بسم‌ا...الرحمن الرحیم

تحت چه شرایطی یک تابعی ضربی است؟

توسط

محمد رحیمی

پایان نامه

ارائه شده به دانشکده تحصیلات تکمیلی بعنوان بخشی ازفعالیت های

تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی‌ارشد

دررشته

ریاضی محض

از

دانشگاه شیراز

شیراز، ایران

۱۳۸۲ /۸/ ۲۰

ارزیابی وتصویب شده توسط کمیته‌پایان نامه بادرجه: **عالی**

امضاء اعضاء کمیته پایان نامه:

عبدالعزیز عبدالهی، استادیار ریاضی (رئیس‌کمیته) ....

بهرام خانی‌رباطی، دانشیار ریاضی ....

محسن تقوی، دانشیار ریاضی ....

کاظم مصالحه، استادیار ریاضی ....

شهریور ماه ۱۳۸۲

۶۹۲۰۴

تقدیم به

ابوالفضل، علی، محمود، محمد، کوروش، داریوش، مهرداد و ....

سپاسگزاری

با تشکر از استاد راهنمای اینجانب آقای دکتر عبدالهی و آقای دکتر خانی که متحمل خواندن این پایان‌نامه شدند و آقایان دکتر مصالحه و دکتر تقوی که در جلسه دفاع حضور داشتند.
در پایان از سرکار خانم چابکی که بردبارانه و با دقت توانستند حروفچینی و آرایش فرمولها و صفحه‌ها را انجام دهند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

چکیده

تحت چه شرایطی یک تابعی ضربی است؟

به‌وسیله:

محمد رحیمی

قضیه $(G.K.Z)$ بیان می‌کند که هرگاه M یک زیرفضای با هم‌بعد یک از یک جبر باناخ $\mathcal{A}$ بوده و هیچ یک از عناصر M وارون‌پذیر نباشند، آنگاه M یک ایده‌آل ماکسیمال می‌باشد.

در راستای تعمیم قضیه $(G.K.Z)$ تعریف زیر ارائه شده است:

گوییم جبر باناخ جابجایی $\mathcal{A}$ دارای خاصیت $p(k,n)$ است هرگاه گزاره زیر درست باشد:

فرض کنیم M یک زیرفضای $\mathcal{A}$ با همبعد n باشد. اگر هر $x \in M$، عضو k ایده‌آل ماکسیمال متمایز $I_۱^x, I_۲^x, \cdots I_k^x$ باشد، آنگاه k ایده‌آل $I_۱, I_۲, \cdots, I_k$ وجود داشته باشد به طوری که

$$M \subset I_۱ \cap I_۲ \cap \cdots I_k$$

در فصل دوم ضمن گذری به تاریخچه قضیه $(G.K.Z)$ نشان می‌دهیم هر جبر باناخ یک مولدی خاصیت $p(n,n)$ دارد.

یکی از صورتهای معادل قضیه $(G.K.Z)$ بصورت زیر می‌باشد:

اگر T یک تابعی روی جبر باناج $\mathcal{A}$ باشد و $T(۱) = ۱$ و یک تابع مختلط مقدار φ روی $\mathcal{A}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in \mathcal{A}$،

$$T(e^x) = e^{\varphi(x)} \qquad (۱)$$

آنگاه T ضربی است.

در پی قضیه فوق آرنز در مرجع [۱]، پرسید: اگر به جای تابع نمایی در (۱) تابع تام غیر پوشا و غیر ثابت F جایگزین شود، یعنی $ToF = Fo\varphi$، آیا لزوماً T ضربی است؟

در فصل سوم ما جواب کلی‌تری به مساله آرنز داده‌ایم:

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و F یک تابع تام غیرثابت و غیرپوشا باشد و T یک تابعی روی $\mathcal{A}$ باشد. آنگاه $ToF : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ غیرپوشاست اگر و فقط اگر $T = ۰$ یا $\frac{T}{T(۱)}$ ضربی باشد.

