۳۷۲۶ وصالیان

۵ جلد دارد

آزی محمد فیروزه‌ای

۲ اذر ۵۶

# بسم‌ا... الرحمن الرحیم

۳۵۰۱۱

# دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض (گروههای متناهی)

# گروه‌های آبلی مینیمال که نتوانند به عنوان گروه اتومورفیسم گروه‌ها قرار گیرند

رامین وصالیان

استاد راهنما:

دکتر علی ایرانمنش



زمستان ۱۳۷۹

# تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای رامین وصالیان

تحت عنوان: **رابطهٔ بین P -گروهها و گروه اتومورفیسمها**

را از نظر فرم و محتوی بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد مورد تائید قرار دادند.

| اعضای هیأت داوران | نام و نام خانوادگی | رتبهٔ علمی | امضاء |
|---|---|---|---|
| ۱- استاد راهنما | آقای دکتر علی ایرانمنش | استادیار | |
| ۲- استاد ناظر | آقای دکتر سید احمد موسوی | استادیار | |
| ۳- استاد ناظر | سرکارخانم دکتر اشرف دانشخواه | استادیار | |
| ۴- نماینده تحصیلات تکمیلی | آقای دکتر سید محمد باقری | استادیار | |

بسمه تعالی

# آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس، مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

**مادّهٔ ۱** در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

**مادّهٔ ۲** در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

***«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ ... است که در سال ... در دانشکدهٔ ... دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر ... ، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر ... و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر ... از آن دفاع شده است.»***

**مادّهٔ ۳** به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

**مادّهٔ ۴** در صورت عدم رعایت مادّهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرّس، تأدیه کند.

**مادّهٔ ۵** دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادّهٔ ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

**مادّهٔ ۶** اینجانب ... دانشجوی رشته ... مقطع ... تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام‌خانوادگی:

تاریخ و امضا:

# چکیده

یک دستهٔ مهّم ازگروه‌های متناهی، $p$− گروه‌ها می‌باشند. در سال ۱۹۷۵ دو نفر به نام‌های جُنا و کانویسر $p$− گروهی از مرتبهٔ $p^8$ ساختند که گروه اتومورفیسم‌های آن یک $p$− گروه آبلی از مرتبهٔ $p^{16}$ بود. در سال ۱۹۸۳ آقای مک هال نشان داد که اگر یک $p$− گروه آبلی بخواهد گروه اتومورفیسم یک گروه متناهی باشد، باید حتماً از مرتبهٔ بزرگتر از $p^8$ باشد. در این مقاله قصد داریم تمام $p$− گروه‌های آبلی از مرتبهٔ مینیمال را مشخص کنیم که بتواند به عنوان گروه اتومورفیسم‌های یک گروه متناهی قرار گیرند و همچنین تمام گروه‌هایی را مشخص کنیم که گروه اتومورفیسم‌های آنها یک $p$− گروه آبلی از مرتبهٔ مینیمال باشد. به علاوه نتایجی را به دست خواهیم آورد که $p$− گروه‌های آبلی نتوانند به عنوان اتومورفیسم یک گروه متناهی قرار گیرند. همچنین ثابت خواهیم کرد که هیچ گروهی که گروه اتومورفیسم‌های آن یک گروه آبلی از مرتبه کوچکتر یا مساوی $p^{11}$ باشد، وجود ندارد.

مقالهٔ اصلی این پایان‌نامه مرجع [۲] می‌باشد.

۴۱۰٫۲۵۲ زن { Mfn = ۳۷
۰٫۲ ۳۵۰۱۱

# فهرست مطالب

# پیشگفتار

در سال ۱۹۷۵ دو نفر به نامهای جنا وکانویسر p-گروهی از مرتبه $p^8$ ساختندکه گروه اتومورفیسمهای آن یک p - گروه ابلی از مرتبه $p^{16}$بود.در سال ۱۹۸۳ آقای مک هال نشان داد که اگر یک p-گروه آبلی بخواهد گروه اتومورفیسم یک گروه متناهی باشد باید حتما از مرتبه بزرگتر از $p^8$ باشد. در این پایاننامه قصد داریم تمام p-گروههای ابلی از مرتبه مینیمال را مشخص کنیم که بتوانند به عنوان گروه اتومورفیسمهای یک گروه متناهی قرار گیرد و همچنین تمام گروههایی رامشخص کنیم که گروه اتومورفیسمهای آنها یک p-گروه ابلی از مرتبه مینیمال باشد. به علاوه نتایجی را به دست خواهیم اورد کهp-گروههای آبلی نتوانندبه عنوان اتومورفیسم یک گروه متناهی قرار گیرند. همچنین ثابت خواهیم کرد که هیچ گروه ابلی که گروه اتومورفیسمهای آن از مرتبه کوچکتر یا مساوی $p^{11}$ باشد وجود ندارد.

