بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه فردوسی مشهد

نگاشت‌های نگهدار پوچساز، ضرب‌گرها و اشتقاق‌ها

استاد راهنما

دکتر شیرین حجازیان

استاد مشاور

دکتر فریدون رهبرنیا

پژوهشگر

لیلا کشفی

دی ماه ۱۳۹۰

الهی!

بساز کار من، و منگر به کردار من.

دلی ده که طاعت افزون کند.

طاعتی ده که به بهشت رهنمون کند.

علمی ده که در او آتش هوا نبود.

عملی ده که در او آب زرق و ریا نبود.

دیده‌ای ده که عز ربوبیت تو بیند.

نفسی ده که حلقه بندگی تو در گوش کند.

جانی ده که زهر حکمت تو به طبع نوش کند.

...

مناجاتی از خواجه عبدالله انصاری

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و بزرگوارم،

که اولین آموزگاران زندگی‌ام بوده‌اند

و تقدیم به

همه آنان که در مسیر آموختن برایم چراغی افروختند. . .

سپاس...

سپاس خدای متعال را که بر من منت گذاشت و یاریم کرد تا این مرحله از دوران تحصیل را نیز به پایان رسانم. بی شک در گذر از این مسیر، از راهنمایی و کمک اساتید بزرگوار و همراهی و همدلی دوستان عزیزم بی‌نیاز نبوده‌ام. پس بر خود لازم می‌دانم که در کمال ادب و تواضع از تک تک این عزیزان سپاس گزاری کنم. به ویژه،

از استاد محترم و گرانقدرم سرکار خانم *دکتر شیرین حجازیان* بخاطر راهنمایی‌های بی‌دریغ برای پیشبرد علمی این پایان‌نامه و نیز همراهی و حمایت‌های دلسوازنه ایشان بی‌اندازه سپاسگزارم.

همچنین از استاد محترم مشاور، جناب آقای *دکتر فریدون رهبرنیا* بسیار متشکرم.

از اساتید بزرگوار آقایان *دکتر حمیدرضا ابراهیمی ویشکی* و *دکتر مجید میرزاوزیری* که داوری این پایان نامه را به عهده گرفتند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

در پایان از همه دوستانی که با همدلی‌ها، همراهی‌ها و حمایت‌های بی‌دریغشان مرا در به سرانجام رساندن تلاشی که حاصلش پیش روی شماست، یاری کردند، خالصانه و صمیمانه قدردانی می‌کنم. به ویژه از دوست عزیزم **پری حاجی عباس‌زاده آذر** که از ابتدای دوره تحصیلی کارشناسی ارشد همواره در کنارم بوده است، بسیار ممنونم.

تقدیر و تشکر از همه این عزیزان در این مجال کوتاه، اگرچه لازم است اما بی شک کافی نیست. پس فرصت را غنیمت می‌شمارم و در محضر خداوند رحیم و مهربان، موفقیت و سلامت همه آنان را آرزو می‌کنم.

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه فردوسی مشهد

Annihilator-preserving maps, multipliers, and derivations

Superviser

Dr. Shirin Hejazian

Adviser

Dr. Fereidoun Rahbarnia

author

Leila Kashfi

Jan 2012

فهرست مطالب

مقدمه

مفهوم اشتقاق موضعی در سال ۱۹۹۰ توسط کادیسون[۱] در [۲۱] و لارسون[۲] و سرور[۳] در [۲۳] معرفی شد. سؤالی که طبیعتاً به ذهن خطور می‌کند این است که «چه زمانی اشتقاق‌های موضعی به طور اتوماتیک اشتقاق هستند؟». تا کنون افراد بسیاری ارتباط بین اشتقاق‌های موضعی و اشتقاق‌ها را مورد بررسی قرار داده‌اند؛

کادیسون در [۲۱] نشان داد که اشتقاق‌های موضعی نرم-پیوسته از یک جبر فون نویمان به دوگان هر دو مدول، اشتقاق هستند.

لارسون و سرور در [۲۳] اشتقاق‌های موضعی و خودریختی‌ها روی $B(X)$ را که X یک فضای باناخ است، مورد مطالعه قرار دادند.

