دانشگاه مازندران
دانشگاه علوم پایه

پایان نامه:

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی محض (آنالیز)

عنوان:

رابطه بین توابع طیفی معادلات استورم- لیوویل و دیراک

استاد راهنما:

دکتر عبدالعلی نعمتی

استاد مشاور:

دکتر محسن علیمحمدی

ارائه دهنده:

سیدالیاس ابراهیم پور

تابستان ۱۳۸۷

مقدمه ۱

مقدمه:

در این بررسی توابع طیفی مرتبط با دو معادله دیفرانسیل مورد مطالعه قرار میگیرند.

نخست معادله استورم لیوریل

$$-(py')'+qy=\lambda wy \qquad (*)$$

در فاصله $[\circ,\infty)$ به همراه شرط اولیه

$$y(\circ)\cos\alpha+p(\circ)y'(\circ)\sin\alpha=\circ$$

که $\alpha\in[\circ,\pi]$ می باشد و توابع p,q,w توابع حقیقی مقدار روی $[\circ,\infty)$ با شرط $w(x)>\circ, P(x)>\circ$ می باشد و $\frac{1}{p},q,w\in L^1_{loc}[\circ,\infty)$.

و دومین معادله ، معادله دیفرانسیل، معادله

$$y'=\begin{pmatrix} p & \lambda+c+v_1 \\ -(\lambda-c+v_2) & -p \end{pmatrix} y_1 \quad , \quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

در فاصله $[\circ,\infty)$ به همراه شرط اولیه

$$y_1(o)\cos\alpha+y_2(o)\sin\alpha=o$$

که $\alpha\in[\circ,\pi]$ و همچنین $c\geq 0$ مقدار ثابت است و $\lambda=\mu+i\varepsilon$ پارامتر طیفی مختلط است و p,v_2,v_1 توابع حقیقی مقدار بر $L^1[\circ,\infty)$ است.

یک تابع طیفی $\rho_\alpha(\mu)$ با هر معادله و شرط اولیه در ارتباط است

هدف ما ارتباط بین جوابهای معادلات (*) و (**) تحت شرایطی که بیان شد می‌باشد همچنین توابع طیفی هر کدام از این دو معادله و ارتباط بین آنها مورد مطالعه قرار می‌گیرند. هریس (Harris) توابع طیفی معادله (*) را با فرض $P\equiv w\equiv 1$ مورد مطالعه قرار داد. هریس و گیلبرت (Gilbert) ارتباط بین

این توابع با در نظر گرفتن شرایط اولیه مجزا بررسی کرده، همچنین مشتقات توابع طیفی را مورد مطالعه قرار دادند. در ادامه تابع m تیچ- مارش‌ویل $m_\alpha(\lambda)$ را برای $\alpha=0$ شناسایی می‌کنیم و نشان خواهیم داد که توابع طیفی برحسب جملات توابع $m_\alpha(\lambda)$ را می‌توان از طریق فرمول تیچ مارش - کداریا، تعیین کرد. البته لازم به ذکر است که توابع طیفی برای معادلات استورم- لیوویل و دیراک رفتار مجانبی کاملاً متفاوتی دارند. در این بررسی با معادلات حد نقطه‌ای سروکار داریم و نیز نشان میدهیم که چگونه توابع طیفی $\rho'_\alpha(\mu)$ با شرایط اولیه مجزا با یکدیگر در ارتباط هستند و اینکه مشتق طیفی $\rho'_\alpha(\mu)$ را بصورت یک سری نمایش داد. همچنین فرمول اتصالی معادله استورم- لیوویل و دیراک را بیان می‌کنیم. و خواهیم دید اگر چه مشتق طیفی $\rho'_\alpha(\mu)$ برای دو معادله استورم- لیوویل و دیراک رفتارهای متفاوتی دارند اما فرمول اتصالی آنها ساختار یکسانی دارند.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

چکیده:

دو سؤال در رابطه با توابع طیفی مربوط به معادلات دیفرانسیل حد نقطه ای مطرح است. معادلات شامل معادله نوع دوم استورم- لیویل و سیستم دو بعدی نوع اول که به معادله دیراک معروف است، می باشد. برای هر معادله شرط و توابع ضریب داده شده تا مشتقات طیفی مستقیماً به شکل سری بر حسب توابع داده شده بدست آید. همچنین برای هر معادله، فرمولهای مربوط به توابع طیفی به ازای مقادیر متفاوت شرایط اولیه نشان داده خواهد شد.

