دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر - گروه ریاضی محض

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در ریاضی محض

عنوان

تمامیت مرتب روی تکواره های جزئی مرتب

استاد راهنما

دکتر غلامرضا مقدسی

استاد مشاور

دکتر اعظم پورمیرزایی

نگارش

محمد رحیمی

زمستان ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

روان پاک مادرم و قلب مهربان پدرم و همسرم

و

به فرزندانم علی، امیرضا، ملیکا و سارا

قدردانی

سپاس و آفرین ایزد جهان آفرین راست. آن که هست کننده از نیستی، ارجمند گرداننده ای بندگان از خواری و هستی هرچه نام هستی دارد، به دست اوست.

شایسته است در آغاز کلام از استاد عزیزم جناب آقای دکتر غلامرضا مقدسی که در طول این دوره ی تحصیلی از تجربه های ارزشمندشان بهره مند شدم و راهنمای من در این پایان نامه بودند کمال تقدیر و تشکر را داشته باشم.

از سرکار خانم دکتر اعظم پورمیرزایی به جهت مشاوره در این پایان نامه و از دیگر اساتید گروه ریاضی محض اساتید محترم آقایان دکتر استاجی، دکتر عارفی جمال، دکتر صادقی و سرکار خانم دکتر شریفان که در طول این دوره مرا مرهون لطف خود قرار دادند و همچنین از استاد گرامی دکتر علی اکبر استاجی که زحمت داوری این پایان نامه را برعهده گرفتند کمال تشکر را دارم.

چکیده فارسی

رسته S-سیستم های مرتب جزئی$(S-Pos)$ تلفیقی از رسته S-سیستم ها $S-Act$ و رسته مجموعه های مرتب جزئی (Pos) است.
مبحث اصلی در این پایان نامه بررسی رابطه بین شرط های A° ، D°، K و M_R روی S و تمامیت مرتب S و همچنین رابطه بین S-سیستم های مرتب هموار قوی و تصویری با تمامیت مرتب S می باشد.
ایده ی اصلی این پایان نامه تحقیق از مقاله $Perfection\ for\ pomonoids$ نوشته ی $Victoria\ Gould.\ Lubna\ Shaheen$ گرفته شده و با استفاده از سایر منابع سعی شده است مفاهیم به طور دقیق مورد بررسی قرار گیرند.
واژه های کلیدی: تکواره مرتب، S-سیستم مرتب، S-سیستم های مرتب تصویری، S-سیستم های مرتب هموار قوی و تکواره مرتب کامل.

فهرست مطالب

پیشگفتار

تحقیق در مورد تکواره های مرتب کامل چپ برای اولین بار توسط ایزبل [۱] در سال ۱۹۷۱ طی مقاله ای ارائه شد. این تحقیق توسط فانتن[۲]، پرویوخین [۳] و استپانوا[۴] ادامه پیدا کرد و آنها رابطه بین شرط های A و D و M_R و تمامیت S را و رابطه بین تمامیت S را با هموار قوی بودن و تصویری بودن S-سیستم مرتب مورد بررسی قرار دادند.

در این مقاله بسیاری از نتایج و تکنیک ها در مورد S-سیستم های مرتب متناظر با موارد مشابه در مورد S-سیستم می باشد.

در این پایان نامه پس از بیان مفاهیم و تعاریف اولیه که در فصل اول آمده است، در فصل دوم رسته S-سیستم های مرتب معرفی می شود. S-سیستم های مرتب آزاد، تجزیه ناپذیر و تصویری معرفی می شوند، S-سیستم مرتب هموار قوی تعریف می شود و همچنین رابطه هموار قوی بودن با شرط های P و E بیان می شود.

---

[۱] Isbell

[۲] Fountain

[۳] Pervukhin

[۴] Stepanova

در فصل سوم شرط هایی را بررسی می کنیم که باعث $\mathcal{SF} = \mathcal{P}$ شود. همچنین ثابت می شود که شرط A و A° در مورد S-سیستم های مرتب معادل هستند.

در فصل چهارم به مطالعه ی تمامیت مرتب یک تکواره مرتب می پردازیم و در پایان فصل قضیه ۱۸.۴ را که نتیجه نهایی و هدف کلی این مقاله است بیان می کنیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل با مفاهیم رسته، تکواره و S-سیستم آشنا می شویم و سپس به بیان تعاریف و قضایایی می پردازیم که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند.