حال مساله آرنز نتیجه ساده‌ای از قضیه فوق می‌باشد چرا که اگر F غیرپوشا باشد، $Fo\varphi$ و ToF نیز غیرپوشاست. پس T ضربی است.

همچنین ابتدای هر فصل صورت قضایای مورد نیاز همان فصل آورده شده است.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

۱.۱ مقدمه

۱.۱.۱ تعریف: جبر مختلط یک فضای‌برداری مانند $\mathcal{A}$ روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ همراه با یک ضرب است که برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $x, y, z \in \mathcal{A}$ در خواص زیر صدق کند:

$i)\ x(yz) = (xy)z,$

$ii)\ (x+y)z = xz + yz,$

$iii)\ x(y+z) = xy + xz,$

$iv)\ \lambda(xy) = x(\lambda y).$

علاوه برآن اگر $\mathcal{A}$ با نرم $||.||$ یک فضای باناخ باشد و برای هر $x, y \in \mathcal{A}$، $||xy|| \leq ||x||\ ||y||$، $\mathcal{A}$ را جبر باناخ مختلط می‌گوییم.

در سرتاسر این نوشتار منظور از جبر باناخ، جبر باناخ روی میدان اعداد مختلط است که یکدار نیز می‌باشد. مگر آنکه خلاف آن ذکر شده باشد.

۱.۱.۲ تعریف: فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک حلقه یکدار (جبر یکدار) باشد. آنگاه اشتراک تمام ایده‌آلهای چپ ماکسیمال را با $Rad(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهند. هرگاه $Rad(\mathcal{A}) = \{\circ\}$، $\mathcal{A}$ را نیمه ساده می‌نامیم.

۱.۱.۳ تعریف: طیف $x \in \mathcal{A}$ را با $\sigma(x)$ نشان می‌دهند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad \lambda 1 - x \quad \text{وارون‌پذیر نباشد}\}$$

برای مثال، اگر X فشرده باشد و $f \in C(X)$ آنگاه $\sigma(f) = f(X)$.

توجه کنید که $\sigma(x)$ فشرده می‌باشد، پس $\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$ با معنی است.

۱.۱.۴ تبصره: $\sigma(x)$ به فضای $\mathcal{A}$ وابسته است. مثلاً فرض کنیم، $\mathcal{B}$ بست یکنواخت چند جمله‌ایها در $\mathcal{A} = C(\partial\mathbb{D})$ باشد $(\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = ۱\})$. در این صورت $\sigma_{\mathcal{B}}(z) = \bar{\mathbb{D}}$ و $\sigma_{\mathcal{A}}(z) = \partial\mathbb{D}$ [۵، ص ۲۰۶].

شکل کلی‌تر مثال بالا در قضیه ۱.۱.۸ بیان شده است. قبل از آن به تعاریف زیر نیازمندیم.

۱.۱.۵ تعریف: می‌گوییم a مولد جبر باناخ $\mathcal{B}$ است هرگاه $\mathcal{B}$ کوچکترین جبر باناخ شامل $۱, a$ باشد معادلاً مجموعه $\{p(a) :$ یک چند جمله‌ای است $p\}$ در $\mathcal{B}$ چگال باشد.

برای مثال، اگر $\mathcal{A}$ جبر باناخ تولید شده توسط f و $\mathcal{B}$ جبر باناخ تولید شده توسط $\lambda.۱ + \mu f$، جایی که $\mu \in \mathbb{C}$ و λ، باشد آنگاه $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. زیرا $\mu ۱ \in \mathcal{A}$ و $\lambda.۱$ پس $\lambda.۱ + \mu f \in \mathcal{A}$ پس $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. همچنین $\lambda.۱ \in \mathcal{B}$ پس $f = \frac{1}{\mu}((\mu f + \lambda.۱) - \lambda.۱) \in \mathcal{B}$ پس $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

۱.۱.۶ تعریف: فرض کنیم $K \subset \mathbb{C}$ فشرده باشد در این صورت «غلاف محدب چند جمله‌ای» (polynomially convex hull) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{K} = \{z \in \mathbb{C} : |p(z)| \leq ||p||_K \quad , \quad p \text{ برای هر چند جمله‌ای}\}$$

که در آن $||.||_K$ نرم سوپریمم روی K می‌باشد

۱.۱.۷ قضیه [۱۵، ص ۸۵]: فرض کنیم K زیرمجموعه فشرده $\mathbb{C}$ باشد آنگاه $\hat{K}$ برابر اجتماع K با مولفه‌های همبندی کراندار $\mathbb{C}\backslash K$ است.