کریست[۴] در [۶] و [۷] برای مشبکهٔ زیرفضایی جابجایی $\mathcal{L}$ روی فضای هیلبرت و متناهی-بعد $\mathcal{H}$، اشتقاق‌های موضعی و خودریختی‌های موضعی را روی $\mathrm{alg}\mathcal{L}$ بررسی کرد.

جانسون[۵] در [۱۹] نتایج کادیسون را تعمیم داد و ثابت کرد که هر اشتقاق موضعی از یک C^*-جبر مانند $\mathcal{A}$ به هر $\mathcal{A}$-دو مدول باناخ یک اشتقاق است؛ به علاوه نشان داد که هر اشتقاق موضعی از $\mathcal{A}$ به هر $\mathcal{A}$-دو مدول باناخ، کران‌دار است.

---

[۱] Kadison

[۲] Larson

[۳] Sourour

[۴] Crist

[۵] Johnson

هادوین[۶] و لی[۷] در [۱۴] برای یک فضای هیلبرت مختلط و تفکیک‌پذیر مانند $\mathcal{H}$، اشتقاق‌های موضعی را روی بعضی از جبرهای انعکاسی که شامل جبرهای مشبکه‌ای زیرفضایی جابجایی و کاملاً توزیع‌پذیر، جبرهای $\mathcal{J}$-مشبکه‌ای زیرفضایی و جبرهای یکدار ضعیف-بسته از $B(\mathcal{H})$ مورد بررسی قرار دادند. همچنین در [۱۵] روی برخی از جبرهایی که می‌توانند، به عنوان جبر، توسط خودتوان‌هایشان تولید شوند، مطالعه نموده و اشتقاق‌ها و خودریختی‌های موضعی را روی این جبرها مورد بحث قرار داده‌اند.

زانگ[۸]، پن[۹] و یانگ[۱۰]، در [۳۲] اشتقاق‌های موضعی را روی CSL-جبرهای خاص بررسی نمودند.

احمد[۱۱]، در [۱] ثابت کرد که هر اشتقاق موضعی از جبر همهٔ ماتریس‌های بالا مثلثی روی یک حلقهٔ جابجایی، بتوی خودش، یک اشتقاق است و سرانجام یانگ‌فنگ[۱۲] و وی[۱۳] در [۳۱] نشان دادند که اگر $\mathcal{D}$ یک مشبکهٔ زیرفضایی مثلثی قوی-دوگانه باشد، آنگاه هر اشتقاق موضعی از $\mathrm{alg}\mathcal{D}$ به $B(X)$، که X یک فضای باناخ انعکاسی مختلط ناصفر می‌باشد، یک اشتقاق است.

مواردی که ذکر شد نمونه‌هایی از مهمترین کارهای انجام شده در زمینهٔ ارتباط بین اشتقاق‌ها و اشتقاق‌های موضعی هستند. در این پایان‌نامه با استفاده از شرایطی که در آن نگاشت‌های

[۶] Hadwin
[۷] Li
[۸] Zhang
[۹] Pan
[۱۰] Yang
[۱۱] Ahmed
[۱۲] Yongfeng
[۱۳] Wei

نگهدار پوچساز ضرب‌گر هستند (گزارهٔ ۱.۲.۳)، از نظرگاه متفاوتی به این موضوع پرداخته شده است. عمدهٔ مطالب پایان‌نامهٔ حاضر از مقالات

J. Alaminos, M. Bresar, J. Extremera, A. Villena, Characterizing homomorphisms and derivations on C^*-algebras [2]

و

J. Li, Z. Pan ,Annihilator-preserving maps, multipliers, and derivations [24]

استخراج و در پنج فصل نگاشته شده است؛

فصل ۱ به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص یافته است که در سراسر این پایان‌نامه مورد استفاده قرار خواهند گرفت. در فصل ۲، ضرب‌گرها و نگاشت‌های نگهدار پوچساز که ابزار اصلی کار هستند، معرفی می‌شوند. مهم‌ترین هدف در این فصل، برقراری ارتباط بین این دو مفهوم است. در فصل ۳، که یکی از دو فصل اصلی در این پایان‌نامه است، پس از معرفی مفهوم اشتقاق (تعمیم‌یافته) و اشتقاق (تعمیم‌یافتهٔ) موضعی، با استفاده از ابزاری که در فصل ۲ به دست آورده‌ایم شرایطی را بررسی می‌کنیم که در آن هر اشتقاق (تعمیم‌یافتهٔ) موضعی، یک اشتقاق (تعمیم‌یافته) خواهد بود. در فصل ۴، که دومین فصل اساسی این پایان‌نامه می‌باشد، ارتباط بین اشتقاق و اشتقاق موضعی به طور خاص روی C^*-جبرها مورد بررسی قرار گرفته و برای این منظور از مفهوم همریختی به عنوان ابزار استفاده شده است.