۱.۱ مفاهیم رسته ای

یکی از ابزارهای سودمند در بررسی ساختار های جبری رسته [۱] می باشد. رسته زبانی مشترک است که زمینه ای عمومی برای پرداختن به حالات مختلف ریاضی را فراهم می کند. ایده ای شهودی در تعریف رسته این است که ساختمان های ریاضی، همراه با نگاشت های مناسبی بین اشیاء آنها از خواص مشترکی برخوردار هستند. باتوجه به اهمیت موضوع این فصل را به آن اختصاص داده ایم.

تعریف ۱.۱. هر رسته رده ای است مانند $\mathcal{C}$ از اشیاء که معمولا با $A, B, C, ...$ نشان داده می شود و به ترتیب شرایط زیر را دارا باشد:

[۱] Category

۱. یک رده از مجموعه های از هم جدا، که با $hom(A,B)$ نمایش داده می شود(برای هر جفت از اشیاء در $\mathcal{C}$ یک عنصر f از $hom(A,B)$ یک ریخت [۲] از A به B نامیده و با $f:A\to B$ نمایش داده می شود)

۲. به ازای هر سه تائی (A,B,C) از اشیاء در $\mathcal{C}$ ، تابعی مانند

$$hom(B,C)\times hom(A,B)\to hom(A,C)$$

(برای ریخت های $g:B\to C$ و $f:A\to B$، این تابع به صورت $(g,f)\to gof$ نوشته و $gof:A\to C$ ترکیب f و g خوانده می شود) که در دو اصل موضوع زیر صدق می کند:

الف)هرگاه $h:C\to D$ و $f:A\to B$ و $g:B\to C$ ریخت هایی از $\mathcal{C}$ باشند آنگاه $ho(gof)=(hog)of$ (شرکت پذیری).

ب)به ازای هر شیء B از $\mathcal{C}$ ریختی $id_B:B\to B$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $g:B\to C$ و $f:A\to B$،

$$goid_B=g$$

و

$$id_Bof=f$$

تعریف ۲.۱. در رسته ی $\mathcal{C}$ ریخت $f:A\to B$ را تعادل [۳]نامند اگر ریختی مانند $g:B\to A$ در $\mathcal{C}$ موجود باشد به طوری که $gof=id_A$ و $fog=id_B$.

[۲] Morphism

[۳] Equivalence

ترکیب دو تعادل، وقتی تعریف شده باشند، یک تعادل است. اگر $f : A \to B$ تعادل باشد گوییم A و B معادل [۴]می باشد و می نویسیم $A \simeq B$.

مثال ۳.۱. *فرض کنیم $\mathcal{S}$ رسته ی تمام مجموعه ها باشد. به ازای $A, B \in \mathcal{S}$، $hom(A, B)$ مجموعه تمام توابع $f : A \to B$ است. ریخت f از $\mathcal{S}$ یک تعادل است اگر و تنها اگر f دوسویی باشد.*

مثال ۴.۱. *فرض کنیم $\mathcal{G}$ رسته ی تمام گروه ها باشد. به ازای $A, B \in \mathcal{G}$، $hom(A, B)$ مجموعه تمام همریختی های گروه $f : A \to B$ است. ریخت f از $\mathcal{G}$ یک تعادل است اگر و تنها اگر f یکریختی باشد.*

تعریف ۵.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته بوده و $\{A_i | i \in I\}$ خانواده ای از اشیاء $\mathcal{C}$ باشد. یک حاصل ضرب [۵] برای خانواده $\{A_i | i \in I\}$ شیئی است مانند P از $\mathcal{C}$ همراه با خانواده ای از ریخت ها مانند $\{\phi_i : P \to A_i | i \in I\}$ به طوری که به ازای هر شئ B و خانواده $\{\varphi_i : B \to A_i | i \in I\}$ از ریخت ها، ریخت منحصر به فردی مانند $\varphi : B \to P$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $i \in I$ داشته باشیم $\phi_i \varphi = \varphi_i$. به عبارت دیگر نمودار ذیل جابه جایی باشد.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "\varphi_i"] \\ P \arrow[r, "\phi_i"] & A_i \end{tikzcd}$$

قضیه ۶.۱. *هرگاه $(P, \{\phi_i\})$ و $(Q, \{\psi_i\})$ دو حاصل ضرب برای خانواده ی $\{A_i | i \in I\}$*

---

[۴] Equivalent

[۵] Product

از اشیاء رسته ی $\mathcal{C}$ باشند آنگاه P و Q معادل اند.

