دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

گرایش جبر

عنوان :

گراف هم‌ماکسیمال در حلقه‌های جابجایی و ناجابجایی

استاد راهنما :

دکتر غلامرضا صفاکیش همدانی

استاد مشاور:

دکتر حمیدرضا میمنی

پژوهشگر :

گلسا دهقان

خرداد ماه ۱۳۸۹

به نام خداوند جان و خرد   کزین برتر اندیشه برنگذرد

سپاس بیکران به درگاه حق که قطره‌ای از اقیانوس بی‌منتهای علم‌اش بر بندگان عنایت کرد تا همواره در عطش قطره‌ای دیگر عمر گزارند.

با تاسی از حدیث نبوی (من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق) بر خود واجب می‌دانم که از راهنمایی‌های ارزشمند جناب آقای دکتر غلامرضا صفاکیش همدانی و دکتر حمیدرضا میمنی که در راه آراستن دانشجویان به گوهر علم و معرفت از هیچ کوششی دریغ نمی‌فرمایند، سپاسگزاری نمایم. همواره از یزدان دستگیر برای این دو بزرگوار سلامت و توفیق روزافزون آرزومندم.

ارج می‌نهم همراهی و همدلی همسر و دوست مهربانم را که یاور و مددکار تمامی لحظات زندگی‌ام بوده و هست.

قدردانی و سپاس فراوانم را تقدیم می‌دارم به خانواده بی‌همتایم: پدرم، تکیه‌گاه زندگیم؛ مادرم، اسطوره عشق و ایثار؛ خواهرم، مهربانی بی‌بدیل؛ مادربزرگم، آن عزیز از دست رفته که یادش همیشه می ماند.

در پایان وظیفه خود می‌دانم که از یاری‌های بی‌دریغ آقای دکتر مهدی امیدعلی و آقای دکتر کریم سامعی- که بدون هیچ چشم‌داشت و تعهدی یاری‌گر اینجانب بودند- سپاس‌گزاری نمایم.

دانشگاه بوعلی سینا

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی

عنوان:

گراف هم ماکسیمال در حلقه‌های جابجایی و ناجابجایی

نام نویسنده: گلسا دهقان

نام استاد/اساتید راهنما: دکتر غلامرضا صفاکیش همدانی

نام استاد/اساتید مشاور: دکتر حمید رضا میمنی

دانشکده : علوم پایه	**گروه آموزشی:** ریاضی	
رشته تحصیلی: ریاضی محض	**گرایش تحصیلی:** جبر	**مقطع تحصیلی:** کارشناسی ارشد
تاریخ تصویب: ۱۳۸۸/۷/۲۷	**تاریخ دفاع:** ۱۳۸۹/۳/۲۲	**تعداد صفحات:** ۸۶

چکیده:

برای حلقه یکدار R، گراف هم ماکسیمال حلقه R، که با $\Gamma(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی ساده است که رأس های آن همه‌ی عناصر R بوده و دو رأس متمایز x و y مجاور هستند، اگر و تنها اگر $Rx + Ry = R$. هدف از مطالعه ی گراف هم ماکسیمال، ایجاد ارتباط بین نظریه‌ی گراف و نظریه‌ی حلقه می‌باشد. این پایان‌نامه در دو مرحله انجام می‌شود.

مرحله اول: ابتدا زیرگراف $\Gamma_2(R)$ از گراف $\Gamma(R)$ که وابسته به عناصر غیر یکه R است را معرفی می‌کنیم و در حالی که R حلقه جابجایی باشد، همبند بودن و قطر این گراف را بررسی کرده و به طور کامل قطر گراف $\Gamma_2(R) \setminus J(R)$، به طوری که $J(R)$ رادیکال جیکبسن حلقه R است، را توصیف می‌نمائیم. به ویژه، شرط لازم و کافی بین یکریختی دو گراف و یکریخت بودن حلقه‌هایشان را بررسی خواهیم کرد و ثابت می‌کنیم اگر R و S دو حلقه نیم موضعی متناهی باشند، به طوری که R تحویل‌یافته است، آن گاه $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ می باشد، اگر و تنها اگر $R \cong S$.