# مقدمه

گروه اتومورفیسم‌های یک گروه متناهی، برای آن گروه اهمیت به سزایی دارد. در سال ۱۹۸۳ مک هال دربارهٔ گروه‌هایی که می‌توانند به عنوان اتوموفیسم یک گروه متناهی قرارگیرند مطالعه و تحقیقاتی انجام داد. در موضوع مطالعهٔ وی نکات امیدوارکننده و مهمّی برای رده‌بندی کاملی از گروه‌های آبلی که می‌توانند به عنوان گروه اتومورفیسم‌های یک گروه متناهی قرارگیرند، وجود دارد. مک هال نشان داد که $p-$ گروه‌های آبلی اگر بخواهند گروه اتومورفیسم‌های یک گروه آبلی باشند باید دارای مرتبهٔ بزرگتر یا مساوی $p^{8}$ باشند. به موازات چنین تحقیقاتی جُنا وکانویسر یک گروه با گروه اتومورفیسم آبلی از مرتبهٔ $p^{16}$ ساختند. در این پایان‌نامه نیز به بررسی مطالبی در این باب می‌پردازیم وکوچکترین گروه‌هایی را که دارای چنین خواصّی باشند، مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. از این رو در سه فصل به بررسی این پایان‌نامه می‌پردازیم.

در فصل اوّل به بررسی مباحثی می‌پردازیم که در پیش برد نتایج و اهداف این پایان‌نامه نقش

اساسی و کلیدی ایفاء می‌کنند و به دلیل این که برخی از آنان یادآور مباحثی از جبر مقدماتی است لذا از اثبات و توضیح آنها پرهیز می‌نمائیم چون بنا و اساس کار برحسب $p-$ گروه‌ها است بدین لحاظ بخش (۱) از فصل اوّل را به بررسی خواص $p-$ گروه‌ها و نتایجی از آن، اختصاص داده‌ایم. در بخش (۲) و (۳) به ترتیب مباحث اتومورفیسم گروه‌ها و حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌ها را در حّد یادآوری این مباحث از جبر مقدماتی مورد بررسی قرار داده‌ایم. در بخش (۴) به بررسی رتبهٔ گروه‌های متناهی می‌پردازیم. در بخش (۵) مفهوم توسیع گروه‌ها را در حّد تعریف توسیع گروه بیان کرده‌ایم و در بخش (۶) به بررسی مبحث گروه‌های پوچ توان و رده پوچی گروه می‌پردازیم و نهایتاً در بخش (۷) به بررسی خواص $p-$ گروه‌های منظم و نتایجی در باب آنها می‌پردازیم. در این فصل از مرجعه [۵] استفاده شده است. در فصل دوّم به بررسی گروه‌هایی که دارای گروه اتومورفیسم ناآبلی‌اند، می‌پردازیم در بخش (۱) $PN-$ گروه‌ها را مورد مطالعه قرار داده‌ایم در بخش (۲) $G(n)$ گروه‌ها را مورد بحث قرار داده‌ایم در این فصل از مراجع [۱] و [۲] و [۳] و [۴] و [۶] و [۷] و [۹] و [۱۱] و [۱۲] و [۱۳] و [۱۴] و [۱۵] و [۱۶] استفاده شده است. در بخش (۱) از فصل (۳) بحث را با بیان چند لم و گزاره آغاز کرده و نهایتاً در بخش (۲) قضیهٔ اساس این پایان‌نامه را بیان و اثبات می‌کنیم. و در این فصل نیز از مراجع [۸] و [۱۰] و [۱۵] و [۱۷] استفاده شده است.

# فصل اول

# مقدماتی از نظریه گروه‌ها

## ۱ـ مقدماتی از نظریهٔ گروه‌ها

نظریهٔ گروه‌ها همچنان به عنوان یک موضوع جالب و قابل توجّه موردنظر است. این مطلب را تعداد رو به افزایش مقالات تحقیقاتی که هر ساله در این زمینه انتشار می‌یابد، به خوبی روشن می‌کند. نظریهٔ گروه‌ها بخش مهمی از ریاضیات است که دانشجویان دورهٔ کارشناسی و کارشناسی ارشد با آن مواجه می‌شوند و نیز ابزاری مفید برای فیزیک‌دانان و زیست‌شناسان و شیمی‌دانان است.

یکی از خصوصیات شگفت‌آور ریاضیات قرن بیستم، دست یافتن آن به قدرت روش‌های مجّرد بوده است. این شناخت سبب به وجود آمدن مقدار زیادی نتایج و مسائل جدید شده و در واقع ما را

هدایت کرده است تا به تمام مباحث جدید ریاضیات که به وجود حتمی آنها حتّی گمان نرفته بود، دست یابیم.

