
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه دکتری رشته ی ریاضی گرایش آنالیز تابعی

قضایای نقطه ثابت و نقطه انتهایی برای نگاشت های مجموعه مقدار

استادان راهنما

دکتر مجید فخار

دکتر جعفر زعفرانی

پژوهشگر

زینب سلطانی رنانی

بهمن ماه ۱۳۹۱

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه دکتری رشته ریاضی محض گرایش آنالیز (تابعی) خانم زینب سلطانی رنانی

تحت عنوان:

قضایای نقطه انتهایی و نقطه ثابت برای نگاشت های مجموعه مقدار

در تاریخ ...۹۱/۱۱/۴..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالی.......... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر مجید فخار	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۲- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر جعفر زعفرانی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر محمدرضا پوریای ولی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۴- استاد داور داخل گروه	دکتر محمود لشکری زاده	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۵- استاد داور خارج گروه	دکتر سیدمنصور واعظپور	با مرتبه علمی استاد	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه

الحمدلله الذی تحبّب الیّ و هو غنیٌ عنّی

ستایش خدای را که به من اظهار دوستی فرمود با آن که از من بی نیاز بود

این مجموعه را مرهون راهنمایی های اساتید گرامی و بزرگوارم جناب آقای دکتر مجید فخار و جناب آقای دکتر جعفر زعفرانی می دانم که فراتر از استاد راهنما در نهایت صبر و شکیبایی مرا تشویق و راهنمایی نموده اند. بر خود لازم می دانم از زحمات بی دریغ ایشان صادقانه سپاسگزاری کنم گرچه تشکر من قطره ای در برابر دریای بیکران محبت ها و کمک های ایشان می باشد. از درگاه ایزد منان توفیقی روز افزون برای ایشان خواهانم.

زحمات اساتید داور جناب آقای دکتر لشکری زاده و جناب آقای دکتر پوریای ولی داوران داخلی و جناب آقای دکتر واعظ پور داور خارجی ارج نهاده و از ایشان تشکر می کنم.

همچنین از زحمات اعضای گروه ریاضی به خصوص سرکار خانم ها غازی، فرهمند و فانی سپاسگزارم.

تقدیم به

بهترین‌های زندگی‌ام

پدر و مادر عزیزم

چکیده

در این پایانامه، ابتدا قضیه نقطه ثابت لفشتز را روی دو کلاس متفاوت از نگاشت‌های مجموعه مقدار غیرفشرده گسترش می‌دهیم که روی یک زیرمجموعه‌ی فضای باناخ که یک اجتماع موضعاً متناهی از مجموعه‌های بسته و محدب است تعریف شده اند. همچنین، یک جواب جزئی به حدس ناسبام برای نگاشت‌های مجموعه مقدار می‌دهیم. در ادامه از دیدگاه توپولوژیکی، وجود و یکتایی نقطه انتهایی را برای نگاشت‌های مجموعه مقدار به طور توپولوژیکی انقباضی بدون شرط فشردگی فضا ثابت می‌کنیم. همچنین، نتایج مجموعه ثابت را برای نگاشت‌های مجموعه مقدار پیوسته روی فضاهای توپولوژی غیرفشرده ارائه می‌دهیم. در ادامه، نتایج وجود نقطه انتهایی برای نگاشت‌های به طور توپولوژیکی انقباضی روی فضاهای توپولوژی منظم به‌دست می‌آوریم .

همچنین، نتایج مجموعه فراکتال را برای سیستمی از نگاشت‌های مجموعه مقدار پیوسته روی فضاهای توپولوژی منظم ارائه می‌کنیم.

در ادامه از دیدگاه متریکی، وجود و یکتایی مجموعه ثابت فشرده‌ی یکتا برای نگاشت‌های مجموعه مقدار مجانبی انقباضی از نوع پایانی ثابت می‌کنیم. همچنین، وجود و یکتایی نقطه انتهایی برای این نگاشت‌ها در شرایطی که یا به طور توپولوژیکی انقباضی باشد یا در خاصیت نقطه انتهایی تقریبی صدق کند، ثابت می‌نماییم.