مرحله دوم: فرض می‌کنیم R یک حلقه (نه لزوما جابجایی) باشد و نشان می‌دهیم اگر R حلقه‌ی آرتینی چپ باشد آن‌گاه $\Gamma_2(R) \setminus J(R)$ همبند است و اگر $\Gamma_2(R) \setminus J(R)$ جنگل در نظر گرفته شود، آن‌گاه $\Gamma_2(R) \setminus J(R)$ گراف ستاره می‌باشد. سپس ثابت‌های عددی از $\Gamma_2(M_n(F_q))$، مانند درجه مینیمال، درجه ماکسیمال، عدد همبندی، خوشه‌ای و رنگی را محاسبه می‌کنیم. در آخر، به این سئوال پاسخ می‌دهیم که اگر $\Gamma_2(R) \cong \Gamma_2(S)$، آیا می‌توان در حالت کلی $R \cong S$ را نتیجه گرفت و با مثال نقضی حالت کلی را رد می‌کنیم. اما ثابت می‌کنیم که اگر R، حلقه‌ای یکدار و F_q میدان متناهی با q عنصر بوده و $n \geq 2$ باشد به طوری که $\Gamma_2(R) \cong \Gamma_2(M_n(F_q))$، آن‌گاه $R \cong M_n(F_q)$ و هم چنین اگر R و R' دو حلقه جابجایی متناهی یکدار و R تحویل‌یافته بوده و به ازای $n, m \geq 2$، $\Gamma_2(M_n(R)) \cong \Gamma_2(M_m(R'))$ باشند، آن گاه $n = m$ و $R \cong R'$.

واژه‌های کلیدی: حلقه ناجابجایی، ایدآل چپ ماکسیمال، حلقه پاک، همبندی گراف، قطر گراف، بعد گراف، عدد خوشه‌ای گراف، عدد رنگی گراف، گراف هم ماکسیمال.

فهرست مندرجات

فصل ۰

مقدمه

هر چیزی باید به ساده‌ترین شکل ممکن باشد. اما نه ساده‌تر از آن.
آلبرت انشتین

ریاضیات به خودی خود زیبا و ژرف است، ولی کاربرد ریاضیات در علوم دیگر و زندگی روزمره باعث می شود که ریاضیات زیبا تر و تأثیرگذارتر شود. راز بقای ریاضیات هم در واقع این است که علوم دیگر به آن وابسته اند. ریاضیات هم‌چنین به علوم دیگر دقت می بخشد و از مباحثه و جدل‌های طولانی جلوگیری می‌کند. در میان شاخه‌های گسترده‌ی ریاضیات، شاخه‌ی جبر ساختاری کاربردی‌تر دارد. در نگاه اول شاید یک ریاضی‌دان مسئله‌ای را در جبر مطرح کند که با ریاضیاتی که در اذهان عموم جا گرفته سنخیتی نداشته باشد، اما در واقع این مسائل بیان دقیق ریاضیات شناخته شده است، تاثیر عمیق جبر بر سایر شاخه‌های ریاضی برای ریاضی‌دانان واضح است و تقریباً امروزه یک نظریه‌ی زیبا و پیشرفته‌ی ریاضی نمی‌تواند مستقل از جبر باشد. مانند نظریه‌ی جبری اعداد، هندسه‌ی جبری، توپولوژی جبری، آنالیز تابعی، هندسه ناجابجایی و ....

ایده‌ی برقراری ارتباط بین حلقه‌های جابجایی و نظریه‌ی گراف برای اولین بار در سال ۱۹۸۸ توسط بک[1] طی مقاله‌ی،

[1] Beck

Beck, I., **1988**. Coloring of Commutative Rings. J. Algebra. 116: 208-226.

