دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

ساختار ایدالی برخی جبرهای گروهی

نگارش:

سعید رسولی

استاد راهنما: **دکتر سعید مقصودی**

استاد مشاور: **دکتر حبیب امیری**

مهر ۱۳۸۸

تقدیم به همسر مهربانم

چکیده

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ باشد. دوگان دوم $\mathfrak{A}$ با ضرب آرنز به یک جبر باناخ تبدیل می‌شود. در این پایان نامه برخی خواص مقدماتی جبر $\mathfrak{A}^{**}$ را بررسی می‌کنیم. بویژه برخی قضایا درباره‌ی ایدال‌های ماکسیمال منظم و رادیکال $\mathfrak{A}^{**}$ بیان و اثبات می‌کنیم.

چنانچه G گروه موضعاً فشرده باشد، دوگان دوم جبر گروهی $L^1(G)$ را با ضرب آرنز مجهز می‌کنیم. بسیاری از خواص اساسی جبر $L^1(G)^{**}$ را بررسی می‌کنیم. بویژه نشان داده می‌شود رادیکال $L^1(G)^{**}$ چنانچه G گروه ناگسسته باشد، تفکیک‌ناپذیر است. همچنین ایدال‌های ماکسیمال منظم مشخصه‌سازی می‌شوند.

رده بندی موضوعی : $43A20$،$43A22$

کلمات کلیدی : ایدال ماکسیمال منظم، جبر باناخ، جبرگروهی، رادیکال، ضرب آرنز.

فهرست مندرجات

پیش گفتار

در سال ۱۹۵۱ آرنز در [۱] برای اولین بار روی دوگان دوم جبر باناخ $\mathfrak{A}$، دو ضرب به نام‌های ضرب اول و دوم که آن‌ها را به ترتیب با $\diamond$ و $\circ$ نشان می‌دهیم، تعریف کرد. ضرب اول آرنز روی $\mathfrak{A}^{**}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} < F \diamond G, f > &= < F, Gf >, \\ < Gf, a > &= < G, fa >, \\ < fa, b > &= < f, ab > . \end{aligned}$$

که در آن $F, G \in \mathfrak{A}^{**}$، $f \in \mathfrak{A}^{*}$ و $a, b \in \mathfrak{A}$. ضرب دوم آرنز نیز به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} < F \circ G, f > &= < G, fF >, \\ < fF, a > &= < F, af >, \\ < af, b > &= < f, ba > . \end{aligned}$$

برای آشنایی با خواص جبر باناخ $\mathfrak{A}^{**}$ با ضرب‌های آرنز مقاله‌ی [۹] مرجع مناسبی است. سیوین و یود در [۵] برخی نتایج اولیه درباره‌ی رادیکال و ایدال‌های جبر $\mathfrak{A}^{**}$ را آورده‌اند. در سال‌های اخیر نیز تحقیقات وسیعی در این راستا انجام شده است، برای مثال به مقاله‌ی [۱۸] مراجعه کنید.

فرض کنید G گروه موضعاً فشرده و $L^1(G)$ جبر گروهی آن باشد. سیوین و یود در [۵] اولین کار اساسی درباره‌ی ساختار جبر باناخ $L^1(G)^{**}$ را انجام داده‌اند. ایشان در آن مقاله بویژه نشان دادند $L^1(G)^{**}$ در حالتی که G غیر گسسته است نیم‌ساده نیست به علاوه نتایج مشابهی برای حالتی که G گسسته است نیز به دست آوردند. سیوین در سال ۱۹۶۲ در [۴] ایدال‌های منظم چپ $L^1(G)^{**}$ را بررسی کرده است. وی علاوه بر نتایج دیگر نشان می‌دهد ایدال‌های چپ ماکسیمال $L^1(G)^{**}$ یا ضعیف* بسته‌اند و یا هسته‌ی یک تابعک خطی ضربی

روی $L^1(G)^{**}$ هستند. وی همچنین نشان می‌دهد ایدال‌های چپ تحت انتقال طبیعی روی $L^1(G)^{**}$ پایا نیستند و همچنین زیر فضای پایا تحت انتقال طبیعی روی $L^1(G)^{**}$ لزوماً ایدال چپ یا راست در $L^1(G)^{**}$ نیستند. در سال ۱۹۹۲ فیلالی در [۱۱] نتایج مشابهی برای دوگان دوم جبر باناخ تعویض‌پذیر، با معرفی مفهوم جدید تابعک‌های $\chi-$ پایا بدست آورده است. در سال ۱۹۷۳ گرانیرر در [۱۹] با استفاده از روش گلیک [۲۲] تفکیک‌ناپذیری رادیکال $L^1(G)^{**}$ را نشان می‌دهد. مساله‌ی تفکیک‌ناپذیری رادیکال $L^1(G)^{**}$ در حالتی که G گسسته و غیر میانگین‌پذیر باشد همچنان حل نشده است. ساختار ایدال‌های چپ و راست جبرهای گروهی $L^1(G)^{**}$ و $LUC(G)^*$ را فیلالی در [۱۲]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۵] و [۱٦] بررسی کرده است.