چنان که خواهید دید در فصل ۳ برای برقراری ارتباط بین مفاهیم اشتقاق و اشتقاق موضعی از شرایطی استفاده شده است که جبرها می‌توانند توسط خودتوان‌هایشان تولید شوند. در فصل ۵ دسته‌ای خاص از گراف جبرها را، به عنوان مثالی از جبرهایی که ممکن است فقط شامل خودتوان‌های بدیهی باشند، معرفی نموده و سپس با استفاده از شرایطی متفاوت، اشتقاق‌ها و ضرب‌گرهای موضعی را روی این جبرها مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

ضمناً، بخش اول هر فصل به معرفی مفاهیم اصلی مورد نیاز در آن فصل، اختصاص یافته است.

فصل ۱

تعاریف و قضایای پیش‌نیاز

در این فصل به بیان تعاریف، قضایا و مفاهیم اولیهٔ مورد استفاده در این پایان‌نامه می‌پردازیم. چنان که در مقدمه گفته شد، مفاهیم اولیهٔ اختصاصی‌تر با توجه به موضوع هر فصل، در بخش اول همان فصل آورده شده است.

مطالب این فصل اغلب از [۳]، [۵]، [۱۱] و [۲۸] استخراج شده‌اند.

۱.۱ تعریف. فرض کنیم X، Y و Z فضاهای نرم‌دار روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. نگاشت

$$\phi : X \times Y \to Z$$

را یک *نگاشت دوخطی* گوییم هرگاه

(آ) به ازای هر $y \in Y$، نگاشت $x \mapsto \phi(x,y)$ خطی باشد؛

(ب) به ازای هر $x \in X$، نگاشت $y \mapsto \phi(x,y)$ خطی باشد.

وقتی $Z = \mathbb{F}$، چنین نگاشتی *فرم دوخطی* نامیده می‌شود.

۲.۱ تعریف. نگاشت دوخطی $\phi : A \times Y \to Z$ *کران‌دار* نامیده می‌شود هرگاه $M > ۰$ ی وجود داشته باشد به طوری که

$$\|\phi(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|, \qquad (x \in X, y \in Y).$$

در این صورت نرم ϕ به صورت

$$\|\phi\| = \sup\{\|\phi(x,y)\|;\ \|x\| \leq ۱, \|y\| \leq ۱\}$$

تعریف می‌شود.

مجموعهٔ همهٔ نگاشت‌های دوخطی کران‌دار از $X \times Y$ به Z را با نماد $\mathrm{BL}(X, Y; Z)$ نشان می‌دهیم.

۳.۱ تعریف. فضای برداری $\mathcal{A}$، همراه با نگاشت دوخطی $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ با ضابطهٔ

$$(a,b) \mapsto ab,$$

یک جبر نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $a, b, c \in \mathcal{A}$،

$$a(bc) = (ab)c.$$

جبر $\mathcal{A}$ را همراه با نرم $\|.\|$ یک جبر نرم‌دار گوییم هرگاه به ازای هر $a,b \in \mathcal{A}$،

$$\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|.$$

یک جبر نرم‌دار کامل را جبر باناخ گویند.

گوییم $\mathcal{A}$ یک جبر نرم‌دار و یکدار است هرگاه عنصر $\mathbf{1}$ در $\mathcal{A}$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in \mathcal{A}$، داشته باشیم $a\mathbf{1} = \mathbf{1}a = a$ و $\|\mathbf{1}\| = ۱$.

۴.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر نرم‌دار باشد. فضای باناخ $\mathcal{B}$ را تتمیم $\mathcal{A}$ گوییم هرگاه یک یکریختی طولپای از $\mathcal{A}$ بروی زیرجبری چگال از $\mathcal{B}$ وجود داشته باشد.