مطرح شد. در تعریفی که این ریاضی‌دان در مقاله‌اش ارائه داد، همه‌ی عناصر حلقه R به عنوان رئوس یک گراف قرار داده شده‌اند و دو رأس متمایز x و y مجاور هستند، اگر و تنها اگر $xy = ۰$. بنابراین در این گراف رأس ۰ با همه‌ی رئوس دیگر مجاور است. در حقیقت کار اساسی بک پیدا کردن شرط لازم و کافی برای متناهی بودن عدد رنگی گراف وابسته به حلقه R بود. وی حدس زد که عدد رنگی و عدد خوشه‌ای گراف حلقه R با هم برابرند و نتوانست این حدس را رد یا اثبات نماید. گرافی که بک تعریف کرد، گراف مناسبی نبود و خواص بدیهی زیادی داشت. از جمله همه‌ی رئوس با رأس صفر مجاور بودند. اما اندرسون [۲] و نصیر [۳] در سال ۱۹۹۳ طی مقاله‌ی

Anderson. D. D, Naseer, M. **1993**. Beck's coloring of commutative ring,

J. Algebra. 159: 500-514.

مطالعات در ارتباط با متناهی بودن عدد رنگی حلقه‌ی R را گسترش داده و مثالی از حلقه‌ی موضعی متناهی بیان کردند که شرط زیر را دارا می‌باشد:

$$۵ = clique(\Gamma(R)) < \chi(\Gamma(R)) = ۶.$$

مطالعه در این مقوله توسط ریاضی‌دانان متعددی ادامه یافت، تا این که در سال ۱۹۹۹، اندرسون [۴] و لیوینگستون [5] طی مقاله‌ی،

Anderson, D. F., and Livingston, P. S. **1999**. The Zero-Divisor Graph of a

Commutative Ring.J. Algebra. 217: 434-447.

۲ Anderson
۳ Naseer
۴ Anderson
۵ Livingston

تعریف جدیدی برای گراف وابسته به یک حلقه‌ی جابجایی ارائه دادند. در این تعریف رئوس گراف، مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر غیربدیهی حلقه هستند و دو رأس متمایز x و y مجاور هستند، اگر و تنها اگر $xy = 0$.

بدیهی است که گراف اندرسون زیر گرافی از گراف بک است. اندرسون نشان داد $\Gamma(R)$ گرافی همبند است و کرانی برای قطر و کَمر این گراف بدست آورد.

در سال ۱۹۹۵، شارما[۶] و باتوادکار[۷] ، طی مقاله‌ی

Sharma. P. K, BhatWadekar, **1995**. A note on graphical representation of rings, J.Algebra 176: 124-127.

گراف جدیدی برای حلقه‌ی R تعریف کردند که در آن به هر حلقه‌ی جابجایی مانند R گراف $\Gamma(R)$ را نظیر کردند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

مجموعه رئوس $\Gamma(R)$، همه عناصر R می باشد و دو رأس متمایز x و y با یکدیگر مجاورند اگر و تنها اگر $Rx + Ry = R$. آن‌ها نشان دادند که عدد رنگی $\Gamma(R)$ متناهی است اگر و تنها اگر R متناهی باشند. در این حالت $\chi(\Gamma(R)) = clique(\Gamma(R)) = t + l$ که t و l به ترتیب، تعداد ایدآل های ماکسیمال R و تعداد عناصر یکه را مشخص می‌کند.

گراف تعریف شده توسط شارما و باتوادکار، مورد توجه میمنی [۸] و یاسمی [۹] قرار گرفت و در سال ۲۰۰۸ طی مقاله‌ی

---

۶ Sharma
۷ Bhatwadekar
۸ Maimani
۹ Yassemi

Maimani. H. R, Salimi. M, Sattari. A, Yassemi. S, **2008** Comaximal graph of commutative rings, J. Algebra 319: 1801-1808.

که اساس نگارش فصل دوم این پایان‌نامه می‌باشد، ساختار این گراف بیشتر مورد مطالعه قرار گرفت.

در این مقاله، $\Gamma_1(R)$ زیر گراف تولید شده توسط عناصر یکه R و $\Gamma_2(R)$ زیر گراف تولید شده توسط عناصر غیر یکه R می‌باشند و نشان داده می‌شود که $\Gamma_2(R)\backslash J(R)$ گراف کامل دو بخشی است اگر و تنها اگر عدد اصلی $Max(R)$، برابر ۲ باشد. هم‌چنین نشان می‌دهند که R، حاصل ضرب تعداد متناهی حلقه‌ی موضعی است اگر و تنها اگر R پاک باشد و $clique(\Gamma_2(R)\backslash J(R)) < \infty$. در ادامه ثابت می شود که $\Gamma_2(R)\backslash J(R)$ همبند است و $diam(\Gamma_2(R)\backslash J(R)) \leq 3$ و در آخر شرط لازم و کافی برای اینکه از یکریختی دو گراف، یکریخت بودن حلقه‌هایشان را نتیجه گرفت، بررسی می‌کنند و نشان می‌دهند اگر R و S دو حلقه نیم موضعی متناهی باشند، به طوری که R تحویل‌یافته است، آن‌گاه $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ است اگر و تنها اگر $R \cong S$.