در فصل اول این پایان‌نامه برخی از مفاهیم مورد نیاز از آنالیز تابعی و آنالیز هارمونیک را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم ضرب‌های آرنز را روی دوگان دوم جبر باناخ دلخواه $\mathfrak{A}$ معرفی می‌کنیم و برخی خواص مقدماتی آن را بیان می‌کنیم. در این فصل همچنین چند قضیه در باره‌ی ساختار جبر باناخ $L^1(G)^{**}$ اثبات می‌کنیم. بررسی رادیکال جبر باناخ $L^1(G)^{**}$ فصل سوم را تشکیل می‌دهد. سرانجام در فصل چهارم به بررسی مشخصه‌سازی ایدال‌های چپ ماکسیمال منظم جبر $L^1(G)^{**}$ می‌پردازیم.

فصل ۱

مقدمات و پیشنیازها

۱.۱ پیشنیازهایی از آنالیز تابعی و آنالیز ریاضی

در این فصل به ارایه‌ی مفاهیم، نمادها و نتایج اساسی مورد نیاز در فصل‌های بعد می‌پردازیم. ابتدا برخی از مفاهیم مربوط به نظریه‌ی اندازه و آنالیز حقیقی را ارایه می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم X یک مجموعه باشد.

(الف) خانواده‌ی $\mathcal{M}$ از زیر مجموعه‌های X را یک $\sigma-$ جبر گوییم، هرگاه دارای خواص زیر باشد:

(۱) $X \in \mathcal{M}$.

(۲) اگر $E \in \mathcal{M}$، آن گاه $E^c \in \mathcal{M}$، که در آن E^c، متمم E نسبت به X است.

(۳) اگر $E_۱, E_۲, \ldots \in \mathcal{M}$، آن گاه $\bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$.

(ب) اگر $\mathcal{M}$ یک $\sigma-$جبر در X باشد، آن گاه $(X, \mathcal{M})$ را یک فضای اندازه و اعضای $\mathcal{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامیم.

(ج) هر گاه $(X, \mathcal{M})$ یک فضای اندازه باشد، نگاشت $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ را اندازه‌پذیر گوییم، اگر به ازای هر مجموعه‌ی باز V در $\mathbb{C}$، $f^{-۱}(V)$ یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر در X باشد.

(د) یک اندازه‌ی مثبت، تابعی $[\circ,\infty]$ — مقدار مانند μ است که روی یک σ—جبر مانند $\mathcal{M}$ تعریف شده است به طوری که $\mu(\emptyset)=\circ$ و μ جمعی شمارش‌پذیر است، یعنی برای دنباله‌ی E_i از عناصر دو به دو مجزای $\mathcal{M}$ داریم :

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i).$$

(هـ) فرض کنیم $(X,\mathcal{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر و μ یک اندازه‌ی مثبت باشد. در این صورت تابع مختلط—مقدار و اندازه‌پذیر S بر X که بردش متناهی باشد، یک تابع ساده نام دارد.

در واقع اگر $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ مقادیر متمایز تابع ساده‌ی S باشند و قرار دهیم $A_i:=\{x\in X: S(x)=\alpha_i\}$ آن گاه داریم :

$$S=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}.$$

که در آن χ_{A_i} تابع مشخصه‌ی A_i، تعریف شده روی X است.

حال فرض کنیم $S:X\longrightarrow[\circ,\infty]$ یک تابع ساده باشد و $E\in\mathcal{M}$. در این صورت تعریف می‌کنیم :

$$\int_E S d\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i\cap E).$$

حال اگر $f:X\longrightarrow[\circ,\infty]$ تابعی اندازه‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم :

$$\int_E f d\mu=\sup\int_E S d\mu.$$

که در آن سوپریمم روی تمام توابع اندازه‌پذیر ساده‌ی S با شرط $\circ\le S\le f$ گرفته شده است.

تعریف فوق را به طور طبیعی برای توابع $f:X\longrightarrow\mathbb{C}$ گسترش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد.

(الف) اگر $\mathcal{B}(X)$ کوچکترین σ—جبر شامل تمام زیر مجموعه‌های باز X باشد، آن گاه $\mathcal{B}(X)$ را σ—جبر مجموعه‌های بورل X و اعضای $\mathcal{B}(X)$ را مجموعه‌های بورل گوییم.

(ب) اندازه‌ی μ روی X را بورل می‌نامیم، اگر روی $\mathcal{B}(\mathrm{X})$ تعریف شده باشد.