مقدمه:

فصل اول شامل تعاریف و قضایایی است که با اغلب آنها در دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد آشنا گشته ایم. و در بخش دوم فصل اول معادلات استورم- لیوویل و دیراک به همراه شرط اولیه و تعاریفی چون تابع طیفی و مشتق آن، حد نقطه ای، تابع تیچ- مارش ویل، دیدگاه اپراتوری مسئله و قضایایی که در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار می گیرند، می باشد.

۱-۱ . مفاهیم و قضایای مقدماتی:

تعریف ۱-۱: هر معادله شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل را معادله دیفرانسیل گویند.

تعریف ۱-۲: یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی، معادله دیفرانسیلی است که بتوان آنرا بفرم زیر نوشت.

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_\circ(x)y=f(x) \qquad (۱-۱)$$

که در آن $f(x),a_2,a_1,a_0$ توابع پیوسته ای از x روی بازه $I=[a,b]$ می باشند.

حال اگر روی I , $a_2(x)\neq\circ$، با تقسیم طرفین (۱-۱) بر $a_2(x)$ داریم :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=g(x)$$

که در آن : $p(x)=\frac{a_1(x)}{a_2(x)},q(x)=\frac{a_0(x)}{a_2(x)},g(x)=\frac{f(x)}{a_2(x)}$ روی I پیوسته است.

به اختصار می نویسیم:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x) \qquad (۱-۲)$$

نکته: اگر در (۱-۲) ، $g(x)=\circ$ باشد آنگاه معادله را همگن گویند.

$$y''+p(x)y'+q(x)y=\circ \qquad (۱-۳)$$

قضیه ۱-۳: فرض کنید q(x),p(x) توابعی از x روی بازه [a,b] باشند، اگر y_2,y_1 جوابهای معادله همگن (۱-۳) باشند و c یک ثابت باشد در اینصورت cy_1+y_2,cy_1 نیز جواب معادله (۱-۳) می باشند.

اثبات: به [۲۳] مراجعه شود.

قضیه ۱-۴: فرض کنید $p(x)$,$q(x)$، $g(x)$ توابعی پیوسته روی بازه $[a,b]$ (که شامل $x_{\circ}$است) باشـند. آنگاه شرایط اولیه $y(x_{\circ})=y_{\circ}$, $y'(x_{\circ})=y_1$ باشد آنگاه یک جواب یکتا روی بازه $[a,b]$ برای معادله زیـر وجود دارد:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x) \tag{۱-۴}$$

اثبات: به [۲۳] مراجعه شود.

تعریف ۱-۵: فرض کنید V یک فضای خطی روی R باشد یک نـرم روی V، یـک نگاشـت $P:V\rightarrow R$ می باشد و بصورت $P(x)=\|x\|$, $x\in V$ نوشته می شود که در سه شرط زیر صدق می کند.

الف) $\|x\|\geq ۰$ برای هر $x\in V$ و $\|x\|=۰$ اگر و فقط اگر $x=0$

ب) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ برای هر $\alpha\in R, x\in V$.

ج) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ برای هر $x,y\in V$.

فضای خطی v با نرم بالا، فضای خطی نرمدار نامیده می شود.

تعریــف ۱-۶ : اگـر $0<P<\infty$ و f یـک تـابع انـدازه پـذیر مخـتلط بـر X باشـد، تعریـف مـی کنـیم: $L^p(\mu),\|f\|_p=\left\{\int_X |f|^p\,d\mu\right\}^{\frac{1}{p}}$ برابر است با:

$$L^p(\mu)=\{f:\|f\|_p<\infty\}$$

که $\|f\|_p$را نرم L^p ی f می نامیم.