به دنبال گسترش این مفهوم در سال ۲۰۰۹، وَنگ[۱۰] طی مقاله‌ی

Wang. H. -J, **2009** Comaximal graph of non-commutative rings, Linear Algebra and its Application 430: 633-641.

ساختار گراف هم‌ماکسیمال در حلقه‌های یکدار ناجابجایی را بررسی کرد که اساس نگارش فصل سوم می‌باشد. در این مقاله $\Gamma_2(R)$ گراف وابسته به حلقه یکدار(نه لزوماً جابجایی) است که مجموعه رأس‌های آن عناصر غیریکه R می‌باشند و دو رأس a و b در $\Gamma_2(R)$ مجاورند اگر و تنها اگر $Ra + Rb = R$ و نشان داده می‌شود که اگر R حلقه آرتینی چپ باشد، آن‌گاه $\Gamma_2(R)\backslash J(R)$ همبند

[۱۰] Wang

است و اگر $\Gamma_2(R)\backslash J(R)$ جنگل باشد، آن‌گاه $\Gamma_2(R)\backslash J(R)$ گراف ستاره‌ای خواهد بود و در ادامه ثابت‌های عددی از گراف $\Gamma_2(M_n(\mathbb{F}_q))$، مانند درجه مینیمال، درجه ماکسیمال، عدد همبندی، خوشه‌ای و رنگی محاسبه می‌شود . در آخر مانند مرجع [۱۱]، به این سؤال پاسخ داده شده است که اگر $\Gamma_2(R) \cong \Gamma_2(S)$، آیا می‌توان در حالت کلی نتیجه گرفت $R \cong S$ و با مثال نقضی حالت کلی نقض می‌شود. اما اگر R حلقه‌ای یکدار باشد و $n \geq 2$ به طوری که $\Gamma_2(R) \cong \Gamma_2(M_n(\mathbb{F}_q))$، آن‌گاه $R \cong M_n(\mathbb{F}_q)$ و هم‌چنین اگر R و R' دو حلقه جابه‌جایی متناهی یکدار بوده و اگر R تحویل‌یافته و به ازای $n, m \geq 2$، $\Gamma_2(M_n(R)) \cong \Gamma_2(M_m(R'))$ باشند، آن‌گاه $n = m$ و $R \cong R'$. از اینرو اساس کار این پایان‌نامه به صورت زیر خواهد بود:

در فصل اول، مفاهیم مقدماتی را از نظریه‌ی گراف و تعاریف ابتدای را از نظریه‌ی حلقه‌های جابجایی و ناجابجایی بیان می‌کنیم و در فصل دوم که بر اساس مرجع [۱۱] تنظیم شده، به بیان و اثبات چند قضیه اساسی در مورد گراف‌های هم ماکسیمال در حلقه‌های جابجایی می پردازیم و در فصل آخر که بر اساس مرجع [۱۷] است، گراف هم‌ماکسیمال را در حلقه‌های ناجابجایی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و خواص اساسی آن را درباره‌ی ماتریس‌های $n \times n$، بیان می‌داریم. لازم به ذکر است که استفاده از برخی خواص جبرخطی و اصول شمارش و مهم‌تر، رهیافت گرافی در اثبات برخی از قضیه‌ها از نظر شهودی و هندسی، بسیار کاربردی و زیبا است.

استدلال اولین موهبت زمینی است.

ادوارد گیبون

فصل ۱

پیش‌نیازها

جوهر ریاضیات، آزادی آن است.

