دانشگاه تربیت معلم سبزوار
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
گروه ریاضی کاربردی

# حل معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی با استفاده از توابع متعامد

رساله ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجه

کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی

استاد راهنما:

**دکتر محمد تقی خداداد**

استاد مشاور:

**دکتر علیرضا سلیمانی**

نگارش:

**بی‌بی فهیمه مهدیزاده طرقدری**

مهرماه ۸۹

**تقدیم به:**

**«پدر و مادر عزیزم**

**برادر مهربان و خواهران دلسوزم**

**که همواره در طول زندگی مشوق من بوده‌اند.»**

## تقدیر و تشکر

حمد و سپاس به درگاه خداوندی که وجود انسان را به زیور علم و معرفت بیاراست و با شکرگزاری به درگاه ایزد منان که مرا در تهیهٔ این رساله یاری نمود.

بر خود لازم می‌دانم که از زحمات بی دریغ و راهنمایی‌های ارزشمند استاد راهنمای بزرگوار و اندیشمند خود جناب آقای دکتر محمد تقی خداداد و استاد مشاور جناب آقای دکتر علیرضا سلیمانی که در این راه همچون چراغی راهنمای راهم بودند نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم. همچنین از کلیهٔ اساتید این دوره آقایان دکتر عبداله قلی‌زاده، دکتر سید ابوالفضل علوی، دکتر امین رفیعی، دکتر علی اکبر عارفی جمال و دکتر مهدی زعفرانیه کمال تشکر را دارم. در پایان از کلیهٔ دوستان و هم‌کلاسی‌های خود که در تهیه و تکمیل این رساله مرا یاری کردند تشکر می‌کنم.

فهیمه مهدیزاده

پاییز ۱۳۸۹

# چکیده


نظریهٔ معادلات انتگرال یکی از مهمترین شاخه‌های ریاضیات کاربردی است که اصولاً اهمیت آن از لحاظ مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتقات جزئی است. معادلات انتگرال در خیلی از مسائل فیزیکی و فنی ظاهر می‌شوند و تعدادی از مسائل مهندسی و مکانیک را می‌توان به این نوع معادلات تبدیل کرد. برای مثال، معمولاً معادلات انتگرال در محاسبات فیزیک پلاسما به کار می‌روند. در این پایان نامه روشهایی مبتنی بر توابع پایه‌ای قطعه‌ای ثابت برای حل معادلات و دستگاه معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم ارائه می‌شود. مقایسه نتایج این روشها با روشهای عددی موجود مزایای استفاده از این روشهای جدید را بیشتر نشان می‌دهد.

در فصل اول، با توابع بلوک – پالس که یکی از توابع قطعه‌ای ثابت می‌باشند، آشنا می‌شویم و ماتریس عملگری انتگرال را در حوزه توابع بلوک –پالس محاسبه می‌کنیم و در فصل دوم به معرفی توابع متعامد مثلثی که از توابع بلوک – پالس ساخته می‌شوند، می‌پردازیم و ماتریسهای عملگری انتگرال در حوزه توابع متعامد مثلثی را معرفی و ارتباط آنها را با ماتریس عملگری در حوزه توابع بلوک – پالس بیان می‌کنیم. همچنین در این فصل نشان می‌دهیم که استفاده از روش توابع متعامد مثلثی از روش توابع بلوک – پالس دقیق تر است. در فصل سوم، روش جدیدی مبتنی بر توابع بلوک–پالس و توابع متعامد مثلثی برای حل معادلات و دستگاه معادلات انتگرال فردهلم خطی نوع دوم ارائه می‌شود و در فصل چهارم روشی برای حل معادلات انتگرال ولترا خطی نوع اول توسط روش بلوک–پالس ارائه می‌شود و جواب تقریبی برای سیستم‌های کنترلی $SISO$ با استفاده از توابع بلوک – پالس و متعامد مثلثی بدست می آوریم.

# فهرست مندرجات

# فصل ۱

# توابع بلوک—پالس

## ۱—۱ مقدمه

توابع پایه قطعه‌ای ثابت در حدود نه دهه در دسترس بوده‌اند. بررسی و جستجوی سازماندهی شده برای چنین توابعی با معرفی تابع هار[۱] در سال ۱۹۱۰ آغاز شد [۱۲]. بارزترین ویژگی این مجموعه از توابع ماهیت قطعه‌ای ثابت بودن آن است که با مجموعه سینوس—کسینوسی توابع متعامد که در آن زمان بسیار مورد توجّه بود، تفاوت داشت. ویژگی این تابع جدید و نیز سایر توابع با ماهیت مشابه، به عنوان مثال توابع والش[۲]، توابع بلوک—پالس[۳] و غیره [۷]، مورد توجّه محققین قرار گرفت .