فهرست مطالب

پیشگفتار

فرض کنید X یک مجموعه غیرتهی و $T : X \multimap X$ یک نگاشت مجموعه مقدار با مقادیر غیرتهی باشد، در این‌صورت نقطه‌ی $x \in X$ یك نقطه ثابت از نگاشت T گویند هرگاه $x \in T(x)$ و x یک نقطه انتهایی از T گفته می‌شود، اگر $\{x\} = T(x)$. همچنین یک زیرمجموعه‌ی A از X مجموعه ثابت T گفته می‌شود، اگر $A = T(A)$.

قضایای نقطه ثابت و نقطه انتهایی و مجموعه ثابت دارای دو شاخه‌ی مهم توپولوژیکی و متریکی می‌باشد. از دیدگاه توپولوژیکی، یکی از نتایج بسیار مهم قدیمی در زمینه‌ی نقطه ثابت، قضیه‌ی براوئر می‌باشد که بیان می‌کند گوی یکه در فضای $\mathbb{R}^n$ دارای خاصیت نقطه ثابت برای توابع پیوسته می‌باشد یعنی اگر $f : B \to B$ یك نگاشت پیوسته باشد آنگاه یك نقطه $x \in B$ وجود دارد به قسمی که $f(x) = x$.

شودر [۱] [۶۱] در سال ۱۹۳۰ قضیه‌ی نقطه ثابت براوئر را در فضای باناخ نامتناهی‌البعد برای نگاشت‌های فشرده تعمیم داد. در قضیه‌ی نقطه ثابت شودر فشردگی نقش اساسی دارد. اولین قدم در جهت تعمیم قضیه‌ی شودر گذاشتن شرطی بر روی تابع f است که بتوان با این شرط یك مجموعه‌ی فشرده‌ی تحت f، پایا یافت که نیازمند مشخصه‌ای برای فشردگی یك مجموعه می‌باشد.

---

[۱] Schauder

در سال ۱۹۳۰ کوراتفسکی [۲] [۴۳] برای اولین بار مفهوم اندازه‌ی غیرفشرده‌ی کوراتفسکی را در جهت تعمیم قضیه‌ی مقطع کانتور معرفی کرد و به دنبال آن مفاهیم دیگری از اندازه‌ی غیرفشرده معرفی گردید که به عنوان تعریف کلی از آن داریم:

فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $(\mathcal{C},\tau)$ یک فضای توپولوژی با شبکه $\mathcal{C}$ با عنصر مینیمال که با 0 نشان داده می‌شود. فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه‌ی همه زیرمجموعه‌های غیرتهی باشد به قسمی برای هر $A,B\in\mathcal{B}$ داشته باشیم $\overline{A}, A\cup B\in\mathcal{B}$.

یك اندازه‌ی غیرفشرده روی X نسبت به $\mathcal{B}$ یك تابع $\mu:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ است به قسمی که:

(i) برای هر $A\in\mathcal{B}$، $\mu(\overline{A})=\mu(A)$؛

(ii) $\mu(A)=0$ اگر و فقط اگر مجموعه‌ی A فشرده‌ی نسبی باشد؛

(iii) برای هر $A,B\in\mathcal{B}$، $\mu(A\cup B)=\max\{\mu(A),\mu(B)\}$.

با توجه به خاصیت دوم این تعریف در فضای متریك کامل باید اندازه‌ی غیرفشرده‌ی مجموعه تحت f پایا، صفر باشد بنابراین باید ارتباطی بین اندازه‌ی غیرفشرده تصویر مجموعه و خود مجموعه وجود داشته باشد.

فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $\mu:X\to[0,\infty]$ اندازه‌ی غیر فشرده روی X باشد. فرض $T:X\multimap X$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد، در این‌صورت

(i) نگاشت T، μ-k-مجموعه انقباضی گفته می‌شود اگر $k\in[0,1)$ وجود داشته باشد

[۲] Kuratowski

به قسمی که برای هر $A \subseteq X$،

$$\mu(T(A)) \leq k\mu(A).$$

(ii) نگاشت T منقبضی گفته می‌شود اگر برای هر زیرمجموعه‌ی کراندار A از X که $\mu(A) > 0$، داشته باشیم

$$\mu(T(A)) < \mu(A).$$

در جهت تعمیم قضیه نقطه ثابت شودر، داربو [3] [۲۱] در سال ۱۹۵۵ ثابت کرد اگر Y یك زیرمجموعه غیرتهی محدب، بسته و کراندار از فضای باناخ X باشد و f یك نگاشت μ-k-مجموعه انقباضی باشد که μ اندازه غیرفشرده کوراتفسکی است، آن‌گاه f دارای نقطه ثابت است. بعد از آن سادوسکی [4] [۵۹] در سال ۱۹۶۷ مفهوم نگاشت منقبضی را معرفی نمود و ثابت کرد اگر f یك نگاشت منقبضی پیوسته روی زیرمجموعه‌ی محدب، بسته و کراندار یك فضای باناخ باشد آن‌گاه f دارای نقطه ثابت است. مهتا [5] [۴۹] در سال ۱۹۹۰ قضیه نقطه ثابت سادوسکی را برای نگاشت‌های مجموعه مقدار نیم‌پیوسته بالایی ثابت نمود.

یکی دیگر از تعمیم‌های مربوط به این قضیه، حالت مجانبی آن است که به صورت یك حدس توسط ناسبام [6] در سال ۱۹۷۲ بیان شد که در زیر بیان می‌کنیم:

حدس ۰.۱. فرض کنید G یك مجموعه بسته کراندار و محدب در یك فضای باناخ X

[3] Darbo
[4] Sadovskiĭ
[5] Mehta
[6] Nussbaum

و $f : G \to G$ یك نگاشت پیوسته باشد. فرض کنید یك عدد $N \geq ۲$ وجود دارد به قسمی که $f^N(G)$ فشرده است. در این‌صورت f دارای یك نقطه ثابت است.

حدس ۲.۰. فرض کنید G یك مجموعه بسته کراندار و محدب در یك فضای باناخ X و $f : G \to G$ یك نگاشت پیوسته باشد. فرض کنید یك عدد $N \geq ۲$ وجود دارد به قسمی که $f^N(G)$ یك نگاشت k-مجموعه انقباضی با $k < ۱$ است. در این‌صورت f دارای یك نقطه ثابت است.

ناسبام این حدس‌ها را با شرایط اضافی این‌که نگاشت f روی یك مجموعه‌ی باز فرشه دیفرانسیل‌پذیر پیوسته باشد، ثابت نمود. به طور مشابه، براوئر با استفاده از قضیه نقطه ثابت لفشتز برای درون‌بر همسایگی مطلق فشرده، قضایای نقطه ثابت مجانبی را برای نگاشت‌های تعریف شده روی درون‌بر همسایگی مطلق، ثابت نمود. اخیراً ناسبام و مالت-پارت [۷] این حدس‌ها را با دو فرض اضافی دیگر ثابت نمودند. با استفاده از روش‌های توپولوژی جبری به خصوص عدد لفشتز تعمیم یافته، یك سری از قضایای نقطه ثابت مجانبی را برای نگاشت‌های تعریف شده روی یك زیر مجموعه از فضای باناخ که یك اجتماع موضعاً متناهی از مجموعه‌های بسته و محدب است، را ثابت کردند. گرینویچ [۸] [۳۴] با استفاده از روش‌های توپولوژی جبری قضیه نقطه ثابت شودر را برای کلاسی از نگاشت‌های مجموعه مقدار غیرفشرده که روی فضای متریك درون‌بر همسایگی مطلق X تعریف شده‌اند را گسترش داد.