$\mathcal{B}$ در حد یکریختی طولپای، یکتا است.

۵.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر و $\mathcal{M}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ باشند. $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$-*مدول* چپ نامیده می‌شود هرگاه نگاشت $(a,m) \rightarrow am$ از $\mathcal{A}\times\mathcal{M}$ به توی $\mathcal{M}$ در شرایط زیر صدق کند

(الف) به ازای هر $a \in \mathcal{A}$، نگاشت $m \mapsto am$ روی $\mathcal{M}$ خطی باشد؛

(ب) به ازای هر ثابت $m \in \mathcal{A}$، نگاشت $a \mapsto am$ روی $\mathcal{A}$ خطی باشد؛

(ج) به ازای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ و هر $m \in \mathcal{M}$، داشته باشیم $a_۱(a_۲m) = (a_۱a_۲)m$.

به طور مشابه، $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$-*مدول راست* است هر گاه نگاشت $(a,m) \rightarrow ma$ از $\mathcal{A}\times\mathcal{M}$ به توی $\mathcal{M}$ در شرایط مشابه با (الف) و (ب) صدق کند و همچنین به ازای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ و هر $m \in \mathcal{M}$، داشته باشیم $(ma_۱)a_۲ = m(a_۱a_۲)$.

$\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$-*دو مدول* نامیده می‌شود هرگاه $\mathcal{A}$-مدول چپ و $\mathcal{A}$-مدول راست باشد و به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}$ و $m \in \mathcal{M}$، داشته باشیم $a(mb) = (am)b$.

واضح است که هر جبر مانند $\mathcal{A}$ با ضرب خودش، یک $\mathcal{A}$-دو مدول خواهد بود.

۶.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر نرم‌دار و $\mathcal{M}$ یک فضای نرم‌دار روی $\mathbb{F}$ باشند. $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$-*مدول چپ نرم‌دار* نامیده می‌شود هرگاه $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$-مدول چپ باشد و $K > ۰$ موجود باشد به طوری که

$$\|am\| \leq K\|a\| \, \|m\|, \quad (a \in \mathcal{A}, m \in \mathcal{M}).$$

$\mathcal{A}$-*مدول راست نرم‌دار* به طور مشابه تعریف می‌شود.

$\mathcal{M}$ را یک $\mathcal{A}$-*دو مدول باناخ* نامیم هرگاه $\mathcal{M}$ به طور همزمان $\mathcal{A}$-دو مدول چپ نرم‌دار و $\mathcal{A}$-دو مدول راست نرم‌دار باشد و به عنوان یک فضای نرم‌دار، کامل باشد. همچنین اگر $\mathcal{A}$ یک جبر یکدار باشد، $\mathcal{M}$ را یک $\mathcal{A}$-*دو مدول یکدار* نامیم هرگاه به ازای هر $m \in \mathcal{M}$،

$$\mathbf{۱}m = m\mathbf{۱} = m,$$

که در آن **۱** عنصر واحد $\mathcal{A}$ است.

۷.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باشد. یک *ایده‌آل بیشین* در $\mathcal{A}$، ایده‌آلی سره در $\mathcal{A}$ است که مشمول در هیچ ایده‌آل سرهٔ دیگر در $\mathcal{A}$ نباشد.

۸.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر یکدار باشد. اشتراک تمام ایده‌آل‌های بیشین $\mathcal{A}$ را *رادیکال* $\mathcal{A}$ نامیم و آن را با نماد $\mathrm{rad}\mathcal{A}$ نمایش می‌دهیم.

اگر $\mathrm{rad}\mathcal{A} = \{۰\}$، آنگاه $\mathcal{A}$ را *نیم‌ساده* نامیم.