جورج فردیناند فیلیپ کانتور

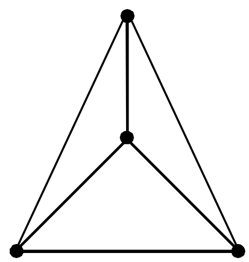
۱−۱ مفاهیمی در نظریه‌ی گراف

از آن‌جایی که برخی مفاهیم مقدماتی در نظریه‌ی گراف از اساسی‌ترین ابزار لازم در بررسی ساختار گراف هم‌ماکسیمال در حلقه‌های جابجایی و ناجابجایی می‌باشند، بنابراین در اولین بخش از این فصل مختصراً به بیان مفاهیم و تعاریف مقدماتی از نظریه‌ی گراف می‌پردازیم.

۱−۱ تعریف. **گراف ساده‌ی** G را به صورت زوج مرتب $(V(G), E(G))$ تعریف می‌کنیم، به‌طوری که $V(G)$ یک مجموعه‌ی ناتهی از عناصری به نام رئوس و $E(G)$ خانواده‌ای از زوج‌های نامرتب از عناصر $V(G)$ موسوم به یال‌ها است. توجه می‌کنیم که گراف ساده، طوقه و یال تکراری ندارد.

در گراف ساده‌ی G دو رأس v و w را مجاور می‌گوییم، هرگاه یک یال بین آن‌ها موجود باشد و با vw یا $v-w$ نشان می‌دهیم. منظور از طوقه یالی است که یک رأس را به خودش وصل می‌کند.

۱–۲ تعریف. گراف ساده‌ای را که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشند، گراف **کامل** می‌نامیم. گراف کامل با n رأس را معمولاً به صورت K_n نشان می‌دهیم. به عنوان نمونه گراف $K_۴$ را در شکل ۱ – ۱ مشاهده می‌کنید.



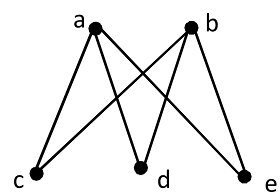
شکل ۱ – ۱

۱–۳ تعریف. گراف G را r ـ **بخشی** می‌گوییم، هرگاه رئوس G را بتوان به r زیرمجموعه افراز کرد به طوری که بین رئوس هیچ یک از این زیرمجموعه‌ها، یالی نباشد. گراف r ـ بخشی G را یک گراف r ـ بخشی کامل گوییم، هر گاه هر دو رأس که در یک بخش نیستند، با یکدیگر مجاور باشند. گراف دوبخشی کامل با بخش‌های با اندازه‌ی n و m را با نماد $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم. گراف $K_{۱,s}$ را یک گراف **ستاره‌ای** می‌نامیم.

مثال ۱. در شکل ۱ – ۲ و ۱ – ۸ (الف) به ترتیب گراف دو بخشی کامل $K_{۲,۳}$ و گراف ستاره‌ای $K_{۱,۵}$ را مشاهده می‌کنید.

۱ــ۴ تعریف. **درجه** هر رأس برابر با تعداد یال‌هایی است که از آن رأس می‌گذرد. درجه رأسی مانند v از گراف G را به صورت $\mathbf{deg}_G\ v$ نمایش می‌دهیم. **درجه مینیمال** گراف G را با $\delta(G)$ و **درجه ماکسیمال** گراف G با $\Delta(G)$ نشان داده می‌شود.

مثال ۲. در گراف شکل ۱ − ۲ داریم $\deg\ a = \deg\ b = ۳$، $\delta(G) = ۲$ و $\Delta(G) = ۳$.



شکل ۱ــ۲

۱ــ۵ تعریف. اگر در گراف G، تساوی $\delta(G) = \Delta(G) = r$ برقرار باشد، آن‌گاه همه‌ی رئوس گراف G درجه‌ی یکسانی دارند. در این حالت گراف G را r ـ **منتظم** می نامند.

۱ــ۶ نکته. الف) گراف منتظم از درجه صفر، شامل هیچ یالی نمی‌باشد.

ب) گراف کامل K_n و گراف کامل دوبخشی $K_{n,n}$، گراف‌های $n-۱$ ـ منتظم هستند.

۱ــ۷ تعریف. **مرتبه گراف** G، که به صورت $|G|$ نمایش داده می شود، برابر با تعداد رأس‌های گراف G می باشد.

