۱.۱.۱۱. [نقطه ثابت مارکوف][۲] فرض کنید K زیر مجموعه ای ناتهی ،فشرده، آبلی ومحدب از یک فضای محدب موضعی باشد و F خانواده ای از نگاشت های آفین پیوسته از kبه توی خودش باشد آنگاه عنصر $x \epsilon K$ هست که $\quad T(x) = x$

اثبات :رجوع کنیدبه[۲۴]

قضیه آلا قلو

قضیه ۱.۱.۱۲. [آلاقلو][۳]**ا**گر X فضای نرم دار باشد آنگاه گوی یکه بسته در X^* ، w^*- فشرده است.

اثبات :رجوع کنیدبه[۲۴]

قضیه ۱.۱.۱۳. فرض کنید X یک فضای موضعا محدب باشد و $A \subseteq X$ دراین صورت $\overline{A}^{\mathrm{w}} = \overline{\mathrm{A}}$

اثبات :رجوع کنیدبه [۱]

---

۲ *Markov–Kakutani fixed point*

۳ $Alaoglus$

۲.۱ پیشنیازهای از آنالیز هارمونیک

تعریف ۱.۲.۱. یک فضای برداری مانندA روی میدان F با عمل دوتایی زیررا یک جبر می نامیم

$$\cdot : A \times A \to A$$

$$(a, b) \to a.\mathrm{b}$$

هرگاه عمل دوتایی فوق شرکت پذیر باشد یعنی

$$a(bc) = (ab)c \quad \forall \ a, b, c$$

تعریف ۲.۲.۱. گیریم A یک جبر باشد عمل $* : A \to A$ را با ضابطه ی $*(a) = a^*$ یک عمل برگشتی بر جبر Aگوییم هرگاه دارای خواص زیر باشد:

$$(a+b)^* = a^* + \mathrm{b}^* \qquad (a, b \epsilon A)$$

$$(ab)^* = \mathrm{b}^* a^* \qquad (a, b \epsilon A)$$

$$(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^* \qquad (\lambda \epsilon F)$$

تعریف ۳.۲.۱. یک *- جبر یک جبر با عمل برگشتی روی آن می باشد.

تعریف ۴.۲.۱. جبر A همراه با نرم تعریف شده روی آن جبر نرم دار گوییم هرگاه نرم دارای خاصیت زیرباشد

$$\exists \ k > o \qquad s.t. \qquad \|ab\| \leq k\|a\|\|b\| \qquad (a, b \ \varepsilon A)$$

واگر A *- جبرنرم دار کامل باشد آنرا *- جبرباناخ گوییم.

تعریف ۵.۲.۱. جبر A را یکدار گوییم هرگاه :

$$\exists \ e \epsilon A \qquad s.t \qquad e.a = a.e = a \qquad (a \epsilon A)$$

عنصر e را یکه A گوییم.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد A را C^*- جبر گوییم هرگاه:

$$\|aa^*\| = \|a\|^۲ \qquad (a \epsilon A)$$

مثال ۷.۲.۱. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $B(H)$ فضای همه ی عملگرهای کراندار از H به Hباشد $B(H)$ همراه با عمل الحاقی

$$o: B(H) \times B(H) \to B(H)$$

$$(T,S) \to \mathrm{T}\boldsymbol{o}S \quad ;$$

$$T\boldsymbol{o}S(u) = T\big(S(u)\big) \qquad (u\epsilon H \quad , T,S \, \epsilon B(H) \quad)$$