[۷] Mallet-Paret
[۸] Górniewicz

در فصل دوم این پایانامه، با استفاده از روش‌های توپولوژی جبری به خصوص عدد لفشتز تعمیم یافته، قضیه نقطه ثابت لفشتز را روی دو کلاس متفاوت از نگاشت‌های مجموعه مقدار غیرفشرده گسترش می‌دهیم که روی یک زیرمجموعه‌ی فضای باناخ که یک اجتماع موضعاً متناهی از مجموعه‌های بسته و محدب است تعریف شده اند. همچنین، یك جواب جزئی به حدس ناسبام برای نگاشت‌های مجموعه مقدار می‌دهیم.

در ادامه قضایای نقطه انتهایی را ابتدا از دیدگاه توپولوژیکی بررسی می کنیم. در سال‌های اخیر تعداد زیادی از ریاضی‌دانان وجود و یکتایی نقاط انتهایی را برای نگاشت‌های مجموعه مقدار در فضاهای متریك و فضاهای توپولوژی مطالعه کردند از جمله این منابع را می‌توان ذکر کرد [۴، ۸، ۹، ۱۰، ۲۷، ۵۸، ۶۵، ۶۶، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳].

در سال ۱۹۹۵ ترفدار و یوآن [۶۵] برای نگاشت‌های مجموعه مقدار مفهوم به طور توپولوژیکی انقباضی را معرفی کردند و وجود و یکتایی نقطه انتهایی را برای نگاشت‌های مجموعه مقدار به طور توپولوژیکی انقباضی، ثابت نمودند.

فرض کنید X یک فضای توپولوژی، یك نگاشت مجموعه مقدار $T : X \multimap X$ به طور توپولوژیکی انقباضی گفته می‌شود اگر برای هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی فشرده A از X با شرط $T(A) = A$، داشته باشیم مجموعه‌ی A تك عضوی است. در حقیقت نقطه انتهایی T است.

قضیه ۰.۳. فرض کنید X یک فضای توپولوژی هاسدورف و فشرده و $T : X \multimap X$ یك نگاشت مجموعه مقدار نیم پیوسته بالایی طور توپولوژیکی انقباضی با مقادیر بسته باشد.

در این‌صورت نگاشت T دارای یک نقطه انتهایی یکتای x می‌باشد و $\cap_{n=0}^{\infty} T^n(X) = \{x\}$.

فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $\mu : 2^X \to [0,\infty)$ یك اندازه‌ی غیرفشرده روی فضای X باشد. یك نگاشت مجموعه مقدار $T : X \multimap X$، μ-مجموعه انقباضی تعمیم یافته گفته می‌شود اگر برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $A \subseteq X$ با $\varepsilon \leq \mu(A) < \varepsilon + \delta$، $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به قسمی که $\mu(T^n(A)) < \varepsilon$.

در سال ۲۰۱۰ امینی- زعفرانی- فخار [۳] مفهوم μ-مجموعه انقباضی تعمیم یافته را معرفی نمودند و نشان دادند اگر یك فضای توپولوژیکی و یك نگاشت مجموعه مقدار μ-مجموعه انقباضی تعمیم یافته روی X باشد اگر و فقط اگر برای هر زیرمجموعه‌ی A از X که $T(A) \subseteq A$ و $\mu(A) < \infty$، داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} \mu(T^n(A)) = 0$.

همچنین نشان دادند که نگاشت مجموعه مقدار μ-k-مجموعه انقباضی یك نگاشت مجموعه مقدار μ-مجموعه انقباضی تعمیم یافته می‌باشد ولی عکس آن برقرار نیست.

در فصل سوم این پایانامه، ابتدا مفهوم μ-مجموعه انقباضی تعمیم یافته را معرفی کنیم و در ادامه وجود و یکتایی نقطه انتهایی مجانبی را برای نگاشت‌های مجموعه مقدار نیم‌پیوسته بالایی به طور توپولوژیکی انقباضی بدون شرط فشردگی فضا ثابت می‌کنیم. به علاوه، تعدادی از نگاشت‌های مجموعه مقدار به طور توپولوژیکی انقباضی مشخصه سازی شده‌اند. به عنوان کاربرد، تعدادی از قضایای نقطه ثابت شناخته شده برای نگاشت‌های تك مقداری بیان شده‌اند.