۱ــ۸ تعریف. **مکمل گراف ساده‌ی** G، G^c گراف ساده‌ای با مجموعه‌ی رئوس V است. دو رأس در G^c مجاوراند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند. G^c را با نماد $\bar{G}$ نیز نمایش می‌دهیم. بدیهی است که K_m^c، گرافی فقط شامل رئوس K_m است.

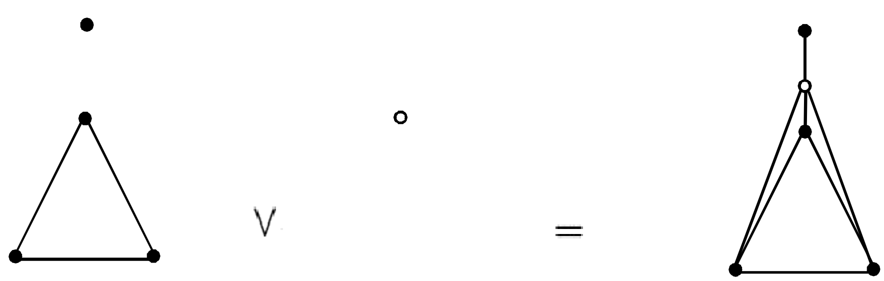
مثال ۳. در شکل ۱ − ۳ (الف)، گراف G و در ۱ − ۳ (ب)، $\bar{G}$ رامشاهده می کنید.

(ب) (الف)

شکل ۱ − ۳

۱−۹ تعریف. **پیوند** گراف‌های مجزای G و H گرافی است که $G+H$ با اتصال هر رأس G به هر رأس H بدست می آید. پیوند G و H را با نماد $G \vee H$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۴. در گراف شکل ۱ − ۴ داریم:



شکل ۱ − ۴

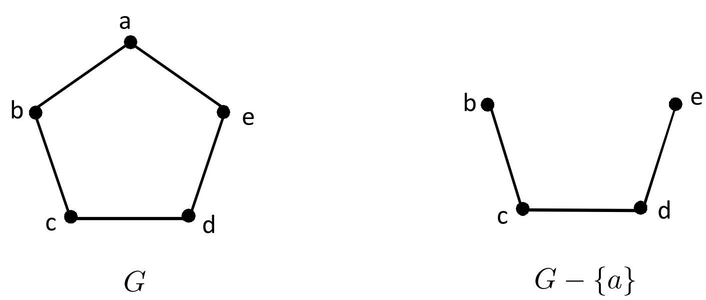
۱−۱۰ تعریف. گراف H **زیرگراف** G است اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و به صورت $H \subseteq G$ نوشته می‌شود. وقتی که $H \subseteq G$ اما $H \neq G$، می‌نویسیم $H \subset G$ و H را زیرگراف سره‌ی G می‌نامیم.

۱−۱۱ تعریف. فرض کنیم G_1 و G_2 زیرگراف‌های G باشند. می گوییم G_1 و G_2 مجزا هستند، اگر هیچ رأس مشترکی نداشته باشند و یال مجزا هستند، اگر هیچ یال مشترکی نداشته باشند. اجتماع

G_1 و G_2 ($G_1 \bigcup G_2$)، زیرگرافی با مجموعه‌ی رئوس $V(G_1) \bigcup V(G_2)$ و مجموعه‌ی یال‌های $E(G_1) \bigcup E(G_2)$ است. اگر G_1 و G_2 مجزا باشند، اجتماع آن‌ها را به صورت $G_1 + G_2$ نمایش می‌دهیم.

۱–۱۲ تعریف. فرض کنیم $V' \subseteq V(G)$، آن‌گاه $G \backslash V'$، زیرگرافی از G است که از حذف رئوس و یال های متصل به آن بدست می آید.

مثال ۵.

