بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شاهد

دانشکدهٔ علوم پایه

گروه فیزیک

پایان نامهٔ دورهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ فیزیک

بررسی درهم‌تنیدگی در سیستم‌های شبکهٔ اسپینی

فریبا دلیری

استاد راهنمای اول:

جناب آقای دکتر جهانگیر پیام‌آرا

استاد راهنمای دوم:

سرکار خانم دکتر نیره مجد

شهریور ماه ۱۳۹۲

تقدیم به: پدر عزیزم به خاطر زحمات بی‌دریغش

و مادر مهربانم به خاطر محبت بی کرانش،

خدای را بسی شاکرم که از روی فضل پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پر بار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چراکه این دو وجود پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند، دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی پر از فراز و نشیب زندگی آموختند.

با امتنان بیکران از مساعدت های بی شائبه‌ی همه‌ی اساتید گرانقدرم به‌ویژه:

سرکار خانم **دکتر نیره مجد**

که به من آموخت موفقیت پایانی ندارد.

چکیده:

درهم‌تنیدگی یکی از مسایل مهم در نظریه‌ی کوانتومی و مکانیک کوانتومی است، و به ما این قدرت را می‌دهد که بتوانیم با استفاده از آن کارهای خارق‌العاده که در فیزیک کلاسیک توجیهی ندارند، انجام دهیم.

در سیستم کوانتومی معیارهای مختلفی بیان‌گر وجود و میزان درهم‌تنیدگی می‌باشند، به مجموعه‌ی این معیارها همبستگی‌های کوانتومی می‌گوییم، علاوه بر این نوع دیگری از همبستگی‌ها نیز وجود دارند که همبستگی‌های کلاسیکی نامیده شده‌اند.

هدف ما محاسبه‌ی همبستگی‌های مذکور در مدل‌های اسپینی و مشاهده‌ی گذار فاز در این سیستم‌ها و هم‌چنین مقایسه‌ی قدرت همبستگی‌ها با یکدیگر در پیش‌بینی نقطه‌ی گذار فاز کوانتومی می‌باشد. همبستگی‌های مورد بحث ما عبارتند از: EOF، QD، CC، MID و CHSH.

ما مدل‌های اسپینی را که دارای تقارن Z_2 هستند مورد مطالعه قرار داده‌ایم. بنابراین ابتدا همبستگی‌های فوق را در حالت پایه‌ی مدل‌های اسپینی Ising،XY، XXZ، LMG و nladdersSpi مورد بررسی قرار داده‌ایم.سپس به مطالعه مدل‌های اسپینی LMG و Spinladders درون کانال های کوانتومیAD، PF، PD، BF و BPF می‌پردازیم. انتظار داریم که همبستگی‌های مذکور گذار فاز را درون کانال‌های کوانتومی نیز به‌خوبی نشان دهند.

مشاهده شد که در مواردی برخی از این همبستگی‌ها توانمندتر از برخی دیگر در نمایش نقطه‌ی گذار فاز کوانتومی رفتار می‌کنند.

کلید واژه ها: درهم‌تنیدگی، حالت پایه، مدل‌های اسپینی، گذار فاز و کانال‌های کوانتومی.

فهرست مطالب:

فصل اول:

فصل دوم:

فصل سوم:

فصل چهارم:

فصل پنجم

فهرست شکل‌ها

فصل اول

(۱-۱) مقدمه:

درهم‌تنیدگی[۱] یک اثر کوانتومی است که در تصویر کلاسیکی غیرممکن است. برای درک مفهوم درهم‌تنیدگی حالت کوانتومی را در نظر بگیرید که می‌تواند به دو بخش تقسیم شود، (مثلا دو ذره-ای که می‌توانند از هم جدا باشند)، اگر اندازه‌گیری روی این حالت‌ها به‌طور خاصی همبسته باشد، حالت درهم‌تنیده[۲] نامیده می‌شود.

درهم‌تنیدگی برای اولین بار توسط انیشتین[۳] ، پودولسکی[۴] و روزن[۵] (EPR) جهت نمایش ضعف مکانیک کوانتومی و این‌که مکانیک کوانتومی نظریه‌ی کاملی نیست مورد استفاده قرار گرفت [۱].

در حالت کلی در مکانیک کوانتوم یک حالت خصوصیاتش را تا زمانی حفظ می‌کند که اندازه-گیری روی آن انجام نشود؛ به‌محض انجام اندازه‌گیری حالت سیستم عوض می‌شود.