به دنبال این پیشرفت‌ها بود که نه تنها ریاضیات نوین به وجود آمد، بلکه طرز تفکّر تازه ایجاد شد، و همراه آن برهانهای جدید ساده‌ای برای نتایج تاریخی مشکل به دست آمدند. اغلب تجزیهٔ یک مسئله به رکنهای اساسی آن برای ما محدودهٔ واقعی نتایجی را که در تمام مجموعهٔ چیزها مجزّا و مخصوص در نظر گرفته شده‌اند آشکار ساخته است و به ما رابطه‌های متقابل بین مباحثی را نشان داده که قبلاً نامربوط متصّور می‌شدند.

جبر و به خصوص نظریهٔ گروه‌ها که حاصلی است از این کار، تنها مبحث علمی با حیات و نیروی مستقل نیست، این مبحث یکی از قسمت‌های مهّم تحقیقی رایج در ریاضیات یعنی هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز، توپولوژی و حتی ریاضیات کار بسته را به هم می‌بافد.

به هر تقدیر، ما نظر خود را به معرفی و توضیح چند مبحث مهم در نظریهٔ گروه‌ها یعنی $p-$ گروه‌ها، حاصل ضرب مستقیم گروه‌ها و خودریختی گروه‌ها، رتبهٔ گروه، توسیع گروه، گروه‌های پوچ توان و ردهٔ پوچی گروه و نهایتاً $p-$ گروه‌های منظم معطوف می‌کنیم. بدین جهت هدف این فصل بحث در این مطالب و به دست آوردن نتایجی در باب آنها است تا بتوان بعداً در این مجموعه، هر کجا که لازم شد، به آنها استناد کرد.

## ۱ـ۱ $p-$ گروه‌ها

**تعریف $p-$ گروه:** فرض کنید $p$ عددی اوّل باشد، در این صورت یک گروه $G$، $p-$ گروه است هرگاه مرتبهٔ هر عضو آن توانی از $p$ باشد.

**تعریف $p-$ زیر گروه:** فرض کنید $G$ یک گروه باشد و $H \leqslant G$، آنگاه $H$ یک $p-$ زیر گروه است،

هرگاه $H$ یک $p-$ گروه باشد.

**(۱-۱-۱) قضیه:** گروه متناهی $A$، یک $p-$ گروه است اگر و تنها اگر مرتبهٔ آن توانی از $p$ باشد.

**(۱-۱-۲) قضیه:** فرض کنید $A$ یک گروه آبلی متناهی باشد. در این صورت مجموعهٔ تمام عناصری از $A$ که مرتبهٔ آنها توانی از یک عدد اوّل ثابت $p$ است، یک $p-$ زیرگروه از $A$ می‌باشد.

**(۱-۱-۳) مثال:** اگر $G$ یک گروه متناهی باشد و $p$ یک عدد اوّل باشد، $< x \in G | x^{p^n} = 1 >$ یک $p-$ گروه است که آن را با $\Omega_n(G)$ نمایش می‌دهیم.

**(۱-۱-۴) مثال:** اگر $G$ یک گروه متناهی و $p$ عدد اوّلی باشد، $< x^{p^n} | x \in G >$ یک $p-$ گروه است که آن را با $\mho_n(G)$ نمایش می‌دهیم.

## ۱ـ۲ اتومورفیسم گروه

**تعریف:** منظور از یک خودریختی گروه $G$ یعنی یک یکریختی از $G$ که به روی خودش تعریف شده است.

**(۱-۲-۱) لم:** هرگاه $G$ یک گروه باشد، آنگاه مجموعهٔ همهٔ خودریختی‌های $G$ ، با عمل ترکیب نگاشت‌ها تشکیل گروه می‌دهد که آن را با $Aut(G)$ یا $(A(G))$ نمایش می‌دهیم.

**(۱-۲-۲) مثال:** فرض کنیم $G$ یک گروه باشد. به ازای $g \in G$، $T_g : G \to G$ را چنین تعریف می‌کنیم که به ازای هر $x \in G$، $T_g(x) = g^{-1}xg$. به وضوح $T_g$ یک اتومورفیسم $G$ خواهد بود. برای هر $g \in G$، $T_g$ را یک اتومورفیسم داخلی $G$ نامیم.

**(۱-۲-۳) لم:** مجموعهٔ $\{T_g \in Aut(G) | g \in G\}$ با عمل ترکیب نگاشت‌ها تشکیل گروه می‌دهد، که آن را گروه اتومورفیسم‌های داخلی $G$ می‌نامیم و با $I_{nn}(G)$ نمایش می‌دهیم.