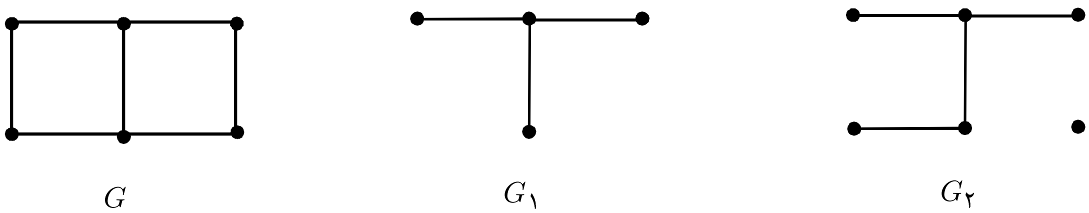


شکل ۱ – ۵

۱–۱۳ تعریف. اگر H زیرگراف G باشد، مکمل H در G که آن را با نماد $\bar{H}(G)$ نمایش می‌دهیم، زیرگراف $G \backslash E(H)$ است.

۱–۱۴ تعریف. **زیرگراف القایی** $< S >$، زیرگراف ماکسیمالی از G با مجموعه رئوس S می باشد. بنابراین دو رأس از S در $< S >$ مجاورند اگر و تنها اگر در گراف G مجاور باشند.

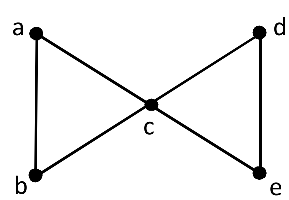
مثال ٦. در شکل ۱ – ٦، مشاهده می کنید که G_1 زیرگراف القایی از گراف G است. اما G_2 اینطور نمی باشد.



شکل ۱–۶

۱–۱۵ تعریف. در گراف ساده‌ی $G = (V, E)$، یک **مسیر** بین دو رأس $x, y \in V$ دنباله‌ای از رئوس $x_i \in V$ به ازای $i = ۱, \ldots, n$، به صورت $x_۱ x_۲ \cdots x_n$ است که $x_۱ = x$ و $x_n = y$ و تمام x_iها با هم متفاوتند و $\{x_i, x_{i+۱}\}$ یک یال در E می‌باشد. **طول مسیر** $x_۱ x_۲ \cdots x_n$ برابر $n - ۱$ است. اگر $x_n = x_۱$، آن‌گاه $x_۱ x_۲ \cdots x_n$ یک **دور به طول** $n - ۱$ تعریف می‌شود.

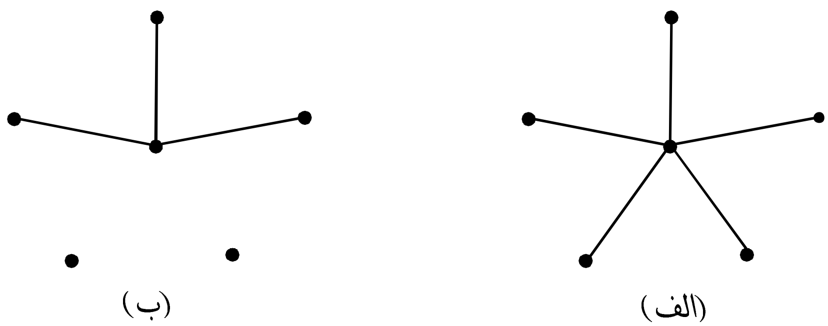
مثال ۷. در گراف شکل ۱ – ۷، $a - c - d$، یک مسیر به طول ۲ بین دو رأس a و d است و مسیر بسته‌ی $a - c - b - a$، یک دور می‌باشد.



شکل ۱–۷

۱–۱۶ تعریف. گراف G را **همبند** می‌گوییم، اگر بین هر دو رأس مجزای آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. اگر گراف G همبند نباشد، آن‌گاه گراف G را **ناهمبند** می‌نامیم.

مثال ۸. گراف‌های شکل‌های ۱ − ۷ و ۱ − ۸(الف) همبند هستند، ولی گراف شکل ۱ − ۸(ب) ناهمبند است.



شکل ۱ − ۸

۱—۱۷ تعریف. گراف G را **کاملاً ناهمبند** می گوییم هرگاه $E(G) = \emptyset$.

مثال ۹. مکمل گراف K_n، گراف کاملاً ناهمبند است.

۱—۱۸ تعریف. فرض کنیم G یک گراف باشد. طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس x و y را با نماد $d(x, y)$ نشان می‌دهیم. اگر مسیری بین x و y موجود نباشد، آن‌گاه $d(x, y) = \infty$.