اثر شگفت‌انگیز درهم‌تنیدگی این است که آزمایش‌گر می‌تواند با اندازه‌گیری روی یک بخش از سیستم دوبخشی، به‌طور همزمان از نتیجه‌ی بخش دیگر نیز مطلع شود.

---

۱ entangelement.
۲ entangled.
۳ Einstein.
۴ Podolsky.
۵ Rosen.

درهم‌تنیدگی به دو علت پدیده‌ی سحرانگیزی است: مفهوم آن در مورد ماهیت حقیقت[٦] و کاربرد آن در پیشرفت تکنولوژی.

مفهوم درهم‌تنیدگی در مورد ماهیت حقیقت: درهم‌تنیدگی اثری است که به‌روشنی مکانیک کوانتومی را از مدل فیزیک کلاسیک جهان متمایز کرده، و به‌عنوان پدیده‌ای مفید مشکلات مفهومی کلی کوانتوم را بحث می‌کند. تفسیر درهم‌تنیدگی حول مسأله واقع‌گرایی[٧] و آن‌چه موضعیت انیشتین[٨] (یعنی دو رویداد به‌طور مناسبی از هم جدا باشند به‌طوری‌که اندازه‌گیری روی یکی از آن‌ها نتواند دیگری را تحت تأثیر قرار دهد، به‌عبارتی این دو رابطه علّی باهم نداشته باشند)، شناخته شده است، می‌چرخد.

کاربرد درهم‌تنیدگی در پیشرفت تکنولوژی: اجزای کامپیوترها در حال کوچک شدن هستند، اگر این روند با سرعت فعلی ادامه پیدا کند، حدود سال ۲۰۱۵ اندازه‌ی واحدهای پردازش اطلاعات قابل مقایسه با اندازه‌ی اتم‌ها خواهد بود. از این‌رو اثرات فیزیکی کوانتوم روی عملکرد کامپیوترها تأثیر خواهند گذاشت. این یکی از دلایلی است که دانشمندان در پی مدل‌سازی سیستم کوانتومی به‌عنوان کامپیوتر کوانتومی هستند که خواص برهم‌نهی[٩]، درهم‌تنیدگی و ... را دارا باشد، چنین کامپیوتری بدون شک قدرتمندتر خواهد بود.

کاربردهای دیگر حالت‌های درهم‌تنیده شامل: انتقال از راه دور[١٠]، برنامه نویسی ابرمتراکم[١١] و توزیع کلید کوانتومی[١٢] (رمزنگاری) می‌باشد.

[٦] Reality.
[٧] Realism.
[٨] Einstein Locality.
[٩] Superposition.
[١٠] Teleportation.
[١١] Superdense coding .
[١٢] Quantum key distribution.

علاوه بر این‌ها دو قانون بنیادی تئوری کوانتوم دلالت بر وجود حالت‌های درهم‌تنیده دارد: اصل برهم‌نهی[۱۳] و ضرب تانسوری[۱۴] [۲] .

اکنون برای آشنایی با حالت‌های درهم‌تنیده، حالت زیر در فضای برداری $H_1 \otimes H_2$ را در نظر بگیرید:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \qquad (۱-۱)$$

این حالت به‌صورت $|\Psi_1\rangle|\Psi_2\rangle$ قابل نوشتن نیست، علاوه بر این فرآیندهای فیزیکی موجود می‌باشند که منجر به تولید چنین حالت‌هایی می‌شوند. چنین حالت‌هایی را حالت‌های درهم‌تنیده می‌نامیم، که اندازه‌گیری روی یک بخش سیستم، حالت بخش دیگر را از قوه به فعل درمی‌آورد و ما را به‌طور آنی از نتیجه‌ی بخش دیگر مطلع می‌کند.

مطالعه‌ی حالت‌های درهم‌تنیده از مسائل مهم نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی می‌باشد. یکی از کاربردهای بی‌بدیل درهم‌تنیدگی مطالعه‌ی گذار فاز کوانتومی سیستم‌ها و نمایش نقطه‌ی بحرانی آن‌ها است؛ چراکه درهم‌تنیدگی در نقطه‌ی گذار فاز کوانتومی رفتار خاصی از خود به‌نمایش می‌گذارد. رفتار خاص درهم‌تنیدگی در نقطه‌ی بحرانی سیستم نیز نتیجه‌ی غیرقابل‌اجتناب الگوی همبستگی نمایش داده شده، توسط حالت پایه‌ی سیستم است. در واقع همبستگی‌ها معیارهایی جهت مطالعه‌ی حالت‌های درهم‌تنیده‌اند، گاهی برخی از معیارهای جدید نسبت به معیارهای پیش‌تر معرفی شده توانایی بیشتری در نمایش واقعیات موجود در فیزیک دارند. علاوه بر این همبستگی‌ها می‌توانند منبع کلاسیکی یا کوانتومی داشته باشند. همبستگی‌های کوانتومی که هر یک به‌نحوی بیان‌گر وجود درهم‌تنیدگی در سیستم می‌باشند انواع مختلفی دارند، همبستگی‌های

---

[۱۳] Superposition principle.
[۱۴] Tensor product.