برهان: به [۱] قضیه ی ۷.۳.۱ مراجعه شود. $\square$

تعریف ۷.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته بوده و $\{A_i|i \in I\}$ خانواده ای از اشیاء باشد. یک هم حاصل ضرب [۶] برای خانواده $\{A_i|i \in I\}$ شیئی است مانند S از $\mathcal{C}$ همراه با خانواده ای از ریخت ها مانند $\{\iota_i : A_i \to S|i \in I\}$ به طوری که به ازای هر شیئ B و خانواده $\{\psi_i : A_i \to B|i \in I\}$ از ریخت ها ، ریخت منحصر به فردی مانند $\psi : S \to B$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i \in I$ داشته باشیم $\psi o \iota_i = \psi_i$. به عبارت دیگر نمودار ذیل جابه جایی باشد.

$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[dl, "\iota_i"'] \arrow[d, "\psi_i"] \\ S \arrow[r, "\psi"] & B \end{tikzcd}$$

قضیه ۸.۱. *هرگاه $(S, \{\iota_i\})$ و $(S', \{\lambda_i\})$ دو هم حاصل ضرب برای خانواده ی $\{A_i|i \in I\}$ از اشیاء رسته ی $\mathcal{C}$ باشند آنگاه S و S' معادل اند.*

برهان: به [۱] قضیه ۷.۵.۱ مراجعه شود. $\square$

تعریف ۹.۱. رسته ی ملموس [۷] رسته ای است مانند $\mathcal{C}$ همراه با تابعی چون σ که به هر شیئ A از $\mathcal{C}$ مجموعه $\sigma(A)$ (به نام مجموعه زمینه ی A)را نسبت می دهد به قسمی که شرایط زیر را داشته باشیم:

۱. هر ریخت $A \to B$ از $\mathcal{C}$ تابعی بر مجموعه های زمینه ی $\sigma(A) \to \sigma(B)$ است.

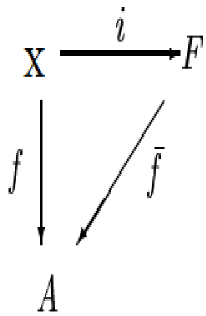
[۶] Coproduct

[۷] Concrete category

۲. ریخت همانی هر شیء A از $\mathcal{C}$ تابع همانی بر مجموعه ی زمینه ی $\sigma(A)$ است.

۳. ترکیب ریخت ها در $\mathcal{C}$ با ترکیب توابع بر مجموعه های زمینه یکی است.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنیم F شیئی در رسته ملموس $\mathcal{C}$، X مجموعه ای ناتهی و $i : X \to F$ یک نگاشت باشد. F بر مجموعه ی X آزاد [۸] است اگر به ازای هر شیء A از $\mathcal{C}$ و نگاشت $f : X \to A$ ریخت منحصر به فردی از $\mathcal{C}$ مانند $\overline{f} : F \to A$ موجود باشد به طوری که، $\overline{f}i = f$. به عبارت دیگر نمودار ذیل جابه جایی باشد.



تعریف ۱۱.۱. ریخت $f : C \to D$ از رسته ی $\mathcal{C}$ تکین(یا تکریختی) [۹]است اگر به ازای جمیع اشیاء B و ریخت های $g, h \in hom(B, C)$ از $fh = fg$ نتیجه شود که $h = g$.

تعریف ۱۲.۱. ریخت $f : C \to D$ از رسته ی $\mathcal{C}$ برویی (یا بروریختی) [۱۰]است اگر به ازای جمیع اشیاء E و ریخت های $k, t \in hom(D, E)$ از $kf = tf$ نتیجه می شود که $k = t$.