تعریف ۱-۷ : می گوییم تابع u که تقریباً همه جاروی Ω تعریف شده است، انتگرال پذیر موضعی روی Ω است و می نویسیم $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$، اگر $u \in L^1(k)$ برای هر زیرمجموعه فشرده اندازه پذیر k از Ω ،

یعنی داریم: $L^1_{Loc}(\Omega) = \{u : \int_k |u| \ dx < \infty , \forall k \subset \Omega$, فشرده اندازه پذیر $\mathrm{k}\}$

تعریف ۱-۸ : اگر H فضای برداری روی C باشد به نگاشت $(,) : H \times H \to C$ با شرایط زیر یک ضرب داخلی گویند:

الف) $x, y = \overline{(y, x)}$

ب) $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 (x_1, y) + \lambda_2 (x_2, y)$

پ) $(x, x) \geq 0 \quad , \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

که در آن $x, y, x_1, x_2 \in \mathrm{H}$, λ_2, λ_1 اسکالرهای دلخواه می باشند.

تعریف ۱-۹: اگر فضای ضرب داخلی بالا با تعریف $\|x\|^2 = (x, x)$, $d(x, y) = \|x - y\|$ یک فضای کامل باشد به آن، فضای هیلبرت می گویند.

تعریف ۱-۱۰: برای هر دو تابع مشتق پذیر y_2, y_1 تابع رونسکین را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$w(y_1, y_2) = \langle y_1, y_2 \rangle (x) = \langle y_1(x), y_2(x) \rangle = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)$$

و یا می توان آنرا بصورت دترمینانی زیر نمایش داد.

$$w\big(y_1(x), y_2(x)\big) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)$$

و برای سه تابع مشتق پذیر $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$w(y_1(x), y_2(x), y_3(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}$$

تعریف ۱-۱۱: دو تابع y_1 و y_2 را روی بازه I وابسته خطی گویند هرگاه ثابتهای c_1 و c_2 که هردو با هم صفر نمی باشند (حداقل یکی مخالف صفر) چنان موجود باشند بطوریکه برای هر $x \in I$, $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$ ، در غیر اینصورت یعنی اگر $c_1=c_2=0$ باشد، y_1 , y_2 را روی بازه I مستقل خطی گویند.

تعریف ۱-۱۲: یک زوج $\langle y_1,y_2 \rangle$ از جوابهای معادله (۱-۳) روی بازه (a,b) را یک مجموعه جواب اساسی گوئیم هرگاه $x_0 \in [a,b]$ موجود باشد بطوریکه : $w_1(y_1,y_2) \neq 0$

قضیه ۱-۱۳: اگر y_2,y_1 دو جواب معادله (۱-۴) روی بازه (a,b) باشند آنگاه گزاره های زیر معادلند:

الف) $\langle y_1,y_2 \rangle$ مجموعه جواب اساسی روی بازه (a,b) است.

ب) y_2,y_1 روی (a,b) مستقل خطی اند.

ج) رونسکین $w(y_1(x),y_2(x))$ روی (a,b) مخالف صفر است.

اثبات: به [23] مراجعه شود.

تعریف ۱-۱۴: تابع مختلط f در نقطه z تحلیلی است هرگاه f در یک همسایگی z مشتق پذیر باشد، بعلاوه این تابع در ناحیه D تحلیلی نامیده می شود هرگاه f در هرنقطه از D مشتق پذیر باشد. همچنین تابع f را تام می نامند هرگاه در تمام صفحه مختلط تحلیلی باشد.

لازم به ذکر است که صفرهای یک تابع تام، شماراست.

تعریف ۱-۱۵: نقطه z_o را نقطه تکین یا منفرد تابع $f(z)$ گویند هرگاه $f(z)$ دراین نقطه تحلیلی نباشد.

ولی در یک همسایگی محذوف z_o تحلیلی باشد. به عبارتی دیگر عدد مثبت r ای وجود داشته باشد

بطوریکه f روی ناحیه $N(z_o,r)=\{z: o<|z-z_o|<r\}$ تحلیلی باشد.

به عنوان مثال، مبدأ یک نقطه تکین(یا منفرد) $f(z)=z^{-1}$ است.