۱—۱۹ تعریف. برای گراف ساده‌ی همبند G، **قطر** گراف را با $\text{diam}(G)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{diam}(G) = \text{Max} \{ \, d(x, y) \mid x, y \in V(G)\}.$$

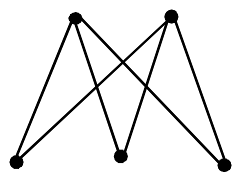
مثال ۱۰. در گراف شکل ۱ − ۷، مشاهده می‌کنیم که $\text{diam}(G) = ۲$.

۱ــ۲۰ نکته. هرگاه $m \geq ۲$ و یا $n \geq ۲$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(K_{m,n}) = ۲$ و $\mathrm{diam}(K_m) = ۱$.

۱ــ۲۱ تعریف. طول کوتاه‌ترین دور در گراف $G = (V, E)$ را **کمر** گراف G تعریف می‌کنیم و با نماد $gr(G)$ نمایش می‌دهیم.

قرارداد: اگر گراف G شامل هیچ دوری نباشد، آن‌گاه $gr(G) = \infty$.

مثال ۱۱. در گراف شکل ۱ − ۹، داریم $gr(G) = ۴$.



شکل ۱ − ۹

۱ــ۲۲ نکته. الف) هرگاه $m, n \geq ۲$، آن‌گاه $gr(K_{m,n}) = ۴$.

ب) به ازای هر $n \geq ۰$ داریم: $gr(K_{۱,n}) = \infty$.

۱ــ۲۳ تعریف. **همبندی** گراف G، برابر با تعداد حداقل رئوسی است که اگر از گراف G، حذف شود، گراف ناهمبند و یا بدیهی می‌شود که آن را با $\kappa(G)$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱۲. الف) همبندی گراف ناهمبند برابر صفر است.

ب) در گراف کامل K_n، تساوی $\kappa(K_n) = n - ۱$ همواره برقرار است و در این حالت با حذف $n - ۱$ رأس، گراف بدیهی می‌شود.

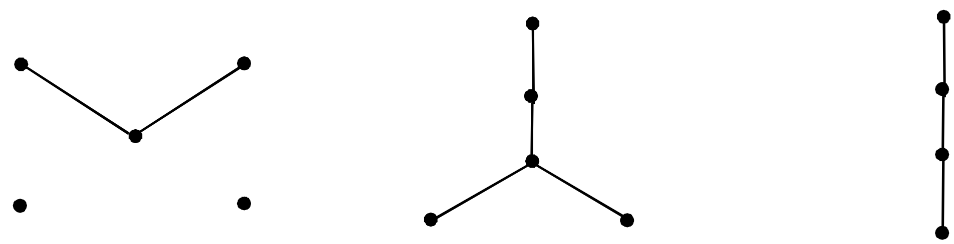
۱—۲۴ قضیه. برای هر گراف مانند G، $\kappa(G) \leq \delta(G)$.

اثبات. قضیه۵.۱۱ از مرجع [۸] را ببینید. ■

۱—۲۵ تعریف. گراف G **جنگل** نامیده می‌شود، هرگاه شامل هیچ دوری نباشد.

۱—۲۶ تعریف. هر گراف همبند بی‌دور، **درخت** نامیده می‌شود.

مثال ۱۳. در شکل ۱ – ۱۰ (الف) و (ب) درخت و شکل (ج)، جنگل می‌باشد.



(الف) (ب) (ج)

شکل۱ – ۱۰

۱—۲۷ تعریف. فرض کنید G یک گراف باشد. منظور از k ـ **رنگ‌آمیزی** G یک برچسب‌گذاری رئوس G با اعداد $\{۱,\ldots,k\}$ است به طوری که هیچ دو رأس مجاور برچسب یکسانی نداشته باشند. عدد رنگی G را با $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم و برابر کم‌ترین مقدار k تعریف می‌کنیم به طوری که G یک k ـ رنگ‌آمیزی داشته باشد. اگر چنین kای موجود نباشد، می‌نویسیم $\chi(G) = \infty$.

۱—۲۸ تعریف. گراف G را **رنگ‌پذیر** گوییم، هرگاه $\chi(G) < \infty$.