ونرم

$$\|\mathrm{T}\| = sup\{ \ \langle T,u\rangle \ | \ \ \|u\| \leq ۱ \ \}$$

یک C^*- جبر است . برای بررسی این موضوع فرض کنید $T\epsilon B(H)$ و T^*مزدوج T باشد ادعا داریم $\|TT^*\| = \|T\|^۲$ابتدا توجه داریم که

$$\|TT^*\| \leq \|T\|\|\mathrm{T}^*\| = \|T\|^۲ \qquad (\mathrm{I})$$

حال برای هر بردار واحد $u\epsilon H$ داریم

$$\|TT^*\| \leq \langle TT^*(u), u\rangle$$

$$= \langle \mathrm{T(u)}, \mathrm{T(u)}\rangle$$

$$= \|T(u)\|^۲$$

چون رابطه ی فوق برای هر بردار واحد $u\epsilon H$ برقرار است بنابراین با گرفتن سوپریمم روی هر بردار واحد $u\epsilon H$ داریم

$$\|TT^*\| \leq sup\{\|\mathrm{T(u)}\|^۲ \ | \ \ \|u\| = ۱\}$$

$$= \|T\|^۲ \qquad (II)$$

بنا به روابط I, II داریم

$$\|TT^*\| = \|T\|^۲$$

مدول ها

تعریف ۱.۲.۸. فرض کنیم B یک جبر باناخ باشد فضای باناخ E را B- مدول چپ گوییم هرگاه :

$$(ab)x = b(ax) \qquad (x \epsilon E \quad , \qquad a, b \epsilon B)$$

$$\exists k > \cdot \quad s.t \quad \|a.x\| \leq k\|a\|\|x\|$$

و به همین ترتیب B– مدول راست قابل تعریف است .

تعریف ۱.۲.۹. اگر E هم B– مدول راست وهم B- مدول چپ باشد Eرا B- دو مدول یا B- مدول گوییم.

.نکته ۱.۲.۱۰. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد وفضای باناخ X یک A- مدول باشد در این صورت X^* با ضرب زیر یک A- مدول است

$$.: A \times X^* \to X^*$$

$$(a, f) \to a.f$$

$$\langle a.f, x\rangle = \langle f, x.a\rangle \quad (x \epsilon X\ )$$

چون X یک A- مدول است پس $x.a \epsilon X$ بنابراین ضرب فوق خوش تعریف است.

تعریف ۱.۲.۱۱. فرض کنیدA یک فضای برداری نرم دار باشد فضای همه ی تابعک های خطی کراندار رویA را فضای دوگان می نامیم وبا A^* نمایش می دهیم .

قرارداد ۱.۲.۱۲. در سراسر این پایانامه مقدارm در f یعنی $m(f)$ را با $\langle m, f\rangle$ نشان می دهیم .

نکته ۱.۲.۱۳. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و A^{**} فضای دوگان دوم A باشد با تعریف ضرب و نرم زیر A^{**} یک جبر باناخ است

$$A^{**} \times A^{**} \to A^{**}$$

$$(m, n) \to mn$$

$$\langle mn, f\rangle = \langle m, n.f\rangle \qquad (f \epsilon A^*\ )$$

$$\langle n.f, a\rangle = \langle n, f.a\rangle \qquad (\ a \epsilon A)$$

ونرم

$$\|m\| = sup\{ \ \|\langle m, f\rangle\| \quad | \quad \|f\| \leq ۱ \qquad \forall\, f \epsilon A^* \ \}$$

نکته ۱۴.۲.۱. فرض کنید $\hat{A} = \{\, \hat{a} \mid a \epsilon A \,\}$ تعریف می کنیم

$$\theta: A \to \hat{A}$$

$$a \to \hat{a}$$

$$\hat{a}\,(f) = f(\,a) \qquad (\,f \epsilon A^*\,)$$

توجه داریم نگاشت فوق دوسویی است پس $A \approx \hat{A} \subseteq A^{**}$ بنابرین A زیر جبری از A^{**} است.

حال فرض کنید $\varphi \epsilon \Delta(A)$ دراین صورت بنا به قضیه ی هان باناخ میتوان $\varphi^{**} \epsilon \Delta(A^{**})$ را بعنوان توسیعی از φ در نظر گرفت پس $\varphi^{**}{}_{|_A} = \varphi$.