قضیه ۱-۱۶: (قضیه لوران) : اگر $f(z)$ درون ناحیه R محدود به دو دایره متحدالمرکز c_2,c_1 به مرکز a

و بترتیب به شعاعهای r_2,r_1 $(r_1>r_2)$ تحلیلی باشد، آنگاه برای هر z درR داریم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^n}$$

که در آن

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi \quad , \quad n=0,1,2,\ldots.. \quad \text{و} \quad b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n+1}}d\xi \quad , \quad n=0,1,2,\ldots...$$

قسمت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^n}$ را قسمت اصلی f در z می نامند.

اثبات: به [۲۴] مراجعه کنید.

تعریف ۱-۱۷: نقطه تکین $z=a$ را یک قطب f می نامیم هرگاه در بسط لوران، قسمت اصلی دارای

تعداد متناهی جمله باشد.

اگر $z=a$ یک نقطه منفرد از f باشد آنگاه a یک قطب از f است.

اگر در بسط لوران، m بزرگترین عدد طبیعی ای باشد که $b_m\neq 0 \, , \, n>m\Rightarrow b_n=0$

آنگاه $z=a$ را قطب مرتبه m – ام می نامیم. قطب مرتبه اول را قطب ساده می نامیم.

نکته: سری لوران را می توان بصورت مقابل نیز نمایش داد: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_o)^n$

که در آن $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-z_o)^{n+1}}$.

تعریف ۱-۱۸: مجموعه باز D را همبند گوئیم، اگر هر دو نقطه دلخواه آنرا بتوان بوسیله یک خط شکسته بهم وصل کرد بگونه ای که تمام آن خط شکسته درون D قرار داشته باشد. مجموعه همبند باز را حوزه می گوئیم. حوزه D واقع در صفحه مختلط را حوزه همبند ساده می گوئیم اگر هر منحنی بسته ساده در D فقط شامل نقاط D باشد.

قضیه ۱-۱۹: (قضیه انتگرال کوشی گورسا) :

هرگاه f بر ناحیه ای همبند ساده D تحلیلی باشد به ازای هر مرز بسته c داخل ناحیه D خواهیم داشت:

$$\int_c f(z)dz=o$$

اثبات: به [۲۴] مراجعه شود.

قضیه ۱-۲۰: (قضیه انتگرال کوشی) :

اگر f(z) در داخل ناحیه همبند ساده D تحلیلی باشد و C یک منحنی بسته ساده واقع در ناحیه D و Z_o نقطه ای در درون آن باشد. داریم:

$$\int_C\frac{f(z)dz}{(z-z_o)^{n+1}}=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_o)$$

و برای n=0 داریم

$$\int\frac{f(z)}{(z-z_o)}dz=2\pi i\,f(z_o)$$

اثبات: به [۲۴] مراجعه شود.

۱. ۲. معرفی توابع استورم- لیوویل و دیراک

معادله استورم- لیوویل بصورت زیر معرفی می شود.

$$-(py')'+qy=\lambda wy \qquad (۱. ۲. ۱)$$

در فاصله $[\circ,\infty)$ به همراه شرط اول

$$y(\circ)\cos\alpha+p(\circ)y'(\circ)\sin\alpha=\circ \quad , \qquad (۱. ۲. ۲)$$

که $\alpha\in[\circ,\pi]$ می باشد و توابع w,q,p توابع حقیقی مقدار روی $[\circ,\infty)$ با شرط $w(x)>0$ و $p(x)>0$ می باشد و $\frac{1}{p},q,w\in L^1_{loc}[\circ,\infty)$ و $\lambda=\mu+i\varepsilon$ پارامتر طیفی مختلط است

معادله دیراک بصورت زیر تعریف می شود.

$$y'=\begin{pmatrix} p & \lambda+c+v_1 \\ -(\lambda-c+v_2 & -p \end{pmatrix}y_1 \quad , \quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (۱. ۲. ۳)$$

در فاصله $[\circ,\infty)$ به همراه شرط اول

$$y_1(o)\cos\alpha+y_2(o)\sin\alpha=o \qquad (۱. ۲. ۴)$$

که $\alpha\in[\circ,\pi]$ و همچنین $c\geq0$ مقدار ثابت است و $\lambda=\mu+i\varepsilon$ پارامتر طیفی مختلط است و p,v_2,v_1 توابع حقیقی مقدار بر $L^1[\circ,\infty)$ است.