(ج) یک اندازه‌ی مختلط بورل روی X، یک تابع مختلط‌ـمقدار μ تعریف شده روی $\mathcal{B}(X)$ است، به طوری که جمعی شمارش پذیر است، یعنی اگر E برابر اجتماع مجزای خانواده‌ی $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ از مجموعه‌های بورل X

باشد، آن گاه :

$$\mu(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i).$$

متناظر به هر اندازه‌ی مختلط μ روی X، تابع $|\mu|:=\mathcal{B}(X)\longrightarrow[0,\infty]$ را تغییر کل μ می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$|\mu|(E)=\sup\{\sum_{i=1}^{n}|\mu(E_i)|,(E\in\mathcal{B}(X))\}.$$

که درآن سوپریمم روی همه‌ی افرازهای متناهی $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ از E، متشکل از مجموعه‌های بورل تغییر می‌کند. در این صورت $|\mu|$ یک اندازه‌ی مثبت متناهی روی X است. (قضیه ۲.٦ از [۳۲] را ببینید.)

(د) اندازه‌ی مختلط μ را منظم می‌نامیم اگر $|\mu|$ منظم باشد، یعنی منظم درونی و بیرونی، روی مجموعه‌های بورل باشد. یادآوری می‌کنیم که اندازه‌ی مثبت ν منظم درونی، روی زیر مجموعه‌ی بورل E از X است اگر :

$$\nu(E)=\sup\{\nu(K):\text{فشرده}\ K\subseteq E\}.$$

ومنظم بیرونی روی E است اگر :

$$\nu(E)=\inf\{\nu(V):\text{باز}\ V\supseteq E\}.$$

(هـ) اندازه‌ی بورل μ را رادون می‌نامیم اگر روی مجموعه‌های فشرده، متناهی و روی مجموعه‌های بورل منظم بیرونی و روی مجموعه‌های باز، منظم درونی باشد.

(و) برای هر عدد مختلط c و اندازه‌های مختلط μ و ν تعریف می‌کنیم :

$$\begin{aligned}(\mu+\nu)(E)&=\mu(E)+\nu(E),\\(c\mu)(E)&=c\mu(E),\\\|\mu\|&=|\mu|(X),\end{aligned}$$

در این صورت مجموعه‌ی $M(X)$ متشکل از تمام اندازه‌های مختلط بورل منظم μ همراه با جمع برداری و ضرب اسکالر و نرم فوق یک فضای باناخ است.

(ز) فرض کنیم $L^{\infty}(X,\mu)$ مجموعه‌ی همه توابع اندازه‌پذیر مختلط—مقدار f روی X باشد، به طوری که

$$\| f \|_{\infty} = \inf_M \{M \in \mathbb{R} \mid \mu(\{t \mid \mid f(t) \mid > M\}) = 0\}.$$

دوتابع $f, g \in L^{\infty}(X,\mu)$ را یکسان می‌گیریم اگر $\| f - g \|_{\infty} = 0$، یعنی f و g تقریباً همه جا برابر باشند و می‌نویسیم $f \equiv g$. در این صورت $L^{\infty}(X,\mu)$ همراه با عمل‌های نقطه‌ای توابع و نرم $\| \cdot \|_{\infty}$ یک فضای باناخ است. خانواده‌ی تمام توابع اندازه‌پذیر مختلط—مقدار f روی X با شرط

$$\left(\int_X \mid f \mid^p d\mu\right)^{1/p} < \infty.$$

را با $L^p(X,\mu)$ نشان می‌دهیم. $L^p(X,\mu)$ با عمل‌های نقطه‌ای توابع و نرم زیر یک فضای باناخ است.

$$\| f \|_p = \left(\int_X \mid f \mid^p d\mu\right)^{1/p}, \; f \in L^p(X,\mu).$$

حال فرض کنیم μ اندازه‌ی شمارشی روی مجموعه‌ی X باشد. در این صورت فضای $L^p(X,\mu)$ را با نماد $l^p(X)$ نمایش می‌دهیم. بنابر این $l^p(X)$، فضای همه‌ی توابع $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که :

$$\| f \|_p = \left(\sum_{x\in X} \mid f(x) \mid^p\right)^{1/p} < \infty.$$

که در آن :

$$\sum_{x\in X} \mid f(x) \mid^p = \sup_F \{\sum_{x\in F} \mid f(x) \mid^p : \text{متناهی } F \subseteq X\}.$$

قضیه ۳.۱.۱ (فوبینی) فرض کنیم μ و ν دو اندازه‌ی مثبت به ترتیب روی فضاهای اندازه‌ی X و Y باشند و f یک تابع مختلط—مقدار، $\mu\times\nu$—اندازه‌پذیر روی $X \times Y$ باشد که خارج از مجموعه‌ی $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ تقریباً همه جا صفر می‌شود، که در آن هر E_n مجموعه‌ی $\mu\times\nu$—اندازه‌پذیر است و $(\mu\times\nu)(E_n) < \infty$. در این صورت سه انتگرال زیر :

$$\int_{X\times Y} f(x,y) d(\mu\times\nu)(x,y) \; , \; \int_X \int_Y f(x,y) d\nu(y) d\mu(x) \; , \; \int_Y \int_X f(x,y) d\mu(x) d\nu(y).$$