نظریه‌ی مجموعه ثابت کاربردهای مهم و قابل توجه‌ای در سیستم‌های توابع تکرار، فراکتال‌ها، سیستم‌های دینامیکی، نظریه بازی و نقطه ثابت دارد که از جمله این منابع را می‌توان ذکر کرد [۵، ۶، ۱۷، ۳۸، ۴۰، ۵۵، ۵۶]. این نظریه هم از دیدگاه توپولوژیکی و هم متریکی بررسی شده است. در این پایانامه، ما آن از دیدگاه توپولوژیکی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در حقیقت، نتایج مجموعه ثابت را برای نگاشت‌های مجموعه مقدار پیوسته روی فضاهای توپولوژی غیرفشرده ارائه می‌دهیم. در ادامه، نتایج وجود نقطه انتهایی برای نگاشت‌های به طور توپولوژیکی انقباضی روی فضاهای توپولوژی منظم به‌دست می‌آوریم. همچنین، نتایج مجموعه فراکتال را برای سیستمی از نگاشت‌های مجموعه مقدار پیوسته روی فضاهای توپولوژی منظم ارائه می‌کنیم.

وجود نقاط انتهایی و مجموعه ثابت از دیدگاه متریکی نیز مورد اهمیت می‌باشد. امینی [۴] و فخار [۲۷] در سال ۲۰۱۰ به ترتیب قضیه‌ی انقباضی بوید-ونگ [۱۳] و قضیه انقباضی مجانبی کرک [9] [۴۱] را به نگاشت‌های مجموعه مقدار گسترش دادند و وجود و یکتایی نقاط انتهایی برای چنین نگاشت‌هایی که دارای خاصیت به طور تقریبی نقطه انتهایی هستند را ثابت نمودند.

در فصل چهارم این پایانامه، نگاشت مجموعه مقدار مجانبی انقباضی از نوع پایانی را در فضاهای متریك معرفی می‌کنیم و وجود و یکتایی مجموعه ثابت فشرده‌ی یکتا

[9] Kirk

برای این نگاشت‌ها اثبات شده است. همچنین، وجود و یکتایی نقطه انتهایی برای این نگاشت‌ها در شرایطی که یا به طور توپولوژیکی انقباضی باشد یا در خاصیت نقطه انتهایی تقریبی صدق کند، ثابت می‌نماییم.

فصل ۱
مفاهیم و قضایای مقدماتی

فرض کنید X یک مجموعه غیرتهی و $T : X \multimap X$ یک نگاشت مجموعه مقدار با مقادیر غیرتهی باشد. یک زیرمجموعه‌ی A از X مجموعه ثابت T گویند، هر گاه $T(A) = A$.

یک عضو $x \in X$ یک نقطه انتهایی از T گویند، اگر $T(x) = \{x\}$. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط انتهایی T با $End(T)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژی، يك نگاشت مجموعه مقدار $T : X \multimap X$ به طور توپولوژیکی انقباضی گفته می‌شود اگر برای هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی فشرده A از X با شرط $T(A) = A$، داشته باشیم مجموعه‌ی A تك عضوی است. در حقیقت نقطه انتهایی T است.

تعریف ۲.۱. فرض کنید (M, d) يك فضای متريك باشد، نگاشت مجموعه مقدار T دارای خاصیت نقطه انتهایی تقریبی است اگر

$$inf_{x \in M} sup_{y \in Tx} d(x, y) = ۰.$$

تعریف ۳.۱. فرض کنید X و Y فضای‌های توپولوژی و $T : X \multimap Y$ در این صورت

(i) T را بسته گویند، اگر برای هر مجموعه‌ی بسته‌ی A از X، $T(A)$ بسته باشد.

(ii) T را نیم‌پیوسته بالایی نامند، اگر برای هر زیرمجموعه‌ی بسته $B \subseteq Y$، مجموعه‌ی

$$T^{-}(B) = \{x \in X : T(x) \cap B \neq \emptyset\}$$

در X بسته باشد.