اگر $\mathcal{A}$ یکدار نباشد، جبر یکدار شدهٔ $\mathcal{A}$، یعنی $\mathcal{A} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}۱$ را در نظر می‌گیریم. در این حالت

$$\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{rad}(\mathcal{A}_۱) \cap \mathcal{A}.$$

۹.۱ تعریف. دوتایی $(\mathcal{A}, *)$ را یک $*$-جبر گوییم هرگاه نگاشت خطی-مزدوج $a \mapsto a^*$ روی جبر $\mathcal{A}$ طوری تعریف شود که به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $a^{**} = a$ و $(ab)^* = b^*a^*$.
$*$-جبر باناخ $\mathcal{A}$ را یک C^*-جبر گوییم هرگاه به ازای هر $a \in \mathcal{A}$،

$$\|a^*a\| = \|a\|^۲.$$

۱۰.۱ تعریف. فرض کنیم X یک مجموعهٔ دلخواه و

$$\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

خانواده‌ای ناتهی از نگاشت‌ها باشد که در آن هر Y_α یک فضای توپولوژیک است. در این صورت *توپولوژی* تولید شده توسط مجموعه‌هایی به شکل $f^{-۱}(U_\alpha)$، که به ازای هر $\alpha \in A$ مجموعهٔ U_α در Y_α باز است، *توپولوژی ضعیف* نامیده می‌شود. در واقع این توپولوژیِ منحصر به فرد، *ضعیف‌ترین* توپولوژی روی X است که در آن همهٔ f_αها پیوسته هستند.

۱۱.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار (روی $\mathbb{C}$) و X^* فضای دوگان آن باشد. به ازای هر $x \in X$، نگاشت خطی $\hat{x} : X^* \to \mathbb{C}$ را با ضابطهٔ

$$\hat{x}(f) = f(x), \quad (f \in X^*)$$

تعریف می‌کنیم. حال توپولوژی ضعیفِ تعریف شده توسط خانواده

$$\hat{X} = \{\hat{x} : x \in X\} \subseteq X^{**}$$

روی فضای برداری X^*، *توپولوژی ضعیف** نامیده می‌شود.

۱۲.۱ تعریف. فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. متناظر با هر $T \in B(X,Y)$، عملگر $T^* \in B(Y^*, X^*)$ را با ضابطهٔ

$$T^*(f) = f(T), \quad (f \in Y^*)$$

تعریف می‌کنیم. T^* را *عملگر الحاقی* T نامیم.

به همین ترتیب، متناظر با هر $T^* \in B(Y^*, X^*)$، عملگر $T^{**} \in B(X^{**}, Y^{**})$ با ضابطهٔ

$$T^{**}(F) = F(T^*), \quad (F \in X^{**})$$

تعریف می‌شود که آن را *عملگر الحاقی دوم* T نامیم.

۱۳.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد و $x \in \mathcal{H}$. در این صورت تابع

$$\begin{aligned} &p_x : B(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}^+ \\ &u \mapsto \|u(x)\|, \end{aligned}$$

یک نیم-نرم روی $B(\mathcal{H})$ است. توپولوژی موضعاً محدب روی $B(\mathcal{H})$، تولید شده توسط خانوادهٔ تفکیک کنندهٔ $\{p_x\}_{x\in\mathcal{H}}$، *توپولوژی عملگری قوی* نامیده می‌شود که آن را با نماد SOT نمایش می‌دهند.

۱۴.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. در این صورت توپولوژی موضعاً محدب هاسدورف روی $B(\mathcal{H})$، تولید شده توسط خانواده تفکیک کننده از نیم-نرم‌های

$$\begin{aligned} &B(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}^+ \\ &u \mapsto |< u(x), y >|, \qquad (x, y \in \mathcal{H}) \end{aligned}$$

توپولوژی عملگری ضعیف نامیده می‌شود که آن را با نماد WOT نمایش می‌دهند.

۱۵.۱ قضیه. ([۵]، نتیجهٔ ۲.۸) *اگر S یک زیرمجموعهٔ محدب از $B(\mathcal{H})$ باشد، آنگاه WOT-بستار S با SOT-بستار S برابر است.*

۱۶.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. اگر $\mathcal{A}$ یک $*$-زیرجبر بسته از $B(\mathcal{H})$ در توپولوژی عملگری قوی باشد، آنگاه گوییم $\mathcal{A}$ یک *جبر فون نویمان* است.

بنا بر ۱۵.۱، بسته بودن در SOT و WOT معادل است، پس هر جبر فون نویمان در توپولوژی عملگری ضعیف روی $B(\mathcal{H})$ نیز بسته است.

از آنجا که توپولوژی عملگری قوی از توپولوژی نرم ضعیف‌تر است، هر جبر فون نویمان یک C^*-جبر است.