متناهی ومساوی‌اند اگر و تنها اگر یکی از انتگرال‌های زیر متناهی باشد:

$$\int_{X\times Y} \mid f(x,y) \mid d(\mu\times\nu)(x,y) \; , \; \int_X \int_Y \mid f(x,y) \mid d\nu(y) d\mu(x) \; , \; \int_Y \int_X \mid f(x,y) \mid d\mu(x) d\nu(y).$$

برهان . به قضیه ۸.۸ از [۳۲] رجوع کنید. □

قضیه ۴.۱.۱ (هان—باناخ) فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار و Y زیر فضای X باشد. اگر $g \in Y^*$ باشد، آن گاه $f \in X^*$ وجود دارد به طوری که $\| g \| = \| f \|$ و $f \mid_Y = g$.

برهان . به قضیه‌ی ۱۶.۵ از [۳۲] رجوع کنید. □

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید μ یک اندازه‌ی مثبت بر σ—جبر $\mathcal{M}$ بوده و ν یک اندازه‌ی دلخواه باشد.

۱. گوییم ν نسبت به μ پیوسته‌ی مطلق است و می‌نویسیم

$$\nu \ll \mu.$$

اگر به ازای هر $E \in \mathcal{M}$، که $\mu(E) = 0$، داشته باشیم $\mid \nu \mid (E) = 0$.

۲. اگر مجموعه‌ای مانند $A \in \mathcal{M}$ چنان باشد که به ازای هر $E \in \mathcal{M}$، $\nu(A) = \nu(A \cap E)$، گوییم ν بر A متمرکز شده است. فرض کنیم ν_1 و ν_2 اندازه‌هایی بر $\mathcal{M}$ بوده و یک جفت مجموعه‌ی از هم جدا مانند A, B موجود باشند به طوری که ν_1 بر A و ν_2 بر B متمرکز شده است. در این صورت گوییم ν_1 و ν_2 نسبت به هم منفرد هستند و می‌نویسیم $\nu_1 \perp \nu_2$.

قضیه ۶.۱.۱ (لبگ—رادون—نیکودیم) فرض کنید μ یک اندازه‌ی σ— متناهی بر σ— جبر $\mathcal{M}$ در مجموعه‌ی X باشد و ν یک اندازه‌ی مختلط بر $\mathcal{M}$ باشد. در این صورت

(الف) یک جفت اندازه‌ی مختلط منحصر بفرد مانند ν_a و ν_s بر $\mathcal{M}$ چنان وجود دارند که

$$\nu_s \perp \mu \quad , \nu_a \ll \mu \quad , \nu = \nu_a + \nu_s.$$

هرگاه ν مثبت و متناهی باشد، آن گاه ν_a و ν_s نیز چنین‌اند.

(ب) $f \in L^1(\mu)$ی منحصر بفرد هست به طوری که به ازای هر مجموعه‌ی $E \in \mathcal{M}$،

$$\nu_a(f) = \int_E f d\mu.$$

برهان . به قضیه‌ی ۱۰.۶ از [۳۲] رجوع کنید. □

در ادامه مفهوم تور و خواص تورها را بیان می کنیم و سپس به برخی از خواص توپولوژیک و نتایج مربوط به آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۷.۱.۱ (۱) مجموعه‌ی D را جهت دار نامیم اگر رابطه‌ای مانند $<$ روی D موجود باشد به طوری که:

(الف) $\alpha > \beta$ و $\beta > \gamma$ نتیجه دهد $\alpha > \gamma$.

(ب) برای هر $\alpha, \beta \in D$، عنصر $\gamma \in D$ موجود باشد به طوری که $\gamma > \alpha$ و $\gamma > \beta$.

(۲) منظور از یک تور در مجموعه‌ی X تابعی است مانند $f : D \longrightarrow X$. تور f را معمولاً با فرض $f(\alpha) = x_\alpha$ به صورت $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ نشان می‌دهیم.

(۳) فرض کنیم E, D دو مجموعه‌ی جهت دار باشند. تور $(y_\beta)_{\beta\in E}$ را یک زیر تور $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ می‌نامیم اگر تابع $g : E \longrightarrow D$ موجود باشد که:

(الف) $y_\beta = x_{g(\beta)}$

(ب) به ازای هر $\alpha \in D$، یک $\beta \in E$ موجود باشد به طوری که برای هر $\gamma > \beta$ داشته باشیم $g(\gamma) > \alpha$.