از میان توابع فوق، توابع بلوک—پالس برای بدست آوردن جواب تقریبی سیستم‌های کنترلی و کاربردهای متفاوت مرتبط با آنها اساسی‌تر و کارامدتر می‌باشند [۸،۱۴،۱۵،۲۴،۲۵،۲٦]. تابع مشهور دلتا نمونه‌ای از توابع بلوک — پالس است. در سالیان اخیر توابع پایه متفاوت زیادی برای

[۱] $Harr$
[۲] $Walsh$
[۳] $Block - Pulse$

تخمین زدن جواب معادلات انتگرالی مورد استفاده قرار گرفته‌اند، که توابع بلوک–پالس یکی از آنها می‌باشد. این مجموعه از توابع در ابتدا توسط هارموث [۴] به مهندسان الکترونیک معرفی شد. بعد از آن محققین دیگری مانند گوپال سامی [۵] و دیک شاتول [۶] [۱۱]، چن [۷] و تسی [۸] [۴] و سانوتی [۹] [۲۴]، توابع بلوک–پالس را مورد بحث و بررسی قرار دادند.

## ۱–۲ توابع بلوک – پالس

یک مجموعه از توابع بلوک–پالس متشکل از $m$ تابع $\phi_1(t)$، ...، $\phi_m(t)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\Phi_m(t) \triangleq [\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_m(t)]^T, \quad t \in [0, 1),$$

که در آن علامت $[\dots]^T$ ترانهاده یک ماتریس را نشان می‌دهد.

$\phi_i(t)$، $i$ اُمین مؤلفه بردار $\Phi_m(t)$، به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹].

$$\phi_i(t) = \begin{cases} 1 & \frac{i-1}{m} \le t < \frac{i}{m} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{1.1}$$

که $i = 1, 2, \dots, m$ و $m$ یک عدد صحیح مثبت دلخواه است. بنابراین بازهٔ $[0, 1)$ به $m$ زیر بازه متساوی الفاصله تقسیم می‌شود و $i$ اُمین تابع بلوک–پالس $\phi_i$ تنها یک پالس مستطیلی با ارتفاع واحد در زیر بازه $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m})$ می‌باشد. در واقع شرط یک بازه با طول واحد در تعریف بلوک–پالس لازم نیست. اگر $t = T\lambda$ را در (۱.۱) جایگزین کنیم، تعریف مشابهی از توابع

[۴] $Harmuth$

[۵] $Gopalsami$

[۶] $Deekshatulu$

[۷] $Chen$

[۸] $Tasy$

[۹] $Sannuti$

بلوک–پالس را با توجّه به یک بازه به طول دلخواه برای شرایط مسائل مختلف بدست می‌آوریم. بنابراین برای $i = ۱, ۲, \ldots, m$ تابع بلوک–پالس $\Phi_m(t)$ در بازه $[۰, T)$ به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi_m(t) \triangleq [\phi_۱(t), \phi_۲(t), \ldots, \phi_m(t)]^T$$

که در آن

$$\phi_i(t) = \begin{cases} ۱ & \frac{(i-۱)T}{m} \leq t < \frac{iT}{m} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در مورد این توابع $h = \frac{T}{m}$ می‌باشد.

برای سهولت توابع بلوک–پالس را در بازه $[۰, ۱)$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $h = \frac{۱}{m}$. شکل ۱–۱ نمودار $\phi_۱(t)$ تا $\phi_۴(t)$ را نشان می‌دهد.

## ویــژگـــی های بلوک–پالس

### ویژگی ۱: جداپذیری

$$\phi_i(t)\phi_j(t) = \begin{cases} \phi_i(t) & i = j \\ ۰ & i \neq j \end{cases}$$

بـرای $t \in [۰, ۱)$ و $i, j = ۱, ۲, \ldots, m$. ایـن ویـژگـی مـسـتـقـیـماً از تـعـریـف بـلـوک–پـالـس بدست می‌آید.

### ویژگی ۲: تعامد

$$\int_۰^۱ \phi_i(t)\phi_j(t)dt = h\delta_{ij}$$

درآن $\delta_{ij}$ دلتای کرونکر می‌باشد:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = j \\ ۰ & i \neq j \end{cases}$$

شکل ۱—۱: نمودار $\phi_1(t)$ تا $\phi_4(t)$.

که $t \in [\circ, ۱)$ و $i, j = ۱, ۲, \ldots, m$. این ویژگی تابع بلوک–پالس از ویژگی جداپذیری آن بدست می‌آید.