کوانتومی که به آن‌ها خواهیم پرداخت عبارتند از: EOF، QD، MID و نامساوی Bell-CHSH، که در ادامه تعریف مختصری از هریک ادامه می‌دهیم.

۱)EOF: درهم‌تنیدگی تشکیل[۱۵] یا EOF دسته‌ای از همبستگی‌های کوانتومی را تعیین می‌کند که تنها با اعمال موضعی و ارتباطات کلاسیکی نمی‌توانند تولید شوند [۳و٤]، درهم‌تنیدگی تشکیل برای حالت‌های کاملاً جدا، صفر و برای حالت‌های کاملاً درهم‌تنیده (حالت‌های بل) یک است.

۲)QD: اختلاف کوانتومی[۱٦] یا QD به‌عنوان تمام همبستگی‌های غیر کلاسیکی بین سیستم‌های کوانتومی دوبخشی تعریف می‌شود [۵].

۳)MID: درواقع MID اختلال ایجاد شده در اثر اندازه‌گیری[۱۷] می‌باشد که به‌منظور محاسبه‌ی همبستگی‌های کوانتومی ارائه شده است [٦].

٤) نامساوی Bell-CHSH: نقض نامساوی CHSH بخشی از همبستگی‌های کوانتومی را توصیف می کند که با مدل متغیرهای پنهان موضعی قابل باز تولید نمی‌باشند. با وجود این‌که حالت‌های خالص درهم‌تنیده نامساوی CHSH را نقض می‌کنند، حالت‌های آمیخته‌ی درهم‌تنیده ممکن است این نامساوی را نقض نکنند [۷].

معیارهای همبستگی EOF، QD، MID برای حالت‌های خالص دوبخشی با یکدیگر برابرند اما برای حالت‌های آمیخته مقدار مساوی ندارند. برای حالت‌های جدا QD و MID می‌توانند صفر نباشند؛ از طرف دیگر MID برای حالت‌های کلاسیکی خالص می‌تواند غیر صفر و یا حتی دارای مقدار بیشینه باشد، بنابراین گهگاه MID به‌عنوان یک معیار غیر خالص از همبستگی‌های غیر کلاسیکی در حالت‌های دو بخشی در نظر گرفته می‌شود [۸ و ۹]. تابع Bell-CHSH نیز برای

---

[۱۵] Entangelement of formation.
[۱٦] Quantum discord.
[۱۷] Measurment induced disturbance .

حالت‌هایی که ماکزیمم درهم‌تنیدگی را دارند، مقدار بیشینه‌ی خود را به‌دست می‌آورد، اما به‌طور کلی برای حالت‌هایی که درهم‌تنیدگی بالا دارند نامساوی Bell-CHSH نقض می‌شود.

ما از همبستگی‌های فوق برای نمایش گذار فاز کوانتومی در حالت پایه‌ی برخی مدل‌های اسپینی استفاده خواهیم کرد، علاوه بر این انتظار داریم که با قرار گرفتن مدل‌های اسپینی در کانال‌های کوانتومی نیز همبستگی‌های مذکور گذار فاز را به‌خوبی نمایش دهند.

مدل‌های اسپینی مورد مطالعه‌ی ما همگی دارای تقارن Z_2 می‌باشند، یعنی با چرخش همه‌ی اسپین‌ها حول محور Z به اندازه‌ی π حالت سیستم عوض نمی‌شود، از این‌رو ماتریس چگالی دو همسایه‌ی نزدیک در حالت‌های مورد مطالعه‌ی ما به‌فرم X می‌باشد:

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix} \tag{۲-۱}$$

علت نامگذاری این ماتریس به ماتریس X این است که عناصر غیر صفر آن طوری در ماتریس قرار گرفته‌اند که تولید شکلی شبیه حرف X کرده‌اند.