تعریف ۱-۲۱ : یک تابع طیفی $\rho_\alpha(\mu)$ با هردو معادله و شرط اولیه در ارتباط است این تابع برای $\mu\in R$ تعریف شده است که $\mu=\mathrm{Re}\{\lambda\}$. تابع طیفی غیر نزولی است مشتق متقارن $\rho'_\alpha(\mu)$ از تابع طیفی بصورت زیر تعریف می شود.

$$\rho'_\alpha(\mu)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\rho_\alpha(\mu+\varepsilon)-\rho_\alpha(\mu-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

با شرایط مناسب بر توابع ضریب در رابطه با معادله استورم- لیوویل جواب بشکل سری بدست می آید. قابل ذکر است که توابع طیفی برای معادلات استورم لیوویل و دیراک رفتار مجانبی کاملاً متفاوتی دارند گیلبرت [۱] و هریس[۲] ارتباط بین توابع طیفی برای شرایط اولیه مجزا در یک معادله ثابت را برای معادله استرم لیوویل در [۷] پاسخ گفتند، مسئله اصلی دیگر روابط بین توابع طیفی برای شرط اولیه در خصوص یک معادله می باشد. این دو معادله با هم ارتباط دارند. از این لحاظ که معادله (۱. ۲. ۱) با شرط p≡w≡1 شرودنیگر تک بعدی خواهدبود و معادله (۱. ۲. ۳) را می توان از لحاظ فیزیکی یک مؤلفه شعاعی از معادله دیفرانسیل دیراک، در علم مکانیک کوانتوم نسبیت در نظر گرفت [۱۰] . هریس در [۱۱] معادله (۱. ۲. ۱) را با p≡w≡1 در نظر می گیرد و آنچه در زیر آمده است را ثابت می کند.

قضیه ۱-۲۲ : دنباله‌ای از توابع بصورت زیر است.

$$v_1(x,\mu) = -\int_x^{\infty} \exp\left((2i\mu^{\frac{1}{2}}(t-x) \right) q(t)dt$$

$$v_{n+1}(x,\mu) = \int_x^{\infty} \exp\left(2i\mu^{\frac{1}{2}}(t-x) + \int_x^t \sum v_k(s,\mu)ds \right) v_n(t,\mu)^2 dt$$

$$v(x,\mu) = i\mu^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,\mu)$$

و T,S را بصورت $T(x,\mu) = \operatorname{Im}\{v(x,\mu)\}, S(x,\mu) = \operatorname{Re}\{v(x,\mu)\}$ تعریف می‌کنیم.

اگر توابع $\eta(\mu), a(x)$ وجود داشته باشد و $\mu_\circ > \circ$ بنابراین

$$\left| \int_x^{\infty} \exp(2i\mu^{\frac{1}{2}}t)q(t)dt \right| \le a(x)\eta(\mu) \qquad , \qquad \mu \ge \mu_o \ , \ o \le x < \infty$$

1- Gilbert　　　2- Harris

که $a(x)$ نزولی است و $a(x)\in L^1[0,\infty)$ و وقتی $\mu\to\infty$ آنگاه $\eta(\mu)\to 0$ بنابراین داریم.

$$\rho'_\alpha(\mu)=\frac{\pi^{-1}\mu^{\frac{-1}{2}}T(0,\mu)^2\exp\left(-2\int_0^\infty S(t,\mu)dt\right)}{\left(S(\circ,\mu)^2+T(\circ,\mu)^2\right)\sin^2\alpha+S(\circ,\mu)\sin 2\alpha+\cos^2\alpha} \qquad (۱. ۲. ۵)$$

برای $\alpha\in[\circ,\pi)$

همچنین نشان داده می شود که وقتی $\mu\to\infty$, $\rho'_\circ(\mu)\approx\frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{\pi}$, $\rho'_\alpha(\mu)\approx\frac{\mu^{\frac{-1}{2}}}{\pi}$

برای هر $\alpha\in[\circ,\pi)$

این با رفتار مجانبی توابع طیفی مناسب است [۱۶].