**(۱-۲-۴) لم:** $I_{nn}(G) \cong \frac{G}{Z}$ که در آن $Z$ مرکز $G$ می‌باشد.

**(۱-۲-۵) لم:** فرض کنیم $\varphi$ یکی از خودریختی‌های گروه $G$ باشد. هرگاه $a \in G$ از مرتبهٔ $|a| > 0$ باشد، آنگاه $|\varphi(a)| = |a|$.

**(۱-۲-۶) لم:** مجموعهٔ $\{\sigma \in Aut(G) | g^{-1}(\sigma(g)) \in Z(G), \forall g \in G\}$ با عمل ترکیب نگاشت‌ها تشکیل گروه می‌دهد، که آن را گروه اتومورفیسم‌های مرکزی $G$ می‌نامیم و با $A_c(G)$ نمایش می‌دهیم.

## ۱ـ۳ حاصل ضرب مستقیم گروه‌ها

**تعریف:** فرض کنید $G_1, G_2, \dots, G_k$ خانواده‌ای از گروه‌ها باشند. در این صورت مجموعه

$$G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k = \{(g_1, g_2, \dots, g_k) | g_i \in G_i\}$$

تحت عمل دوتایی

$$(g_1, g_2, \dots, g_k)(g'_1, g'_2, \dots, g'_k) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2, \dots, g_k g'_k)$$

یک گروه است که حاصل ضرب مستقیم گروه‌های $G_1, G_2, \dots, G_k$ نامیده می‌شود واضح است اگر هر $G_i$ متناهی باشد:

$$|G \times G_2 \times \dots \times G_k| = |G_1||G_2| \dots |G_k|$$

**تبصره:** اگر اعمال دوتایی در $G_1, G_2, \dots, G_k$ به طور جمعی نوشته شوند، آنگاه حاصل ضرب مستقیم بعضی اوقات مجموع مستقیم نامیده شده و با نماد $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_k$ نشان داده می‌شود.

**(۱-۳-۱) قضیه:** فرض کنید $H_1, \dots, H_k$ خانواده‌ای از زیرگروه‌های نرمال گروه $G$ باشند. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

i) $H_1 \times H_2 \times \dots \times H_k \cong H_1 H_2 \dots H_k$. با نگاشت متعارف $\sigma$

$$\sigma : (h_1, h_2, \dots . h_k) \to h_1 h_2 \dots h_k$$

ii) $H_i \cap H_1 H_2 \dots H_{i-1} H_{i+1} \dots H_k = 1$ به ازای هر $i$، $1 \leqslant i \leqslant k$

iii) هر $x \in H_1 H_2 \dots H_k$ دارای نمایش منحصر بفردی به صورت $x = h_1 h_2 \dots h_k$، $h_i \in H_i$ می‌باشد.

**تبصره:** در حالتی که $G = H_1 H_2 \dots H_k$ و $H_1 H_2 \dots H_k \cong H_1 \times H_2 \times \dots \times H_k$، $G$ حاصل ضرب مستقیم زیرگروه‌های $H_1, H_2, \dots, H_k$ نامیده می‌شود. این حقیقت با نماد زیر نوشته می‌شود.

$$G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_k$$

**(۱-۳-۲) قضیه:** اگر $H_1, H_2, \dots, H_k$ خانواده‌ای از زیرگروه‌های گروه $G$ باشند، آنگاه به طور متعارف

$$H_1 \times H_2 \times \dots \times H_k \cong H_1 H_2 \dots H_k$$

اگر و تنها اگر

i) $H_i \cap H_1 \dots H_{i-1} H_{i+1} \dots H_k = 1$ به ازای هر $i$، $1 \leqslant i \leqslant k$

ii) به ازای هر $h_i \in H_i, h_j \in H_j$، $i \neq j$، $h_i h_j = h_j h_i$

**(۱-۳-۳) قضیه:** هر $p$- گروه آبلی متناهی برابر است با حاصل ضرب مستقیمی از $p$- گروه‌های دوری.

**اثبات:** فرض کنیم که $G$ گروهی آبلی از مرتبهٔ $p^n$ باشد هدف یافتن عنصرهائی است چون $a_1$، ...، $a_k$ در $G$، با این خاصیت که هر عنصر مانند $x \in G$ را بتوان به طور منحصر به فرد به صورت $x = a_1^{d_1} a_2^{d_2} \dots a_k^{d_k}$ نوشت. توجّه داشته باشید که هرگاه این مطلب درست می‌بود، و $a_1, \dots, a_k$ از مرتبهٔ $p^{n_1}$، ...، $p^{n_k}$ می‌بودند، که در آنها $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \dots \geqslant n_k$، آنگاه به وضوح مرتبهٔ مَهین