(۴) اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ یک تور در X باشد، گوییم $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ به $x \in X$ همگراست اگر برای هر همسایگی U از x در X، عنصر $\alpha_\circ \in D$ موجود باشد به طوری که $x_\alpha \in U$ برای هر $\alpha > \alpha_\circ$. در این حالت می‌نویسیم $x_\alpha \longrightarrow x$ یا $\lim_\alpha x_\alpha = x$. توجه کنیم که $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ به x همگراست اگر و تنها اگر هر زیر تور $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ به x همگرا باشد.

قضیه ۸.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $\overline{A}$ بستار زیر مجموعه‌ی A را در X نمایش دهد. در این صورت

(۱) $x \in \overline{A}$، اگر و تنها اگر تور $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ در A موجود باشد که $x_\alpha \longrightarrow x$.

(۲) A فشرده است، اگر وتنها اگر هر تور در A دارای یک زیرتور همگرا در A باشد.

برهان . به بخش ۱۰.۳ از [۲۳] رجوع کنید. □

قضیه ۹.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک و $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد. دراین صورت f پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر تور $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ همگرا به x در X داشته باشیم $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$.

برهان . به بخش ۱۰.۳ از [۲۳] رجوع کنید. □

تور $(x_\alpha)_\alpha$ در X تحت توپولوژی ضعیف به $x \in X$ همگراست، اگر و تنها اگر $\lim_\alpha f(x_\alpha) = f(x)$ برای هر $f \in X^*$. در این حالت می‌نویسیم $w - \lim_\alpha x_\alpha = x$

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد.

(الف) مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط—مقدار روی X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم. $C(X)$ همراه عمل‌های نقطه‌ای توابع وضرب اسکالر، یک فضای برداری است. به علاوه برای $f \in C(X)$ محمل f به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$supp(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

(ب) مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط—مقدار کراندار روی X را با $C_b(X)$ نشان می‌دهیم. بنابراین $C_b(X)$ یک زیر فضای $C(X)$ است و همراه با نرم $\|\,.\,\|_\infty$ یک فضای باناخ است. یادآوری می‌کنیم که

$$\|\,.\,\|_\infty = \sup\{| f(x) | : x \in X, (f \in C_b(X))\}.$$

(ج) مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط—مقدار f روی X را که در بی‌نهایت صفر می‌شوند را با $C_0(X)$ نشان می‌دهیم. در بی‌نهایت صفر شدن بدین معنی است که برای هر $\epsilon > 0$، زیر مجموعه‌ی فشرده‌ی K_ϵ از X موجود است که برای هر $x \in X \setminus K$ داریم $| f(x) | < \epsilon$. بنابر این $C_0(X)$ یک زیر فضای $C(X)$ و یک ایدال در $C_b(X)$ است که همراه با نرم $\|\,.\,\|_\infty$ یک فضای باناخ است.

(د) مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط—مقدار f روی X با محمل فشرده را با $C_{00}(X)$ یا $C_c(X)$ نشان می‌دهیم، که زیر فضای $C(X)$ و یک ایدال در $C_b(X)$ است. به علاوه همراه با نرم $\|\,.\,\|_\infty$ یک فضای باناخ است. همچنین $C_c(X)$ در $C_0(X)$ چگال است.

(ه) فرض کنیم X موضعاً فشرده و هاسدورف باشد. دراین صورت

$$C_c(X) \subseteq C_0(X) \subseteq C_b(X) \subseteq C(X).$$

واگر X فشرده باشد، آن گاه $C_c(X) = C_0(X) = C_b(X) = C(X)$.

نشاننده‌ی طبیعی یک فضای نرم دار در دوگان دوم آن را با j نمایش می‌دهیم. تصویر عضو x در فضای نرم دار تحت j را با $j(x)$ یا گاهی اوقات با $\hat{x}$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۱.۱.۱ (گلدشتاین) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد و B و B^{**} به ترتیب گوی‌های یکه و بسته در X و X^{**} باشند. آن گاه $j(B)$ در B^{**} ضعیف* چگال است، در نتیجه $j(X)$ در X^{**} چگال ضعیف* است.

برهان . به صفحات ۴۲۴ و ۴۲۵ از [۱۰] رجوع کنید. □

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و X^* فضای دوگان آن باشد. برای زیر مجموعه‌های $A \subset X$ و $E \subset X^*$، مجموعه‌های $A^{\perp}$ و $E^{\intercal}$ را چنین تعریف می‌کنیم $A^{\perp} = \{f \in X^* : f(a) = 0, a \in A\}$ و $E^{\intercal} = \{x \in X : \ f(x) = 0, f \in E\}$.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنید $(X, \sum, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. مجموعه‌ی همه‌ی توابع مجموعه‌ای متناهی جمعپذیر کراندار روی $\sum$ را با $ba(\sum)$ نشان می‌دهیم. با تعریف جمع و ضرب به صورت نقطه‌ای $ba(\sum)$ فضای برداری است. فضای $ba(\sum)$ را می‌توان با نرم زیر مجهز کرد

$$\| \mu \| = | \mu | (X) \quad , (\mu \in ba(\textstyle\sum)).$$

که در آن برای هر $A \in \sum$

$$| \mu | (A) = \sup\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} | \mu(A_i) | : A_i \in \sum \text{ که } \{A_i\} \text{ افرازی از } A \text{ است به طوری که}\}.$$