۱.۱.۸ قضیه [۵، ص ۲۰۷]: اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ جبر باناخ با مولد a باشد. آنگاه $\sigma_{\mathcal{B}}(a) = \hat{\sigma}_{\mathcal{A}}(a)$. [۵، ص ۲۰۷].

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ جابجایی باشد، تابعی χ روی $\mathcal{A}$ ضربی نامیده می‌شود هرگاه ساختار ضربی را حفظ کند یعنی $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$. مجموعه تمام تابعی‌های ضربی روی $\mathcal{A}$ را با $\mathcal{M}(\mathcal{A})$

نمایش می‌دهیم.

۱.۱.۹ قضیه (گلفاند) [۲، ص ۷۱]: فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ جابجایی باشد در این صورت:

(الف) $\chi \longmapsto ker(\chi)$ یک نگاشت دوسویی از مجموعه تابعی‌های ضربی روی $\mathcal{A}$ بروی مجموعه ایده‌الهای ماکسیمال $\mathcal{A}$ است.

(ب) برای هر $x \in \mathcal{A}$، $\sigma(x) = \{\chi(x) : \chi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$.

از قضیه بالا نتیجه می‌گیریم که $Rad(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} : \rho(a) = 0\}$

۱.۱.۱۰ تعریف: فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبر باناخ جابجایی باشد و $x \in \mathcal{A}$. تبدیل گلفاند $\hat{x} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$، برای هر $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ به‌صورت $\hat{x}(\chi) = \chi(x)$، تعریف می‌شود.

۱.۱.۱۱ تعریف: فرض کنیم X فشرده باشد و $x \in X$، تابعی ضربی δ_x بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_x : C(X) \to \mathbb{C}$$

$$\delta_x(f) = f(x) \qquad , f \in C(X) \text{ برای هر}$$

۱.۱.۱۲ قضیه [۲، ص ۷۱]: فرض کنیم X مجموعه‌ای فشرده باشد. آنگاه نگاشت $x \longmapsto \delta_x$ یک دوسویی از X بروی $C(X)$ می‌باشد. به عبارت دیگر $\mathcal{M}(C(X))$ فقط شامل δ_xها است.

۱.۱.۱۳ قضیه [۲، ص ۷۳]: فرض کنیم K زیر مجموعه فشرده $\mathbb{C}$ و $A(K)$ جبر باناخ توابع پیوسته روی K باشد به طوری که روی درون K(K°) تحلیلی باشد. آنگاه نگاشت $x \longmapsto \delta_x$ یک دوسویی از K بروی $\mathcal{M}(A(K))$ است. در واقع $\mathcal{M}(A(K))$ فقط شامل δ_xها است.

۱.۲ حسابان تابعی ریس

۱.۲.۱ تعریف: فرض کنیم G یک زیر مجموعه باز در $\mathbb{C}$ و $\mathcal{A}$ یک فضای باناخ باشد. می‌گوییم

$f: G \to \mathcal{A}$ روی G تحلیلی است، اگر برای هر $z \in G$، حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

۱.۲.۲ قضیه: فرض کنیم G و $\mathcal{A}$ و $f: G \to \mathcal{A}$ همانند بالا باشند. آنگاه f روی G تحلیلی است اگر و تنها اگر برای هر $x^* \in \mathcal{A}^*$، $x^* of : G \to \mathbb{C}$ تحلیلی باشد [۱۸، ص ۷۹] [۵، ص ۱۹۹].