با استفاده از ترتیب متفاوت دنباله توابع $\{v_n\}$، گیلبرت و هریس نشان می دهند که مشتق طیفی را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\rho'_\alpha(\mu)=\frac{1}{\pi}\,\frac{T(\circ,\mu)}{\left(S(\circ,\mu)^2+T(\circ,\mu)^2\right)\sin^2\alpha+S(\circ,\mu)\sin 2\alpha+\cos^2\alpha} \qquad (۱. ۲. ۶)$$

اثبات : به [۱۱] رجوع کنید.

یک ویژگی اصلی این است که توابع S, T بر حسب تابع پتانسیلی q تعریف می شوند. و می توانند بترتیب با بخش های موهومی و حقیقی $m_o(\mu)$ و تابع تیچ مارش- ویل برای $\alpha=\circ$ شناسایی شوند.

قضیه فوق بیان می کند که برای مثال آیا q در $[\circ,\infty)$ نزولی است وعضوی از $L^1\,[\circ,\infty)$ است و یا $(1+t)q(t)\in L^1\,[\circ,\infty)$ است؟

فرض کنیم $\theta_\alpha(x,\lambda),\varphi_\alpha(x,\lambda)$ جوابهای معادله استورم – لیوویل باشند با شرایط اولیه زیر:

$$\begin{array}{ll} \theta_\alpha(\circ,\lambda)=\cos\alpha & \varphi_\alpha(\circ,\lambda)=-\sin\alpha \\ p(\circ)\theta'_\alpha(\circ,\lambda)=\sin\alpha & p(\circ)\varphi_\alpha(\circ,\lambda)=\cos\alpha \end{array} \qquad (۱. ۲. ۷)$$

یا آنها را جوابهای معادله دیراک با شرایط زیر قرار می دهیم.

$$\theta_\alpha(\circ,\lambda)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} \qquad \varphi_\alpha(\circ,\lambda)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} \qquad (۱. ۲. ۸)$$

که $\alpha\in[\circ,\pi)$. وقتی شرط اولیه (۱. ۲. ۲) و (۱. ۲. ۴) برآورده می شود $\varphi_\alpha(x,\lambda)$ یک جواب منظم مسئله مقدار اولیه است (یعنی در هر دو شرط صدق کند). چون θ_α, φ_α مستقل خطی اند (رونسکین آنها مخالف صفر است). بنابراین هر جواب از معادله استرم- لیوویل یا دیراک را می توان بصورت ترکیب خطی از آنها نوشت.

تعریف ۱-۲۳: اگر برای هر $\lambda\in C$ ، هر جواب از معادله دیفرانسیل استورم- لیوویل و دیراک یک عضو از $L^2\,[\circ,\infty)$ باشد، معادله حد دایره ای در بینهایت نامیده می شود.

تعریف ۱-۲۴: (تعریف حد نقطه ای) : اگر برای $\lambda\in C$ جوابی از معادله دیفرانسیل استورم- لیوویل یا دیراک عضو $L^2\,[\circ,\infty)$ نباشد، معادله را حد نقطه ای در بینهایت می گویند.

توجه: در اینجا ما منحصراً با معادلات حد نقطه ای سروکار داریم.

نکته : برای هر λ غیر حقیقی دقیقا یک جواب برای معادلات (۲ . ۱ . ۱) و (۲ . ۱ . ۳) وجود دارد مگر با اختلاف مقدار ثابتی که متعلق به فضای $L^2\,[\circ,\infty)$ خواهد بود این جواب را با $\psi_\alpha(x,\lambda)$ نشان می دهیم .

بدین ترتیب ضریب تیچ مارش- ویل $m_\alpha(\lambda)$ معرفی می شود .