(iii) T را نیم پیوسته پایینی گویند، اگر برای هر زیرمجموعه‌ی باز $V \subseteq Y$، مجموعه‌ی

$$T^{-}(V) = \{x \in X : T(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

در X باز باشد.

(iv) T پیوسته است، اگر نیم‌پیوسته بالایی و نیم پیوسته پایینی باشد.

تعریف ۴.۱. فرض کنید X و Y فضای‌های متریك، یك نگاشت مجموعه مقدار

$T : X \multimap Y$

به طور یکنواخت نیم‌پیوسته بالایی هاسدورف (به طور مختصر u.H.usc) گفته می‌شود، اگر برای هر زیرمجموعه‌ی بسته A از X و هر $\varepsilon > ۰$، $\delta > ۰$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$T(N_{\delta}(A)) \subset N_{\varepsilon}(T(A)),$$

که $N_{\varepsilon}(A) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$.

تعریف ۵.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $(\mathcal{C}, \tau)$ یک فضای توپولوژی با شبکه $\mathcal{C}$ با عنصر مینیمال که با ۰ نشان داده می‌شود. فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه‌ی همه زیرمجموعه‌های غیرتهی باشد به قسمی برای هر $A, B \in \mathcal{B}$ داشته باشیم $\overline{A}, A \cup B \in \mathcal{B}$.

یك اندازه‌ی غیرفشرده روی X نسبت به $\mathcal{B}$ یك تابع $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ است به قسمی که:

(i) برای هر $A \in \mathcal{B}$، $\mu(\overline{A}) = \mu(A)$؛

(ii) $\mu(A) = ۰$ اگر و فقط اگر مجموعه‌ی A فشرده‌ی نسبی باشد؛

(iii) برای هر $A, B \in \mathcal{B}$، $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$.

توجه کنید که اگر $A \subseteq B$، آن گاه $\mu(A) \leq \mu(B)$. یك دنباله‌ی $(A_n)_{n=۱}^{\infty}$ از زیرمجموعه‌های غیرتهی در $\mathcal{B}$ μ-آشیانی نامیده می‌شود، اگر A_n بسته باشد، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $A_{n+۱} \subseteq A_n$ و $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = ۰$.

گوییم μ دارای خاصیت کوراتفسکی است، اگر برای هر دنباله‌ی μ-نزولی $(A_n)_{n=۱}^{\infty}$ در $\mathcal{B}$، اشتراک $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ غیرتهی و فشرده باشد.

به عنوان مثال از اندازه‌ی غیرفشرده، تعریف اندازه‌ی غیرفشرده کوراتفسکی و هاسدورف را بیان می‌کنیم.

اگر (M, d) فضای متریک و $A \subset M$، قطر A که با $\delta(A)$ نشان داده می‌شود به صورت $\delta(A) = sup\{d(x, y) | x, y \in A\}$ تعریف می‌شود.

مجموعه A کراندار است اگر $\delta(A) < \infty$. اگر A یک زیرمجموعه‌ی کراندار از M باشد اندازه‌ی غیرفشرده کوراتفسکی $\gamma(A)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma(A) = inf\{\varepsilon > ۰ |\ A = \cup_{i=۱}^{\infty} A_i\ :\ \delta(\mathrm{A_i}) \leq \varepsilon,\quad ۱ \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n} \leq \infty\}.$$

و اندازه‌ی غیر فشرده‌ی هاسدورف A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi(A) = \inf\{\varepsilon > ۰ |\ A = \cup_{i=۱}^{n} B(x_j, \varepsilon), x_j \in M\},$$

که $B(x_j; \delta)$ نشان دهنده‌ی گوی در M با مرکز x_j و شعاع δ است.

کوراتفسکی [۴۳] ثابت کرد که اگر (M, d) یک فضای متریک کامل باشد آن‌گاه γ دارای خاصیت کوراتفسکی است.