قضیه ۱۵.۲.۱. اگر W زیر فضای پایای بسته از M^* باشد آنگاه :

$$W = (W \cap M_*) \oplus (W \cap M_*^{\perp})$$

قضیه ۱۶.۲.۱. فرض کنید $\{\varphi_k\}$ دنباله ی ازنگاشتها در M^* همگرا به $\varphi \epsilon M^*$ نسبت به W^* - توپولوژی باشدآنگاه قسمت منفرد[۴] $\{\varphi_k^{s}\}$ وقسمت نرمال[۵] $\{\varphi_k^{n}\}$ از $\{\varphi_k\}$ به ترتیب همگراه به قسمت منفرد φ^{s} وقسمت نرمال φ^{n} از φ نسبت به W^*- توپولوژی می باشد.

---

[۴] $singular - part$
[۵] $normal - part$

فصل ۲

تعاریف و مفاهیم اولیه

میانگین پذیری مشخصه ای

۱.۲ تعاریفی از میانگین پذیری مشخصه ای

مشخصه

تعریف **۱.۱.۲.** فرض کنیم Aیک جبر باناخ باشد نگاشت$\varphi: A \to \mathrm{C}$ رامشخصه گوییم هرگاه :

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad (a, b\epsilon A)$$

تعریف **۲.۱.۲.** فرض کنید A یک جبر باناخ باشد، فضای مشخصه A را با$\Delta(A)$ نمایش داده وبه صورت زیر تعریف میکنیم :

$$\Delta(A) = \left\{ f : \quad \text{همریختی غیر صفر باشد} \quad f \right\}.$$

میانگین پذیری مشخصه ای چپ، میانگین پذیری مشخصه ای راست

تعریف **۳.۱.۲.** فرض کنیم Aیک جبر باناخ وφ یک مشخصه بر آن باشد گوییم A ، φ - میانگین پذیر چپ است هرگاه :

$$\exists m\epsilon A^{**} \quad \mathrm{s.t} \quad \langle m, \varphi \rangle = ۱\,;$$

$$\langle m, f.a \rangle = \varphi(a)\langle m, f \rangle \quad (a\epsilon A \;\; f\epsilon A^*)$$

درعبات فوقm رایک φ –میانگین حپ گوییم.وبه همین ترتیب گوییم A ، φ - میانگین پذیرراست است هرگاه:

$$\exists m\epsilon A^{**} \quad s.t \quad \langle m, \varphi \rangle = ۱\,;$$

$$\langle m, a.f \rangle = \varphi(a)\langle m, f \rangle \quad (a\epsilon A \;\; f\epsilon A^*)$$

درعبات فوقm رایک φ – میانگین راست گوییم.

میانگین پذیری مشخصه ای دوطرفه

تعریف **۴.۱.۲.** $m\epsilon A^{**}$ را $\varphi-$ میانگین دوطرفه گوییم هرگاه m، $\varphi-$میانگین راست وچپ باشدیعنی

$$\exists m\epsilon A^{**} \quad s.t \quad \langle m,\varphi\rangle = ۱$$

$$\langle m,a.f\rangle = \varphi(a)\langle m,f\rangle \quad (a\epsilon A \ \ f\epsilon A^{*})$$

$$\langle m,f.a\rangle = \varphi(a)\langle m,f\rangle \quad (a\epsilon A \ \ f\epsilon A^{*})$$

تعریف **۵.۱.۲.** گیریم $\varphi\epsilon\Delta(A)$، عنصر $a\epsilon A$ را φ- ماکسیمال[۶] گوییم هر گاه:

$$\|a\| = \varphi(a) = ۱.$$

۲.۲ مشتق در میانگین پذیری مشخصه ای

مشتق

تعریف **۱.۲.۲.** اگر Eیک $B-$ مدول باشد نگاشت خطی وکراندار

$$D: B \to E$$

$$a \to D(a)$$

$$D(ab) = D(a)b + a.D(b)\ .$$

یک نگاشت مشتق نامیده می شود

تعریف **۲.۲.۲.**فرض کنیم B یک جبر باناخ و E-یک $B-$ مدول باشد نگاشت

$$ad_x: B \to E$$

$$a \to a.x - x.a$$

یک نگاشت مشتق است این نوع مشتقات را مشتقات درونی گوییم.