گوییم $\mu \in ba(\sum)$ پیوسته‌ی مطلق نسبت به $\nu \in ba(\sum)$ است، هرگاه برای هر $E \in \sum$، $\mu(E) = 0$ نتیجه دهد $| \nu | (E) = 0$. زیر فضای $ba(\sum)$ متشکل از $\nu \in ba(\sum)$ که پیوسته‌ی مطلق نسبت به μ هستند را با $ba(\sum : \mu)$ نمایش می‌دهیم. به وضوح $ba(\sum : \mu)$ زیر فضای بسته‌ای از $ba(\sum)$ است.

قضیه ۱۴.۱.۱ (نمایش ریس) فرض کنید $(X, \sum, \mu)$ یک فضای اندازه باشد، آن گاه $L^{\infty}(X, \mu)^*$ با $ba(\sum : \mu)$ یکریخت طولپاست. هر $F \in L^{\infty}(X, \mu)^*$ با یک $\nu \in ba(\sum : \mu)$ که با دستور $\nu(A) = F(\chi_A)$، $A \in \sum$ داده شود، متناظر است.

برهان . به صفحه‌ی ۲۲۴ از [۳۴] و یا صفحه‌ی ۵۲۲ از [۱۰] رجوع کنید. □

اگر μ اندازه شمارشی باشد، به وضوح $ba(\sum : \mu) = ba(\sum)$. بنابراین در این حالت $l^{\infty}(X)^* = ba(\sum)$.

۲.۱ پیشنیازهایی از آنالیز هارمونیک

تعریف ۱.۲.۱ (۱) — فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$، میدان اعداد مختلط، همراه با عمل ضرب $(x,y) \mapsto xy$ از $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ به $\mathfrak{A}$ باشد به طوری که برای هر $x,y,z \in \mathfrak{A}$ و $c \in \mathbb{C}$ داشته باشیم :

(الف) $x(yz) = (xy)z$.

(ب) $(cx)y = c(xy) = x(cy)$.

(ج) $c(y+z) = cy + cz$.

(د) $(x+y)z = xz + yz$.

در این صورت $\mathfrak{A}$ را یک جبر می‌نامیم.

(۲) — عنصر $e \in \mathfrak{A}$ را همانی راست جبر $\mathfrak{A}$ خوانیم، هرگاه برای هر $x \in \mathfrak{A}$ داشته باشیم $xe = x \in \mathfrak{A}$. همانی چپ نیز به طور مشابه قابل تعریف است.

(۳) — عنصر $e \in \mathfrak{A}$ را همانی جبر $\mathfrak{A}$ می‌نامیم، اگر برای هر $x \in \mathfrak{A}$ داشته باشیم $xe = ex = x$.

(۴) — جبر $\mathfrak{A}$ را یکدار نامیم، هرگاه دارای عضو همانی باشد.

(۵) — جبر $\mathfrak{A}$ را تعویض‌پذیر خوانیم، هرگاه برای هر $x,y \in \mathfrak{A}$ داشته باشیم $xy = yx$.

(٦) — جبر $\mathfrak{A}$ را نرم دار گوییم، هر گاه به عنوان یک فضای برداری، نرم دار باشد و به علاوه برای هر $x,y \in \mathfrak{A}$ داشته باشیم

$$\| xy \| \leq \| x \| \| y \| .$$

دراین حالت $d(x,y) = \| x - y \|$ یک متر روی $\mathfrak{A}$ تعریف می‌کند که عمل‌های جمع برداری، ضرب اسکالر و ضرب برداری روی $\mathfrak{A}$ نسبت به توپولوژی حاصل از d (که به توپولوژی نرم معروف است) پیوسته‌اند.

(۷) — جبر نرم دار $\mathfrak{A}$ را جبر باناخ گوییم، اگر به عنوان یک فضای متریک، کامل باشد.