**تعریف ۱–۲.۱:** تابع $f(t)$ را روی بازه $[a, b]$ به طور مربعی–انتگرال پذیر گفته می‌شود اگر انتگرال لبگ آن موجود باشد یعنی

$$\int_t f^{۲}(\mu) d\mu < \infty.$$

مجموعه همه توابع مربعی–انتگرال پذیر برای $t \in [a, b]$ به صورت $L_۲$ نشان داد ه می‌شود.

**ویژگی ۳: کامل بودن**

برای هر $f \in L^{۲}([\circ, ۱))$، $\{\Phi\}$ کامل است اگر $\int \Phi f = \circ$ باشد، آنگاه تقریباً همه جا $f = \circ$.
بنابراین از کامل بودن $\{\Phi\}$ می‌توان نتیجه گرفت که برای هر تابع حقیقی کراندار که بر بازهٔ $t \in [\circ, ۱)$ مربعی–انتگرال پذیر باشد خواهیم داشت

$$\int_{\circ}^{۱} f^{۲}(t) dt = \sum_{i=\circ}^{\infty} f_i^{۲} \|\phi_i(t)\|^{۲},$$

که

$$f_i = \frac{۱}{h} \int_{\circ}^{۱} f(t) \phi_i(t) dt.$$

می‌توان دو تابع بلوک – پالس را به دو حالت مختلف در هم ضرب کرد[۱۰، ۲۳] را ببینید). فرض کنید که

$$\Phi(t) \triangleq [\phi_{۱}(t), \phi_{۲}(t), \ldots, \phi_m(t)]^T$$

**حالت اوّ ل:**

$$\Phi(t)\Phi^T(t) = diag(\Phi(t)) = \begin{pmatrix} \phi_{۱}(t) & \circ & \ldots & \circ \\ \circ & \phi_{۲}(t) & \ldots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \ldots & \phi_m(t) \end{pmatrix} \qquad (۲.۱)$$

که یک ماتریس قطری با $m$ تابع بلوک–پالس است.

**حالت دوم:**

$$\Phi^T(t)\Phi(t) = ۱,$$

زیرا

$$\sum_{i=۱}^{m}(\phi_i(t))^۲ = \sum_{i=۱}^{m}\phi_i(t) = ۱.$$

همچنین برای توابع بلوک – پالس داریم

$$\Phi(t)\Phi(t)^T V = \widetilde{V}\Phi(t), \qquad (۳.۱)$$

که $V$ یک بردار $m$ – تایی است و $\widetilde{V} = diag(V)$ . بعلاوه برای هر ماتریس $m \times m$، $B$ داریم

$$\Phi(t)^T B \Phi(t) = \widehat{B}^T\Phi(t), \qquad (۴.۱)$$

$\widehat{B}$ یک بردار $m$ – تایی است که عناصر آن همان درایه‌های قطری ماتریس $B$ می باشد.

## ۱–۳ تابع بلوک–پالس چند بعدی و بسط آن

همه دستگاه توابع یک بعدی از زمان مانند توابع بلوک–پالس، والش، هار و ... می‌توانند در فضاهای چند بعدی تعمیم یابند. به عنوان مثال یک دستگاه $n$–بعدی از توابع بلوک–پالس به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۰]:

$$\{\phi_{i_۱,i_۲,\ldots,i_n}(t_۱,t_۲,\ldots,t_n)\}$$

که $t_k \in [۰,۱)$ و $i_۱,i_۲,\ldots,i_n = ۱,۲,\ldots,m_k$ می‌باشند.

برای هر مجموعه از اعداد صحیح $i_۱$،$i_۲$،...،$i_n$ داریم:

$$\phi_{i_۱,i_۲,\ldots,i_n}(t_۱,t_۲,\ldots,t_n) = \begin{cases} ۱ & \frac{i_k-۱}{m_k} \le t_k < \frac{i_k}{m_k} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تابع مربعی – انتگرال پذیر چند متغیرهٔ $f$ در ناحیه $t_k \in [۰,۱)$ برای $k = ۱,۲,\ldots,n$ توسط سری $m$-جمله ای از توابع بلوک–پالس به طریق زیر بسط داده می‌شود:

$f(t_1,t_2,\dots,t_n) \simeq \sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2}\dots\sum_{i_n=1}^{m_n} f_{i_1,i_2,\dots,i_n}\phi_{i_1,i_2,\dots,i_n}(t_1,t_2,\dots,t_n).$

$m_k$ تعداد پاره خطهای روی بازه واحد در امتداد محورهای مختصات در جهت دکارتی $t_k$ می‌باشد.