مثال ۱۳.۱. *یک ریخت در رسته ی مجموعه ها تکین (برویی) است اگر و تنها اگر یک به یک (پوشا) باشد.*

---

[۸] Free

[۹] Monomorphism

[۱۰] Epimorphism

قضیه ۱۴.۱. *فرض کنیم $f : B \to C$ و $g : C \to D$ ریخت هایی از رسته ی $\mathcal{C}$ باشند در این صورت گزاره های زیر برقرار هستند.*

۱. *اگر f و g تکین باشند آنگاه gf تکین است.*

۲. *اگر gf تکین باشد آنگاه f تکین است.*

۳. *اگر f و g برویی باشند آنگاه gf برویی است.*

۴. *اگر gf تکین باشد آنگاه g برویی است.*

۵. *اگر f یک تعادل باشد آنگاه f تکین و برویی است.*

برهان: به [۱۱] قضیه ی ۱۳.۶.۱ مراجعه شود. □

تعریف ۱۵.۱. فرض کنیم $f : A \to B$ ریختی از رسته $\mathcal{C}$ باشد.
f را درون بری [۱۱] گوییم اگر f دارای معکوس راست باشد یعنی $g \in hom(B, A)$ وجود داشته باشد به طوری که $fg = id_B$. به علاوه گوییم B درون بر A است.

تعریف ۱۶.۱. فرض کنیم $f : A \to B$ ریختی از رسته $\mathcal{C}$ باشد. f را هم درون بری [۱۲] گوییم اگر f دارای معکوس چپ باشد یعنی $g \in hom(B, A)$ وجود داشته باشد به طوری که $gf = id_A$. به علاوه گوییم A هم درون بر B است.

قضیه ۱۷.۱. *اگر $\mathcal{C}$ یک رسته ی ملموس باشدآنگاه برای ریخت $f : A \to B$ نتایج زیر حاصل می شود:*

هم‌درون‌بری ⇐ یک‌به‌یک بودن ⇐ تکریختی

درون‌بری ⇐ پوشا بودن ⇐ بروریختی

---

[۱۱] Retract

[۱۲] Coretract

برهان: به [۱۱] *قضیه ۱۴.۶.۱ مراجعه شود.* □

تعریف ۱۸.۱. شیء P در رسته $\mathcal{A}$ تصویری می نامیم اگر برای هر $f \in hom(P,Y)$ و هر برورریختی $\pi \in hom(X,Y)$، ریخت $\overline{f} \in hom(P,X)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\pi\overline{f} = f$$

به عبارت دیگر نمودار زیر جابه جایی باشد.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\bar{f}"'] \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "\pi"] & Y \end{tikzcd}$$

قضیه ۱۹.۱. *درون بر هر شیء تصویری، تصویری است.*

برهان: به [۱۱] *گزاره ۳۰.۱.۷ مراجعه شود.* □

تعریف ۲۰.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. تابعگر همورد [۱۳] T از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ که با $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ نمایش داده می شود، تابعی است که به شیء C از $\mathcal{C}$ شیئی مانند $T(C)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می دهد و به ریخت $f : C \to C'$ از $\mathcal{C}$ ریختی مانند $T(f) : T(C) \to T(C')$ از $\mathcal{D}$ رانسبت می دهد به طوری که

۱. به ازای هر ریخت همانی id_C از $\mathcal{C}$، $T(id_C) = id_{T(C)}$

۲. به ازای هر دو ریخت f و g از $\mathcal{C}$ که ترکیب gof آن ها تعریف شده باشد $T(gof) = T(g)oT(f)$.

[۱۳] Covariant functor

مثال ۲۱.۱. *فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته ملموس باشد. تابعگر فراموشی همورد از $\mathcal{C}$ به رسته ی $\mathcal{S}$ از مجموعه ها به هر شیء A مجموعه زمینه آن و به هر ریخت $f : A \to A'$ تابع $f : A \to A'$ را نسبت می دهد.*

تعریف ۲۲.۱. فرض کنید $f, g : A \to B$ یک زوج از ریخت ها باشند. زوج (E, e) که $E \to A$ برابر ساز [۱۴] برای f و g نامیده می شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. $fe = ge$.

۲. برای هر ریخت $e' : E' \to A$ اگر $fe' = ge'$ ریختی منحصر به فرد مانند $\bar{e} : E' \to A$ به قسمی موجود باشد که $e' = e\bar{e}$ یعنی مثلث دیاگرام زیر جابه جایی باشد.