تعریف ۱-۲۵: تابع تیچ مارش- ویل $m_\alpha(\lambda)$ تابعی است که بصورت زیر معرفی می شود.

$$\theta_\alpha(x,\lambda)+m_\alpha(\lambda)\varphi_\alpha(x,\lambda)=\psi_\alpha(x,\lambda)\in L^2[\circ,\infty) \qquad (۱. ۲. ۹)$$

یا

$$m_\alpha(\lambda)=\frac{\psi_\alpha(x,\lambda)-\theta_\alpha(x,\lambda)}{\varphi_\alpha(x,\lambda)}$$

نکته ۱-۲۶: تابع $m_\alpha(\lambda)$ یک تابع موهومی هرگلوتز (نوانلینا – پیک) است. هرگاه در نیم صفحه بالایی تحلیلی باشد و نیم صفحه بالایی را به خودش مینگارد (با بخش موهومی فرضی). از طرفی هر قطب از $m_\alpha(\lambda)$ ساده است و روی محور حقیقی واقع شده است. $m_\alpha(\lambda)$ را می توان بصورت یک انتگرال کوشی- اشتیلیس شامل تابع طیفی $\rho_\alpha(\mu)$ارائه داد. بعلاوه $m_\alpha(\lambda)$ و $m_\beta(\lambda)$ با فرمول زیر بهم مرتبط اند.

$$m_\beta(\lambda)=\frac{m_\alpha(\lambda)\cos(\beta-\alpha)-\sin(\beta-\alpha)}{m_\alpha(\lambda)\sin(\beta-\alpha)+\cos(\beta-\alpha)} \qquad (۱. ۲. ۱۰)$$

برای توضیحات بیشتر به [۲۰۱۷و۱۲و۶و۳] رجوع شود.

قضیه ۱-۲۷ : (فرمولهای رابط بین$\rho_\alpha(\lambda)$ و$m_\alpha(z)$ بترتیب زیر می باشند).

$$i)\ \ \rho_\alpha(v)-\rho_\alpha(\mu)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\int_\lambda^V \mathrm{Im}\{m_\alpha(x+i\varepsilon)\}dx \qquad (۱. ۲. ۱۱)$$

برای همه $\mu,v\in R$ که نقاط پیوستگی $\rho_\alpha(\lambda)$ می باشند داریم.

$$ii)\ \ m_\alpha(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda-z}d\rho_\alpha(\lambda)+\cot g\alpha \qquad (۱. ۲. ۱۲)$$

برای همه $\alpha\in(0,\pi)$

نوع زیر از (۱. ۲. ۱۱) به عنوان فرمول تیچ مارش- کداریا ارتباط بین $\rho_\alpha(\mu)$ و $m_\alpha(\lambda)$ را ایجاد می کند.

$$iii)\quad \rho'_\alpha(\mu) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{Im}\{m_\alpha(\mu + i\varepsilon)\}$$

(۱. ۲. ۱۳)

که حد در آن وجود دارد.

اثبات: رجوع کنید به [۱۷و۱۲و۳] .

گیلبرت و هریس [۷] نتایج زیر را برای معادلات حد نقطه ای (۱. ۲. ۱) استورم – لیوویل ثابت می کنند.

قضیه ۱-۲۸ : تقریباً برای همه $\mu \in R$ ، اگر $\alpha \in [\circ, \pi)$ باشد و $0 < \rho'_\alpha(\mu) < \infty$ نتایج زیر را داریم.

(i) $\rho'_\beta(\mu)$ موجود است با $0 < \rho'_\beta(\mu) < \infty$ برای هر $\beta \in [0, \pi)$.

(ii) برای هر $\alpha_1, \alpha_2 \in (\circ, \pi) - \{\frac{\pi}{2}\}$ خواهیم داشت.

$$2\rho'_\circ(\mu)\left\{\frac{1}{\rho'_{\alpha_1}(\mu)\sin 2\alpha_1} - \frac{1}{\rho'_{\alpha_2}(\mu)\sin 2\alpha_2}\right\} = \left(\frac{\rho'_\circ(\mu)}{\rho'_{\frac{\pi}{2}}(\mu)}\right)\{tg\alpha_1 - tg\alpha_2\} + \cot g\alpha_1 - \cot g\alpha_2 \qquad (۱. ۲. ۱۴)$$

اثبات: رجوع کنید به [۷].