مجموعه‌ای از توابع بلوک–پالس به صورت یک بردار به شکل $\Phi(t_1,t_2,\dots,t_n)$ با بعد $\prod_{k=1}^{n} m_k$ نوشته می‌شود. به عنوان مثال برای $n=2$ داریم:

$\Phi(t_1,t_2) = [\phi_{1,1},\dots,\phi_{1,m_2},\phi_{2,1},\dots,\phi_{2,m_2},\dots,\phi_{m_1,1},\dots,\phi_{m_1,m_2}].$

از طرفی چون $BPF$ ها مجزا می‌باشند، بنابراین

$\phi_{i_1,i_2,\dots,i_n}(t_1,t_2,\dots,t_n) = \prod_{k=1}^{n}\phi_{i_k}(t_k)$

ضرایب $f_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ از دستور

$$\begin{aligned} f_{i_1,i_2,\dots,i_n} &= f(f,\phi_{i_1,i_2,\dots,i_n}(t_1,t_2,\dots,t_n)) \\ &= \prod_{i=1}^{n} m_i \int_{\frac{i_1-1}{m_1}}^{\frac{i_1}{m_1}}\int_{\frac{i_2-1}{m_2}}^{\frac{i_2}{m_2}}\dots\int_{\frac{i_n-1}{m_n}}^{\frac{i_n}{m_n}} f(t_1,t_2,\dots,t_n)dt_1dt_2\dots dt_n. \end{aligned}$$

برای $t_k \in [\frac{i_k-1}{m_k},\frac{i_k}{m_k})$، محاسبه می‌شوند.

## ۱–۴ تقریب تابع

ویژگی تعامد توابع بلوک–پالس مبنای توسعه توابع بر حسب سری بلوک–پالس است. برای هر $f(t)\in L^2$

$$f(t) \simeq \sum_{i=1}^{m} f_i\phi_i(t),$$

که $f_i$، $i=1,2,\dots,m$، $i$اُمین ضریب سری بلوک–پالس می‌باشد. معیار این تقریب آن است که بایستی تابع خطای زیر بین $f(t)$ و بسط آن می‌نیمم شود.

$\epsilon = \frac{1}{T}\int_0^T (f(t)-\sum_{j=1}^{m} f_j\phi_j(t))^2dt,\ 0\le t<T.$

بنابراین ضرایب بلوک–پالس را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد، برای این منظور داریم:

$\frac{\partial\epsilon}{\partial f_i} = -\frac{2}{T}\int_0^T (f(t)-\sum_{j=1}^{m} f_j\phi_j(t))\phi_i(t)dt = 0,$

که از آن خواهیم داشت:

$$f_i = \frac{1}{h}\int_0^T f(t)\phi_i(t)dt.$$

برای اطلاعات بیشتر [۳،۱۰،۲۵] را ببینید.

برای مثال با استفاده از توابع بلوک—پالس تابع $f(t) = t^2$، که $t \in [0,1)$ و $m = 4$، را تقریب می‌زنیم.

$f_1 = 4\int_0^1 t^2\phi_1(t)dt = \frac{1}{48},$

$f_2 = 4\int_0^1 t^2\phi_2(t)dt = \frac{7}{48},$

$f_3 = 4\int_0^1 t^2\phi_3(t)dt = \frac{19}{48},$

$f_4 = 4\int_0^1 t^2\phi_4(t)dt = \frac{37}{48},$

$f(t) = \frac{1}{48}\phi_1(t) + \frac{7}{48}\phi_2(t) + \frac{19}{48}\phi_3(t) + \frac{37}{48}\phi_4(t).$

در شکل برداری بسط تابع $f(t)$ روی $t \in [0,1)$ نسبت به $\phi_i(t)$ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$f(t) \simeq \sum_{i=1}^{m} f_i\phi_i(t) = F^T\Phi(t) = \Phi^T(t)F, \tag{۵.۱}$$

که در آن،

$$\Phi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_m(t)]^T, \quad F = [f_1, f_2, \ldots, f_m]^T,$$

$$f_i = \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} f(t)dt. \tag{۶.۱}$$

فرض کنید $k(t,s)$ یک تابع دو متغیره باشد که بر روی مجموعهٔ $[0,1) \times [0,1)$ تعریف شده است. در این صورت $k(t,s)$ برحسب توابع بلوک—پالس به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$k(t,s) \simeq \Phi^T(t)K\Psi(s),$$

که $\Phi(t)$ و$\Psi(s)$ توابع برداری بلوک—پالس با ابعاد $m_1$ و$m_2$ می باشند و $K$ ماتریس ضرایب بلوک—پالس $m_1 \times m_2$ بعدی است.