همواره جبر نرم دار بدون همانی $\mathfrak{A}$ را می‌توان در یک جبر نرم دار و یکدار $\mathfrak{A}^{\#}$ به صورت زیر نشاند. مجموعه $\mathfrak{A}^{\#}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathfrak{A}^{\#} = \{(x,a) \mid x \in \mathfrak{A}, a \in \mathbb{C}\}.$$

اعمال جمع و ضرب اسکالر و ضرب برداری و همچنین نرم در $\mathfrak{A}^{\#}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

(الف) $(x,a)+(y,b)=(x+y,a+b)$

(ب) $b(x,a)=(bx,ba)$

(ج) $(x,a)(y,b)=(xy+ay+bx,ab)$

(د) $\| (x,a) \| = \| x \| + | a |$

که در آن $x,y \in \mathfrak{A}$ و $a,b \in \mathbb{C}$. در این صورت $\mathfrak{A}^{\#}$ همراه با اعمال و نرم فوق یک جبر نرم دار است، همچنین عنصر $e=(\text{۰},\text{۱})$ همانی جبر $\mathfrak{A}^{\#}$ است. زیرا $(x,a)(\text{۰},\text{۱})=(x\text{۰}+\text{۱}x,a)=(x,a)=(\text{۰},\text{۱})(x,a)$.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باشد.

(۱) — زیر مجموعه‌ی I از جبر $\mathfrak{A}$ را زیر جبر $\mathfrak{A}$ گوییم، هرگاه با اعمال $\mathfrak{A}$ تشکیل یک جبر دهد.

(۲) — زیر جبر I از $\mathfrak{A}$ یک ایدال چپ (راست) در $\mathfrak{A}$ است اگر $\mathfrak{A}I \subseteq I$ ($I\mathfrak{A} \subseteq I$).

(۳) — گوییم I در $\mathfrak{A}$ یک ایدال است اگر ایدال چپ و راست باشد.

(۴) — ایدال I در جبر $\mathfrak{A}$ را یک ایدال سره گوییم هرگاه $I \neq \mathfrak{A}$.

(۵) — مجموع دو ایدال چپ (راست، دوطرفه) I,J در جبر $\mathfrak{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$I+J=\{x+y \mid \ x \in I,\ y \in J\}.$$

که به وضوح یک ایدال چپ (راست، دوطرفه) در جبر $\mathfrak{A}$ است.

لم ۳.۲.۱ اگر I یک ایدال سره در جبر باناخ $\mathfrak{A}$ باشد، آن گاه $\overline{I}$ (بستار نرمی) نیز یک ایدال سره در $\mathfrak{A}$ است.

برهان . به صفحه‌ی ۴۸ از [۲] رجوع کنید. □

لم ۴.۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر نرم دار باشد.

(۱). اگر $I \subset \mathfrak{A}$ یک ایدال دوطرفه و بسته باشد، آن گاه فضای خارج قسمتی $\mathfrak{A}/I$ با نرم و ضرب زیر یک جبر نرم دار است

$$||| x+I ||| = \inf_{y\in I} \| x+y \|,$$

$$(x+I)(y+I) = (xy+I).$$

(۲). اگر $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ باشد و I یک ایدال دوطرفه و بسته باشد، آن گاه $\mathfrak{A}/I$ یک جبر باناخ است.

برهان . به صفحه‌ی ۵ از [۲٦] رجوع کنید. □

تعریف ۵.۲.۱ (۱) — ایدال چپ سره $\mathfrak{M}$ را یک ایدال چپ ماکسیمال گوییم، هرگاه ایدال چپ سره مانند $\mathfrak{N}$ در $\mathfrak{A}$ موجود نباشد به طوری که $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$. ایدال راست ماکسیمال به طور مشابه تعریف می‌شود.

(۲) — گوییم $\mathfrak{M}$ در $\mathfrak{A}$ یک ایدال ماکسیمال است، اگر ایدال چپ و راست ماکسیمال باشد.

لم ٦.۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر با همانی باشد. اگر $I\subset\mathfrak{A}$ یک ایدال چپ (راست، دوطرفه) سره باشد، آن گاه ایدال چپ (راست، دوطرفه) ماکسیمال مانند $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{A}$ موجود است، به طوری که $I\subset\mathfrak{M}$.

برهان . اثبات. به صفحه‌ی ۷ از [۲٦] رجوع کنید. □

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باشد.

(۱)— ایدال چپ I در $\mathfrak{A}$ را منظم چپ گوییم، هرگاه عضوی مانند $u\in\mathfrak{A}$ موجود باشد به طوری که برای هر $x\in\mathfrak{A}$ داشته باشیم

$$xu-x\in I.$$

در این صورت u را همانی راست مدولی ایدال I می‌خوانیم.

(۲) — ایدال راست I در $\mathfrak{A}$ را منظم راست گوییم هرگاه عضوی مانند $u\in\mathfrak{A}$ موجود باشد به طوری که برای هر $x\in\mathfrak{A}$ داشته باشیم

$$ux-x\in I.$$

در این صورت u را همانی چپ مدولی ایدال I می‌خوانیم.

(۳) — ایدال I را منظم گوییم هرگاه ایدال راست و چپ منظم باشد. در این صورت عنصر u را همانی مدولی ایدال I گوییم.