از این‌رو پژوهش حاضر دارای بخش‌های زیر است:

در فصل اول و در ادامه‌ی بخش مقدمه مرور اجمالی بر آنسامبل‌های خالص و آمیخته، ماتریس چگالی و مفاهیم مرتبط با آن خواهیم داشت، سپس در فصل دوم به معرفی شبکه‌های اسپینی، تحول زمانی زنجیره‌ی اسپین‌ها و کانال‌های کوانتومی می‌پردازیم، در فصل سوم به بررسی منشأ همبستگی‌ها و نحوه‌ی محاسبه‌ی آن‌ها اقدام خواهیم کرد و به‌دنبال آن در فصل چهارم گذار فاز مدل‌های اسپینی Ising، XY، XXZ، LMG و Spin ladders در حالت پایه را مطالعه کرده و در

ادامه‌ی آن به بررسی گذار فاز مدل‌های اسپینی LMG و Spin ladders درون کانال‌های کوانتومی، باز هم توسط همبستگی‌های مذکور خواهیم پرداخت، و نهایتاً در فصل پنجم نتیجه‌گیری از بحث-ها، پیشنهادات و مسائل جدید و باز در این حوزه‌ی پژوهشی را ارائه خواهیم داد.

امید که پژوهش حاضر بتواند گامی هر چند کوچک، در راه ارتقای علمی کشور عزیزمان، ایران، بردارد و کمکی هرچند اندک به همه‌ی دوستان عزیزم که علاقه‌مند به تحقیق و پژوهش در حوزه-ی نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی می‌باشند، انجام دهد.

(۱-۲) آنسامبل‌های خالص و آمیخته و ماتریس چگالی:

بنا به تعریف، آنسامبل خالص، مجموعه‌ای از سیستم‌های فیزیکی متشابه است که هرکدام از اعضای آن با کت یکسان $\langle\Psi|$ مشخص می‌شود. در عوض در یک آنسامبل آمیخته، کسری از اعضا با جمعیت نسبی w_1 با $|\Psi\rangle_1$ توصیف می‌گردند وکسر دیگر با جمعیت نسبی w_2 با $|\Psi\rangle_2$ معین می‌شوند. به این ترتیب به بیان غیردقیق، یک آنسامبل آمیخته را همان‌طور که از نامش برمی-آید، به‌عنوان مخلوطی از آنسامبل‌های خالص در نظر می‌گیریم. کسرهای جمعیتی مقیدند که در شرط بهنجارش صدق کنند، یعنی $\sum_i w_i = 1$. لازم نیست که $|\Psi\rangle_1$ و $|\Psi\rangle_2$ متعامد باشند، به‌علاوه لازم نیست که تعداد جملات در جمع $\sum_i w_i$ برابر با بعد N فضای کت باشد، بلکه می‌تواند بیش از N نیز باشد. بنابراین عملگر چگالی ρ به‌صورت زیر قابل تعریف است:

$$\rho \equiv \sum_i w_i |\Psi\rangle_i \langle\Psi| \qquad (۱-۳)$$

از این‌رو می‌توان این‌گونه بیان کرد که یک آنسامبل خالص با $w_i = 1$ برای یک کت $|\Psi\rangle_i$ (مثلا با $i = n$) و $w_i = 0$ برای سایر کت‌های حالت، مشخص می‌شود. بنابراین عملگر چگالی متناظر با آن به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\rho = |\Psi\rangle_n \langle\Psi| \qquad (۱-٤)$$

که در آن هیچ جمعی وجود ندارد. واضح است که عملگر چگالی برای یک آنسامبل خالص خودتوان است، یعنی: $\rho^2 = \rho$، یا به‌طور معادل $\rho(\rho-1) = 0$، بنابراین برای یک آنسامبل خالص داریم:

$$tr(\rho^2) = 1. \qquad (۱-۵)$$

ویژ مقادیر در یک آنسامبل خالص برای عملگر چگالی، صفر یا یک هستند. با افزودن یک مجموعه کامل از کت‌های پایه، بین ρ و $(\rho-1)$ به‌طوری که عملگر هرمیتی ρ را قطری کند، می-توان این موضوع را مشاهده کرد. ماتریس چگالی برای یک آنسامبل خالص، وقتی که قطری شود به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad (۱-٦)$$

می‌توان نشان داد که $tr(\rho^2)$ وقتی‌که آنسامبل خالص است، بیشینه می‌شود. برای یک آنسامبل آمیخته $tr(\rho^2)$ یک عدد مثبت کوچک‌تر از یک است.

حال این سؤال مطرح می‌شود که اجزای یک سیستم کوانتومی بسته که با بردار حالت $|\Psi\rangle$ توصیف می‌شوند، در چه حالتی هستند و چگونه می‌بایست آن‌ها را توصیف کرد، در ادامه به این سؤال پاسخ خواهیم داد.