$$K = \left( \begin{array}{cccc} k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,m_2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \dots & k_{2,m_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m_1,1} & k_{m_1,2} & \dots & k_{m_1,m_2} \end{array} \right) \qquad (7.1)$$

با توجّه به بخش قبلی مؤلفه‌های ماتریس $K$ به ازای $n = 2$، تابع بلوک—پالس دو متغیره می‌باشند که به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$k_{i_1,i_2} = \prod_{i=1}^{2} m_i \int_{\frac{i_1-1}{m_1}}^{\frac{i_1}{m_1}} \int_{\frac{i_2-1}{m_2}}^{\frac{i_2}{m_2}} k(t,s)dtds, \qquad (8.1)$$

که در آن $i_1 = 1, 2, \dots, m_1$ و $i_2 = 1, 2, \dots, m_2$.

## ۱—۵ ماتریس عملگر برای انتگرال‌گیری

خاصیت انتگرال‌گیری توابع بلوک—پالس برای $t \in [0, 1)$ توسط یک معادله عملگری به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_0^1 \Phi(t)dt \simeq P\Phi(t),$$

که در آن

$$\Phi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_m(t)]^T.$$

از طرفی محاسبه $\int_0^t \phi_i(\tau)d\tau$ به صورت زیر می‌باشد [2]:

$$\int_0^t \phi_i(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & t < (i-1)h \\ t-(i-1)h & (i-1)h \le t < ih \\ h & ih \le t < 1 \end{cases}$$

توجّه‌کنید که $t - (i-1)h$ در نقطه میانی $[(i-1)h, ih)$ برابر با $\frac{h}{2}$ است. بنابراین می‌توانیم $t-(i-1)h$ را برای $(i-1)h \le t < ih$ توسط $\frac{h}{2}$ تقریب بزنیم.

لذا $\int_\circ^t \phi_i(\tau)d\tau$ برحسب توابع بلوک—پالس به صورت:

$$\int_\circ^t \phi_i(\tau)d\tau \simeq [\circ, \ldots, \circ, \tfrac{h}{۲}, h, \ldots, h]\Phi(t),$$

بیان می‌شود که در آن $\frac{h}{۲}$، $i$ اُمین مؤلفه می‌باشد. بنابراین

$$\int_\circ^t \Phi(\tau)d\tau \simeq P\Phi(t).$$

در حالت کلی ماتریس $P_{m\times m}$ که ماتریس عملگری برای انتگرال‌گیری نامیده می‌شود عبارت است:

$$P_{m\times m} = h\begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & ۱ & \ldots & ۱ \\ \circ & \frac{۱}{۲} & \ldots & ۱ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \ldots & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix} \qquad (۹.۱)$$

با توجّه به شکل ۱—۲ برای $m = ۴$ ماتریس $P$ به قرار زیر می‌باشد:

$$P_{۴\times ۴} = h\begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & ۱ & ۱ & ۱ \\ \circ & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۱ \\ \circ & \circ & \frac{۱}{۲} & ۱ \\ \circ & \circ & \circ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}.$$

در شکل فشرده ماتریس $P$ به صورت زیر می‌باشد:

$$P_{(m)} = h[[\tfrac{۱}{۲}\,۱\,۱\ldots ۱]],$$

که در آن

$$[[abc]] \triangleq \begin{pmatrix} a & b & c \\ \circ & a & b \\ \circ & \circ & a \end{pmatrix}.$$

این ماتریس شکل منظمی دارد، یعنی اینکه یک ماتریس بالا مثلثی که $k$ اُمین سطرش با انتقال $(k-۱)$ بار، مکان عناصر سطر اول به راست بدست می‌آید. همچنین می‌توان بررسی کرد که همه $m$ مقدار ویژه این ماتریس بالا مثلثی $\frac{h}{۲}$ می‌باشد.

شکل ۱—۲: نمودار $\int_{0}^{t} \phi_{1}(t)$ تا $\int_{0}^{t} \phi_{4}(t)$.

ماتریس $P$ همانند یک انتگرال گیرعمل می‌کند و نقش محوری در تحلیل هر تابع بلوک–پالس دارد. با استفاده از این ماتریس می‌توان انتگرال تابع $f(t)$ را بوسیله سری بلوک–پالسی آن به صورت زیر بیان کرد.

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \simeq \int_0^t F^T\Phi(\tau)d\tau \simeq F^TP\Phi(t). \qquad (۱۰.۱)$$

ماتریس عملگری $P$ توسط چن و همکارانش در [۴] و موهان[۱۰] در [۲۰] ارائه شده است.

---

[۱۰] $Mohan$