---

۶ $\varphi - maximal$

تعریف **۳.۲.۲.** فرض کنیم B یک جبر باناخ و E یک $B-$مدول باشد اگر $Z^{1}(B,E)$ مجموعه ی مشتقات و $\beta^{1}(\mathrm{B,E})$ مجموعه ی مشتقات درونی باشد آنگاه $H^{1}(B,E)=\frac{Z^{1}(B,E)}{\beta^{1}(\mathrm{B,E})}$ را اولین گروه کوهمولوژی از B با ضرایب در E نامیم.

۳.۲ قضایایی در میانگین پذیری مشخصه ای

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ و $\varphi\epsilon\Delta(A)$ اگر A، φ- میانگین پذیرباشد وفضای باناخ X یک A-مدول نسبت به ضرب مدولی $a.x=\varphi(a)x$ باشد آنگاه :

$$H^{1}(\mathrm{A,X^*})=\{0\}$$

اثبات : رجوع کنیدبه قضیه ۱.۱ از [۱۱]

قضیه **۲.۳.۲.** فرض کنیم A یک جبر باناخ و $\varphi\epsilon\Delta(A)$ آنگاه A , φ- میانگین پذیر است اگر و فقط اگر تور $\{U_\alpha\}_{\alpha\epsilon I}$ در A چنان باشد که:

$$\|aU_\alpha-\varphi(a)U_\alpha\|\to 0 \qquad \forall\, a\,\epsilon A \quad , \qquad \varphi(U_\alpha)=1$$

اثبات : رجوع کنیدبه قضیه ۱.۴ از [۱۱]

قضیه **۳.۳.۲.** فرض کنیم A یک جبر باناخ جابجایی و $\varphi\epsilon\Delta(A)$ باشدو A مشتقات نقطه ی کراندار از φ داشته باشد بطوری که :

$$\exists\ d\in A^* \quad d(ab)=d(a)\varphi(b)+\varphi(a)d(b) \qquad \forall a,b\epsilon A$$

آنگاه A،φ- میانگین پذیر نیست.

اثبات : رجوع کنیدبه قضیه ۲.۴ از [۱۱]

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنید $\{\varphi_n\}$ دنباله ای از نرمال شده ها ی یک جبرفون نیومن G باشدبطوری که $\lim_n\|\varphi-\varphi_n\|=2$ که φ نرمال شده دلخواه است. آنگاه اعداد صحیح مثبت $n_1,n_2,n_3,\ldots$ که $n_1<n_2<n_3<\cdots$ و نرمال شده های $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\ldots$ موجودند بطوری که :

- $\left\|\varphi_{n_j}-\psi_j\right\|\le 1/2^{\,\mathrm{j}-1} \qquad \mathrm{j}=1,2,3,\ldots$

- $S(\psi_j)S(\psi_k) = o \qquad if \quad j \neq k$

اثبات :رجوع کنیدبه قضیه۲.۴ از[۳]

قضیه کاپلانسکی

قضیه۲.۳.۵. [کاپلانسکی][۷] فرض کنیم A یک *- جبر از عملگرها روی فضای هیلبرت B باشد آنگاه :

$$ball\overline{A}^{strongly\ *} = ball\overline{A}^{w}$$

اثبات : رجوع کنیدبه قضیه۴۸ از[۲۰]

قضیه چک پاسپیسیل

قضیه۲.۳.۶.[چک پاسپیسیل] [۸] فرض کنید X یک فضای فشرده و $p \epsilon X$ باشد،اگر $\beta(P,X) \geq \mathrm{k}$ آنگاه $۲^{\mathrm{k}} \geq |X|$ که در آن $\beta(P,X) = \min\{|\mathrm{V}| \ : \ $پایه موضعی است$|\mathrm{V}|\}$.