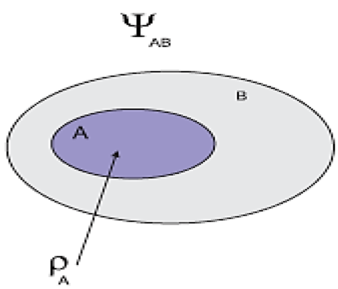
فرض کنید که دو ذره اسپین $1/2$ داریم و دو ذره در حالتی مثل حالت زیر قرار دارند:

$$|\Psi\rangle_{AB} = a|++\rangle + b|+-\rangle + c|-+\rangle + d|--\rangle \qquad (۱-۷)$$

می‌پرسیم که حالت ذره‌ی A چیست؟ در این‌جا درست است که هر دو ذره در یک حالت مشخص قرار دارند اما نمی‌توان به ذره‌ی A بردار حالت مشخصی نسبت داد. در این مورد و در تمامی موارد مشابه که دستگاه کوانتومی مورد نظر ما جزیی از یک دستگاه بزرگ‌تر است، حالت آن با ماتریس چگالی مشخص می شود [۷۷].

به‌طور کلی فرض کنید که یک سیستم از دو بخش A و B تشکیل شده باشد؛ بنابر اصول مکانیک کوانتومی به این سیستم فضای هیلبرت $\mathrm{H} = \mathrm{H}_A \otimes \mathrm{H}_B$ نسبت داده می‌شود. فرض کنید که $\{\ |i\rangle\ \}_{i=1}^{M}$ یک پایه برای H_A و $\{\ |\mu\rangle\ \}_{\mu=1}^{N}$ یک پایه برای $\mathrm{H}_\mathbf{B}$ باشد، در این صورت یک حالت کلی از سیستم A و B توسط بردار حالت زیر داده می‌شود (شکل۱-۱):

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} \Psi_{i\mu} |i, \mu\rangle \qquad (۸-۱)$$



❋(**شکل(۱-۱):** یک سیستم بسته بایک بردار حالت توصیف می‌شود، ولی اجزای آن با یک ماتریس چگالی مشخص خواهند شد.)❋

حال هر عملگر M_A روی دستگاه A چیزی نیست جز عملگری به‌شکل $M \otimes I$. در نتیجه داریم:

$$\langle M \rangle_A = \langle \Psi | M \otimes I | \Psi \rangle = tr_{AB}((M \otimes I)\ |\Psi\rangle\langle\Psi|\ )$$

$$= tr_A(tr_B((M \otimes I)\ |\Psi\rangle\langle\Psi|\ )) \qquad (۹-۱)$$

$$= tr_A(M\rho_A)$$

که در آن:

$$\rho_A = tr_B(\ |\Psi\rangle\langle\Psi|\ ) \qquad (۱۰-۱)$$

ماتریس چگالی دستگاه A نامیده می‌شود و به این ترتیب ρ_A جانشین حالت کوانتومی دستگاه A است.

به‌طریق مشابه ماتریس چگالی دستگاه B با رابطه‌ی $\rho_B = tr_A(\ |\Psi\rangle\langle\Psi|\ )$ داده می‌شود. می‌توان فرم صریح‌تر ماتریس چگالی را نیز به‌دست آورد. با توجه به رابطه‌ی (۱-۸) خواهیم داشت:

$$\rho_A = \sum_{i,j} \rho_{ij} |i\rangle\langle j| \qquad (۱۱-۱)$$

که در آن:

$$(\rho_A)_{ij} = \sum_{\mu} \Psi_{i\mu}\Psi^*_{j\mu} \qquad (۱۲-۱)$$

و

$$\rho_{\mathbf{B}} = \sum_{\mu,\nu} \rho_{\mu\nu} |\mu\rangle\langle\nu| \qquad (۱۳-۱)$$

به‌طوری که:

$$(\rho_B)_{\mu\nu} = \sum_{i} \Psi_{i\mu}\Psi^*_{i\nu} \qquad (۱٤-۱)$$

با توجه به این عبارت‌ها به‌راحتی می‌توان خواص سه‌گانه‌ی ماتریس چگالی را تحقیق کرد، یعنی اینکه ρ یک ماتریس هرمیتی مثبت با ردّ[۱۸] واحد است.

در سیستم‌های دوکیوبیتی، که سیستم‌های مورد مطالعه‌ی ما از این نوع می‌باشند، ماتریس چگالی یک ماتریس 4×4 خواهد بود و درصورتی‌که سیستم تقارن Z_2 داشته باشد، ماتریس چگالی به‌شکل یک ماتریس X در خواهد آمد.

---

[۱۸] Trace.