لم ۸.۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ باشد. اگر $I \subset \mathfrak{A}$ یک ایدال چپ (راست، دوطرفه) سره منظم باشد، آن گاه $\overline{I}$ نیز یک ایدال چپ (راست، دو طرفه) سره منظم در $\mathfrak{A}$ است.

برهان . به صفحه‌ی ۳۴ از [۲۶] رجوع کنید. □

نتیجه ۹.۲.۱ ایدال‌های ماکسیمال منظم در جبر باناخ $\mathfrak{A}$، نرم بسته‌اند.

برهان . به صفحه‌ی ۳۵ [۲۶] رجوع کنید. □

لم ۱۰.۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باشد.

(۱). اگر $I \subset \mathfrak{A}$ یک ایدال چپ (راست، دو طرفه) سره منظم باشد و u همانی مدولی I باشد، آن گاه $u \notin I$ و به علاوه برای هر $x \in I$ داریم ۱ $\geq \| u - x \|$.

(۲). اگر $I \subset \mathfrak{A}$ یک ایدال چپ (راست، دو طرفه) سره منظم باشد و $J \subset \mathfrak{A}$ یک ایدال چپ (راست، دوطرفه) باشد به طوری که $I \subset J$. آن گاه J نیز منظم است. به علاوه اگر u همانی مدولی I باشد، آن گاه u نیز همانی مدولی J است.

برهان . به صفحه‌ی ۷ از [۲۶] رجوع کنید. □

لم ۱۱.۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باشد. اگر $I \subset \mathfrak{A}$ یک ایدال چپ (راست، دوطرفه) سره منظم باشد آن گاه ایدال چپ (راست، دوطرفه) ماکسیمال منظم مانند $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}$ موجود است، به طوری که $I \subset \mathfrak{M}$.

برهان . به صفحه‌ی ۸ از [۲۶] رجوع کنید. □

تعریف ۱۲.۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر با همانی e باشد. گوییم عنصر $x \in \mathfrak{A}$ دارای معکوس چپ (راست) است اگر $y \in \mathfrak{A}$ موجود باشد، به طوری که $yx = e$ $(xy = e)$.

همچنین عنصر $x \in \mathfrak{A}$ را منظم خوانیم هرگاه $y \in \mathfrak{A}$ موجود باشد، به طوری که $xy = yx = e$. معکوس عنصر x را با x^{-1} نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باشد. گوییم عنصر $x \in \mathfrak{A}$ دارای شبه وارون چپ (راست) است اگر $y \in \mathfrak{A}$ موجود باشد به طوری که $y \ o \ x := y + x - yx = e$($x \ o \ y := y + x - xy = e$).

تعریف ۱۴.۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر نرم دار باشد. عنصر $x \in \mathfrak{A}$ را پوچ توان خوانیم هرگاه عدد صحیح و نامنفی مانند n موجود باشد به طوری که $x^n = 0$. همچنین $x \in \mathfrak{A}$ را پوچ توان توپولوژیکی خوانیم هرگاه $\lim_n \| x^n \|^{1/n} = 0$.

تعریف ۱۵.۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باشد.

(۱) — ایدال I در جبر $\mathfrak{A}$ را شبه منظم خوانیم، هرگاه هر عضو آن شبه منظم باشد.

(۲) — ایدال I در جبر $\mathfrak{A}$ را پوچ توان از مرتبه‌ی n خوانیم، هرگاه برای هر $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ داشته باشیم

$$x_1 x_2 ... x_n = 0.$$

(۳) — اگر $\mathfrak{A}$ جبر نرم دار باشد، ایدال I در جبر $\mathfrak{A}$ را پوچ توان توپولوژیکی خوانیم، هرگاه هر عضو آن پوچ توان توپولوژیکی باشد.

مجموعه‌ی تمام ایدال‌های چپ ماکسیمال منظم جبر $\mathfrak{A}$ را با $Max(\mathfrak{A})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۲.۱ اشتراک تمام ایدال‌های چپ ماکسیمال منظم جبر $\mathfrak{A}$ را رادیکال $\mathfrak{A}$ نامیم و با $rad(\mathfrak{A})$ نمایش می‌دهیم، در واقع

$$rad(\mathfrak{A}) := \bigcap_{\mathfrak{M} \in Max(\mathfrak{A})} \mathfrak{M}.$$

رادیکال یک جبر را می‌توان بر حسب نمایش‌ها نیز تعریف کرد. برای جزئیات بیشتر به [۳۱] مراجعه کنید.

لم ۱۷.۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باشد، آن گاه

۱. $rad(\mathfrak{A})$ یک ایدال دوطرفه و بسته در $\mathfrak{A}$ است.

۲. اگر $\mathfrak{A}$ جبر نرم دار باشد، $rad(\mathfrak{A})$ یک ایدال پوچ توان توپولوژیکی مساوی با اجتماع تمام ایدال‌های چپ (راست) پوچ توان توپولوژیکی است.