اثبات :رجوع کنیدبه قضیه۱۹.۷ از[۱۲]

---

۷ $Kaplansky\ density\ theorem$

۸ $Cech\text{-}posipisl$

فصل ۳

میانگین پذیری مشخصه ای

دراین فصل به بررسی قضایا اصلی مرتبط با مفهوم میانگین پذیری مشخصه ای می پردازیم در واقع ما در این بررسی شرایطی معادل، برای میانگین پذیری مشخصه ای بودن یک جبر باناخ رابدست می آوریم .همچنین به مطالعه شرایطی که یک جبر باناخ دارای میانگین مشخصه ای باشد را بررسی ومطالعه می کنیم. در ادامه به بررسی میانگین‌های مشخصه ای با نرم یک واینکه یک جبر باناخ چه تعداد میانگین مشخصه ای می تواند داشته باشد می پردازیم و در پایان مثال‌های در ارتباط با مفهوم میانگین پذیری مشخصه ای ارائه می‌دهیم .

۱.۳ میانگین مشخصه ای

قضیه ۱.۱.۳. فرض کنیم A یک جبر باناخ و$\varphi\epsilon\Delta(A)$ ،آنگاه شرایط زیر معادلند:

الف)جبر باناخ A ، φ - میانگین پذیراست

ب) اگرفضای باناخ X یک A- مدول نسبت به ضرب

$$a.x=\varphi(a)x \qquad \forall\, x\epsilon X, a\epsilon A$$

باشد آنگاه: $H^{۱}(\mathrm{A},\mathrm{X}^*)=\{۰\}$

ج) فرض کنید $(kerl\varphi)^{**}$ ، A^{**}- مدول ساخته شده نسبت به عمل

$$am=\varphi(a)m \quad \forall m\epsilon A^{**}$$

آنگاه هر مشتق پیوسته $D: A\to(kerl\varphi)^{**}$یک نگاشت درونی است

اثبات: الف ← ب) فرض کنیم $m\epsilon A^{**}$ یک φ- میانگین روی A^* و X^* یک A- مدول ونگاشت

$D: A\to X^*$ یک مشتق پیوسته باشد .آنگاه D' بعنوان دوگان عملگر D با تحدید بر X درنظر می گیریم

$$D^*: X^{**}\to A^*$$

$$D'=D^*{}_{|X}$$

حال تعریف می کنیم

$$g:=\left(D'\right)^*: A^{**}\to X^*$$

$$g = \left(D'\right)^{*}(m) \qquad (m \epsilon A^{**})$$

چون A ، φ - میانگین پذیر است لذا :

$$\langle b, D'(a.x)\rangle = \langle a.x, D(b)\rangle$$
$$= \varphi(a)\langle x, D(b)\rangle$$
$$= \varphi(a)\,\langle b, D'(x)\rangle \;\; (a, b\epsilon A, \quad x\epsilon X)$$

پس :

$$D'(a.\mathrm{x}) = \varphi(a)D'(x)$$

با توجه به تعریف g واینکه X^* یک $A-$مدول است داریم

$$\langle x, g.a\rangle = \langle a.x, g\rangle$$
$$= \langle a.x, \left(D'\right)^{*}(m)\rangle$$
$$= \langle D'(a.x), m\rangle$$
$$= \varphi(a)\langle x, g\rangle$$