۱۷.۱ تعریف. فرض کنیم E زیرمجموعه‌ای از جبر $\mathcal{A}$ باشد. زیرمجموعهٔ E' از $\mathcal{A}$ را که به صورت

$$E' = \{a \in \mathcal{A};\ xa = ax, x \in E\}$$

تعریف می‌شود، *جابجاگر* E (در $\mathcal{A}$) نامیم. جابجاگر $\mathcal{A}$ در $\mathcal{A}$ یعنی $\mathcal{A}'$، مرکز $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود.

۱۸.۱ گزاره. ([۵]، گزاره ۲.۱۲) *فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای از $B(\mathcal{H})$ باشد. در این صورت*

(آ) *اگر $S \subseteq T$، آنگاه $T' \subseteq S'$ و $(S'')' = (S')''$.*

(ب) *S' یک جبر قوی- بسته و شامل عضو همانی است.*

۱۹.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باشد. در این صورت $\mathcal{A}$ را یک جبر *توپولوژیک* نامیده می‌شود هرگاه

(آ) $\mathcal{A}$ یک فضای توپولوژیک (هاسدورف) باشد و

(ب) نگاشت $f;(a,b) \mapsto ab$ در توپولوژی حاصل‌ضربی روی $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$، پیوسته باشد.

۲۰.۱ تعریف. میدان $\mathbb{F}$ را یک *میدان جبری-بسته* گوییم هرگاه هر چندجمله‌ای یک متغیرهٔ درجه اول با ضرایبی در $\mathbb{F}$، یک ریشه در $\mathbb{F}$ داشته باشد.

فصل ۲

نگاشت‌های نگهدار پوچساز و ضرب‌گرها

در بخش اول از این فصل، مفاهیم ضرب‌گر، پوچساز و نگاشت نگهدار پوچساز معرفی خواهد شد. در بخش دوم قضیه‌های ۲.۲.۵ و ۲.۲.۶ ارتباطی میان دو مفهوم ضربگر و نگاشت نگهدار پوچساز ایجاد خواهند کرد. قضایای این فصل برای بیان احکام اساسی فصل بعد، بسیار ضروری است.

اصلی‌ترین مطالب این فصل از [۲۴] برداشت شده است.

۱.۲ مفاهیم مقدماتی

از این پس در سراسر پایان‌نامه فرض می‌کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت مختلط و تفکیک‌پذیر، $B(\mathcal{H})$ مجموعهٔ همهٔ عملگرهای خطی و کران‌دار روی $\mathcal{H}$، $\mathcal{A}$ یک جبر یکدار روی $\mathbb{C}$، $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$-دو مدول و f یک نگاشت خطی از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{M}$ باشند.

۱.۱.۲ تعریف. یک مجموعهٔ مرتب جزئی مانند X را یک مشبکه نامیم هرگاه برای هر دو عنصر دلخواه $x, y \in X$، بزرگ‌ترین کران پایین x و y (g.l.b) با نماد $x \wedge y$ و کوچک‌ترین کران بالای آنها (l.u.b) با نماد $x \vee y$ در X واقع شوند.

$x \wedge y$ و $x \vee y$ را به ترتیب *وست* و *رسند* x و y نیز می‌نامند.

۲.۱.۲ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $\mathcal{L}$ گردایه‌ای از زیرفضاهای بسته در $\mathcal{H}$ باشد که شامل ۰ و $\mathcal{H}$ است. به ازای هر خانواده از عناصر $\mathcal{L}$ مانند $\{M_r\}$ تعریف می‌کنیم

$$\bigvee M_r = \overline{\mathrm{span}\{M_r\}} \quad \text{و} \quad \bigwedge M_r = \bigcap M_r$$

در این صورت $\mathcal{L}$ یک مشبکه است که آن را مشبکهٔ *زیرفضایی* نامند.

۳.۱.۲ تعریف. یک مشبکهٔ زیرفضایی کلاً مرتب را یک *آشیانه* نامیم.

۴.۱.۲ تعریف. جبر تمام عملگرهایی که یک آشیانه را پایا نگه می‌دارند، جبر *آشیانه‌ای* نام دارد.

می‌دانیم که اگر M زیرفضایی بسته از $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$. متناظر با این تجزیه می‌توان یک تصویر منحصر به فرد مانند P_M بروی M تعریف کرد به طوری که