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[dl, "\bar{e}"'] \arrow[d, "e'"] & \\ E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

قضیه ۲۳.۱. *گزاره های زیر برقرارند:*

۱. *برابر ساز در حد یکریختی منحصر به فرد است.*

۲. *اگر (E, e) برابر ساز باشد e تکریختی است.*

برهان: به [۱۱] *گزاره ۲.۲.۸ مراجعه شود.* $\square$

[۱۴] Equalizer

تعریف ۲۴.۱. فرض کنیم $f, g : A \to B$ یک زوج از ریخت ها باشند. زوج (C, c) که $B \xrightarrow{c} C$ هم برابر ساز [۱۵] برای f و g نامیده می شود، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. $cf = cg$.

۲. برای هر ریخت $c' : B \to C'$ اگر $c'f = c'g$ ریخت منحصر به فرد مانند $\bar{c} : C \to C'$ به قسمی موجود باشد که $c' = c\bar{c}$ یعنی مثلث دیاگرام زیر جابه جایی باشد.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "c"] \arrow[d, "c'"'] & C \arrow[dl, "\bar{c}"] \\
& C' &
\end{tikzcd}$$

تعریف ۲۵.۱. فرض کنیم ریخت های f_1 و f_2 به صورت زیر در رسته $\mathcal{A}$ داده شده باشند:

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y
\end{tikzcd}$$

جفت $(P, (p_1, p_2))$ با $p_i : P \to X_i$ که $i = 1, 2$ در $\mathcal{A}$ عقب بر [۱۶] جفت (f_1, f_2) نامیده می شود اگر

---

[۱۵] Coequalizer

[۱۶] Pullback

۱. $f_1 p_1 = f_2 p_2$

۲. برای هر جفت $(P', (p'_1, p'_2))$ با $p'_i : P' \to X_i$ ، $i = 1, 2$ که $f_1 p'_1 = f_2 p'_2$ ریخت منحصر به فرد $p : P' \to P$ وجود داشته باشد که $p_i p = p'_i$ ، $i = 1, 2$.
به عبارت دیگر دیاگرام زیر جابه جایی باشد.

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, "p"] \arrow[drr, "p'_1"] \arrow[ddr, "p'_2"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
& X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y
\end{tikzcd}$$

عقب بر $(K, (p_1, p_2))$ از جفت (f, f) برای ریخت $f : X \to Y$ ، هسته جفت f نامیده می شود.

تعریف ۲۶.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک رسته و f_1 و f_2 به صورت زیر داده شده باشند:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"] & Y_2 \\
Y_1 &
\end{tikzcd}$$

جفت $((q_1, q_2), Q)$ با $q_i : Y_i \to Q$ ، $i = 1, 2$ در $\mathcal{A}$ جلو بر [۱۷] جفت (f_1, f_2) نامیده می شود اگر

[۱۷] Pushout

۱. $q_۱ f_۱ = q_۲ f_۲$.

۲. برای هر جفت $((q'_۱, q'_۲), Q')$ ، $q'_i : Y_i \to Q'$ ، $i = ۱, ۲$ و $q'_۱ f_۱ = q'_۲ f_۲$ ریخت منحصر به فرد $q : Q \to Q'$ وجود داشته باشد به طوری که $qq_i = q'_i$ ، $i = ۱, ۲$.
به عبارت دیگر دیاگرام زیر جابه جایی باشد.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_۲"] \arrow[d, "f_۱"'] & Y_۲ \arrow[d, "q_۲"'] \arrow[ddr, "q'_۲"] & \\
Y_۱ \arrow[r, "q_۱"'] \arrow[drr, "q'_۱"'] & Q \arrow[dr, "q"] & \\
& & Q'
\end{tikzcd}$$

جلو بر $((q_۱, q_۲), Q)$ از جفت (f, f) ، را هم هسته جفت f می نامند.

۲.۱ مجموعه های مرتب جزئی

از آن جایی که عمده کار صورت گرفته در فصل های آتی روی مجموعه های مرتب جزئی است این بخش را به این موضوع اختصاص داده ایم که با تعریف زیر آغاز می شود.

تعریف ۲۷.۱. یک رابطه دوتایی یا به طور ساده یک رابطه R از مجموعه A به مجموعه B زیر مجموعه ای از $A \times B$ است. فرض کنیم R رابطه ای از A به مجموعه B باشد. اگر $(x, y) \in R$ می نویسیم xRy یا $R(x) = y$. اگر xRy آنگاه می گوییم x با y نسبت به R مرتبط است یا به طور ساده x با y رابطه دارد (یا y در رابطه با x است). اگر