بنابراین:

$$\langle x, g.a\rangle = \varphi(a)\langle x, g\rangle$$

ویا به عبارتی:

$$g.a = \varphi(a)g \quad (a\epsilon A)$$

و ازاینکه D یک نگاشت مشتق است داریم

$$\langle b, D'(x.a)\rangle = \langle x.a, D(b)\rangle$$
$$= \langle x, a.D(b)\rangle$$
$$= \langle x, D(ab)\rangle - \langle x, D(a)b\rangle$$
$$= \langle ab, D'(x)\rangle - \langle b.x, D(a)\rangle$$

$$= \langle b, D'(x).a\rangle - \varphi(b)\langle x, D(a)\rangle \quad (a, b\epsilon A \ \ , x\epsilon X)$$

بنابراین:

$$D'(x.a) = D'(x).a - \langle x, D(a)\rangle\varphi \qquad (x\epsilon X \ , a\epsilon A)$$

همچنین:

$$\langle x, a.g\rangle = \langle x.a, g\rangle$$

$$= \langle D'(x.a), m\rangle$$

$$= \langle D'(x).a, m\rangle - \langle x, D(a)\rangle\langle\varphi, m\rangle$$

$$= \varphi(a)\,\langle m, D'(x)\rangle - \langle x, D(a)\rangle$$

$$= \varphi(a)\,\langle \left(D'\right)^{*}(m), x\rangle - \langle x, D(a)\rangle$$

بنابراین داریم

$$D(a) = \varphi(a)g - a.g$$

پس:

$$D(a) = a.(-g) - (-g).a = D_{-g}(a) \quad (a\epsilon A)$$

پس نگاشت D یک مشتق درونی است وچون Dدلخواه است بنابرین:

$$H^{۱}(\mathrm{A}, \mathrm{X}^{*}) = \{۰\}$$

ب ← ج) اگر قرار دهیم $\mathrm{X} = (kerl\varphi)^{*}$ در این صورت $\mathrm{X}^{*} = (kerl\varphi)^{**}$ یک A- مدول است وبنا به قسمت دوم داریم

$$H^{۱}(\mathrm{A}, (kerl\varphi)^{**}) = H^{۱}(\mathrm{A}, \mathrm{X}^{*})$$

$$= \{۰\}$$

پس نگاشت $D: A \to (kerl\varphi)^{**}$ یک مشتق درونی است

ج ← الف) فرض کنیم $b\epsilon A$ طوری باشد که $\varphi(b) = ۱$ ، بنا به قضیه ی هان باناخ φ^{**} توسیعی از φ

است در این صورت نگاشت

$$D.b: A \to (kerl\varphi)^{**}$$

$$D.b(a): ab - ba \quad (a\epsilon A)$$

یک مشتق پیوسته از A به $(kerl\varphi)^{**}$ معین می کند.

$$D.b(a)c = acb - bca + abc - abc$$
$$= a(cb - bc) + (ab - ba)c$$
$$= aD.c - D.a.c$$

از طرفی داریم

$$\varphi^{**}(ab - ba) = \varphi(ab - ba)$$
$$= \varphi(a)\varphi(b) - \varphi(b)\varphi(a)$$
$$= ۰$$

بنابراین:

$$ab - ba \,\epsilon\, kerl\varphi^{**}$$

اما $ab - ba$ عنصری در A است لذا از اینکه φ^{**} توسیعی از φ روی A می باشد پس

$$\varphi(ab - ba) = ۰$$

بنا براین $ab - ba\ \epsilon kerl\varphi$ حال قرار دهید $kerl\varphi = X$ بنابراین چون $X \subseteq X^{**}$ پس

$$ab - ba\ \epsilon X^{**} = (kerl\varphi)^{**}$$

و توجه داریم که $(kerl\varphi)^{**}$ یک $A-$مدول است پس بنا برقسمت سوم $D.b$ یک نگاشت درونی است پس $m\epsilon(kerl\varphi)^{**}$ وجود دارد که