قضیه ۱-۲۹ : تقریباً برای همه $\mu \in R$ ، اگر وجود داشته باشد $\alpha \in [0, \pi)$ که $0 < \rho'_\alpha(\mu) < \infty$ و اگر α , $\alpha + \frac{\pi}{2}$, β مقادیر متمایز $[\circ, \pi)$ باشند، داریم.

$$\frac{\rho'_{\alpha}(\mu)}{\rho'_{\alpha+\frac{\pi}{2}}}-\left(\pi\rho'_{\alpha}(\mu)\right)^{2}=\frac{1}{\sin^{2}(2\beta-2\alpha)}\left\{\frac{\rho'_{\alpha}(\mu)}{\rho'_{\beta}(\mu)}-\frac{\rho'_{\alpha}(\mu)}{\rho'_{\alpha+\frac{\pi}{2}}(\mu)}\sin^{2}(\beta-\alpha)-\cos^{2}(\beta-\alpha)\right\}^{2}$$

(۱. ۲. ۱۵)

اثبات: رجوع کنید به [۷].

ایسام در [۴] معادله (۱. ۲. ۱۴) را برای $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in[\circ,\pi)$ بصورت زیر بازنویسی می کند.

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\delta)\sin(\delta-\beta)}{\rho'_{\alpha}(\mu)}-\frac{\sin(\gamma-\delta)\sin(\delta-\alpha)\sin(\alpha-\gamma)}{\rho'_{\beta}(\mu)}$$
$$+\frac{\sin(\delta-\alpha)\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\delta)}{\rho'_{\gamma}(\mu)}-\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}{\rho'_{\delta}(\mu)}=\circ$$

این قضیه ها روابط بین مشتقات طیفی را نشان می دهد. در حالت کلی، آگاهی از $\rho'_{\alpha}(\mu)$ بـرای سـه α متمایز کا فی است تا هر مشتق طیفی چهارمی بطور منحصر بفرد تعیین شود.

دیدگاه اپراتوری مسئله :

توابع طیفی را می توان از نقطه نظر تئوری کلـی طیفـی اپراتورهـای خـود الحـاق خطـی در یـک فـضای هیلبرت با حاصلضرب اسکالر (f,g) مورد بررسی قرارداد.

تعریف ۱-۳۰: یک مجموعه D_T از عناصر فضای هیلبرت H در نظر بگیرید اگـر بـه ازای هـر $f\in D_T$ ، یک $Tf\in H$ موجود باشد،پس T در H با دامنه D_T یک اپراتور نامیده می شـود و نیـز T اپراتـور خطـی است اگر $T(\alpha f+\beta g)=\alpha Tf+\beta Tg$ که $\alpha, \beta\in C$, $f,g\in D_T$ می باشد.

تعریف ۱-۳۱: یک اپراتور T را بسته گویند اگر حدهای زیر موجود باشد
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, $\lim\limits_{n\to\infty} T f_n = g$ با $f_n\in D_T$ که $f\in D_T$, $g=Tf$ می باشد.

تعریف ۱-۳۲: الحاق T اپراتوری است بصورت $g^* = T^* g$. یک اپراتور T خود الحاق است اگر $T=T^*$.

یعنی $D_T=D_T{}^*$ و $Tf=T^*f$ برای همه $f \in D_T$.

از جمله ویژگیهای اپراتورهای خود الحاق آن است که اگر یک اپراتور خودالحاق وارون داشته باشد، این وارون خودالحاق است.مقادیر ویژه اپراتور خودالحاق حقیقی هستند. همچنین توابع ویژه f_2,f_1 متناظر با مقادیر ویژه λ_2,λ_1 از یک اپراتور خودالحاق، متعامد هستند.

تعریف ۱-۳۳: برای معادله استورم- لیوویل، اصطلاح دیفرانسیل L را در نظر می گیریم که اینگونه تعریف شده اند.

$$Ly = \frac{1}{w}\left(-(py')' + qy\right)$$

پس معادله استورم- لیوویل معادل $Ly=\lambda y$ است.

فضای هیلبرت مرتبط بصورت زیر است.

$$L^2[\circ,\infty,w) = \left\{ f \,\middle|\, \int_0^\infty |f(x)|^2 w(x)dx < \infty \right\}$$

با حاصل اسکالر

$$\left(f(x), g(x)\right)_w = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\, w(x)\, dx$$

اپراتور H_α اینگونه تعریف می شوند

$$H_\alpha y = Ly \quad , \quad y \in D \qquad \text{برای}$$

که D مجموعه توابع y است که موارد زیر صدق می کند.