$$D.m(a) = a\,(-m) - (-m)a \qquad (a\epsilon A)$$

ازطرفی $D.b(a): ab - ba \ \ (a\epsilon A)$ پس داریم

$$ab - ba \ = \ a(-m) — ma$$

لذا:

$$ab - a(-m) = -(-m)a + ba$$

$$ab + am = ma + ba$$

$$a(b + m) = (b + m)a$$

همچنین

$$\langle b + m, \varphi \rangle = \langle b, \varphi \rangle + \langle m, \varphi \rangle$$

$$= \varphi(b)$$

$$= ۱$$

پس:

$$a(b + m) = (b + m).a$$
$$= \varphi(a)(b + m)$$

پس $b + m$ یک φ - میانگین برای A است و این ۱را ثابت میکند.

قضیه ۲.۱.۳. فرض کنیم A یک جبر باناخ و $\varphi \epsilon \Delta(A)$ آنگاه گزاره های زیر معادلند:

الف)جبرباناخ A ، φ - میانگین پذیراست.

ب) فرض کنید فضای باناخ X یک A- مدول وفضای باناخ Y زیرمدولی از X باشد.گیریم $g \epsilon Y^*$ آنگاه با ضرب

$$a.g = \varphi(a)g \qquad (a \epsilon A)$$

g را می توان به تابعی مانند $f \epsilon X^*$ به گونه ای توسیع دادکه :

$$a.f = \varphi(a)f \qquad (a \epsilon A)$$

اثبات : فرض کنیم $\hat{g} \epsilon X^*$ طوری باشد که $\hat{g}$ توسیع g و $\|\hat{g}\| = \|g\|$ (بنا به قضیه هان باناخ چنین توسیعی وجود دارد) فرض کنید $a \epsilon A$ با شرط $\varphi(a)$= ۱ باشد آنگاه $a.\hat{g}$ نیز توسیع g است چرا که

$$a.\hat{g} = \varphi(a)g = g$$

وچون A ، φ – میانگین پذیراست بنابرین طبق قضیه **۲.۳.۲.** تور $\{U_\alpha\} \subseteq A$ وجود دارد بطوری که :

$$\|aU_\alpha - \varphi(a)U_\alpha\| \to o \qquad (\, a \in A \quad , \ \varphi(U_\alpha) = ۱\,)$$

$$\exists c > o \quad \|U_\alpha\| < c \quad .$$

ازطرفی $U_\alpha.\hat{g} = \varphi(U_\alpha)g = g$ پس $U_\alpha.\hat{g}$ ، g را توسیع می دهد همچنین داریم

$$\|U_\alpha.\hat{g}\| \le \|g\|\|U_\alpha\|$$
$$\le c\|g\| + ۱$$

حال فرض کنید $f \epsilon X^*$ حد دنباله ی $\{U_\alpha.\hat{g}\} \subseteq X^*$ در wk^*– توپولوژی باشد.بنابراین بنا به توضیحات فوق fتوسیع g وجود دارد .لذا

$$a.f = wk^* \lim_\alpha a.(U_\alpha.\hat{g})$$
$$= \lim_\alpha (a.U_\alpha)\ \hat{g}$$
$$= \lim_\alpha [(aU_\alpha - \varphi(a)U_\alpha)\hat{g} + \varphi(a)U_\alpha\hat{g}]$$
$$= \varphi(a).f$$

بنابراین:

$$a.f = \varphi(a)f$$

واین قسمت دوم را ثابت میکند .

ب ← الف)قرار دهید $X = A^*$ و$Y = c\varphi$. فرض کنید $g \epsilon Y^*$ طوری باشد که $\langle \varphi, g \rangle = ۱$.توجه داریم که $Y = c\varphi \subseteq A^* = X$ وبنابر فرضیات(ب) عمل ضرب A روی g به صورت زیر تعریف می شود

$$a.g = \varphi(a)g$$

همچنین:

$$\exists\ m \epsilon X^* = (A^*)^* = A^{**}$$