فرض کنیم γ یک منحنی طولپذیر در G باشد و f یک تابع پیوسته و در یک همسایگی $\{\gamma\}$ با مقادیر در $\mathcal{A}$ باشد. $\int_\gamma f$ را بصورت حد مجموع $\sum_j [\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})] f(\gamma(t_{j-1})) \in \mathcal{A}$ تعریف می‌شود، جایی که $\{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ یک افراز $[0, 1]$ است. بنابراین $x^*(\int_\gamma f) = \int_\gamma x^*(f)$ از واقعیات بالا قضیه کوشی، قضیه فرمول انتگرال کوشی، قضیه لیوویل و بسیاری از قضایای دیگر آنالیز مختلط براحتی به توابعی با مقادیر $\mathcal{A}$ ترجمه می‌شود. مثلاً:

۱.۲.۳ قضیه کوشی: اگر $\mathcal{A}$ یک فضای باناخ و G یک زیر مجموعه صفحه مختلط و $f: G \to \mathcal{A}$ یک تابع تحلیلی باشد و $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ منحنی‌های طولپذیر بسته در G باشند به طوری که برای هر $a \in \mathbb{C} \backslash G$، $\sum_{j=1}^{m} n(\gamma_j, a) = 0$ آنگاه $\sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f = 0$.

اثبات: اگر $x^* \in \mathcal{A}^*$، آنگاه بنا به قضیه کوشی برای اسکالر مقادیر:

$$x^*(\sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f) = \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} x^*(f) = 0$$

پس $\sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f = 0$.

۱.۲.۴ مثال: فرض کنیم $\lambda \in \mathbb{C}$ و $x \in \mathcal{A}$، نماد $e^{\lambda x}$ را بصورت $e^{\lambda x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!}$ تعریف می‌کنیم. با همان روشهایی که برای سریهای مختلط نشان دادیم e^z همگراست، می‌توان نشان داد که $e^{\lambda x}$ نیز همگرا می‌باشد. در حالت کلی نظریه سریهای مختلط برای فضای باناخ را، که کاملاً مشابه فضای اعداد مختلط است، در مرجع [۷] می‌توان یافت. پس تابع $f: \mathbb{C} \to \mathcal{A}$، $f(\lambda) = e^{\lambda x}$ خوشتعریف است. حال نشان

می‌دهیم f تحلیلی است. فرض کنیم $x^* \in \mathcal{A}^*$، آنگاه

$$x^*(f(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^*(x^n)\lambda^n}{n!}$$

اما

$$|\frac{x^*(x^n)}{n!}|^{\frac{1}{n}} \leq (\frac{||x^*||}{n!})^{\frac{1}{n}}||x|| \to 0 \quad , \quad n \to \infty \quad \text{وقتی که}$$

پس $x^* o f$ همه جای صفحه تحلیلی است. پس f نیز روی $\mathbb{C}$ تحلیلی می‌باشد.

۱.۲.۵ **تعریف:** فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $a \in \mathcal{A}$ و $G \subset \mathbb{C}$ مجموعه باز و $f : G \to \mathbb{C}$ یک تابع تحلیلی باشد و $\sigma(a) \subset G$ و Γ «دستگاه منحنی‌های بطور مثبت جهت‌دار» بوده و مشمول $G \backslash \sigma(a)$ باشد به زبان غیردقیق Γ، $\sigma(a)$ را محصور کرده باشد. برای تعاریف دقیق به [۱۵، ص ۲۴۳] یا [۱۸، ص ۲۰۰] رجوع کنید.

حال $f(a)$ را بعنوان عضوی در $\mathcal{A}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(z-a)^{-1} dz$$

تعریف ۱.۲.۵ شاید فرمول‌بندی کردن دقیق بحث زیر باشد.

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $x \in \mathcal{A}$. اگر $f(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$ یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط باشد آنگاه بدون هیچ ابهامی نماد $f(x)$ را می‌توان بصورت $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ تعریف کرد.

سوال این است که برای دیگر توابع نیز تعریف $f(x)$ با این روش ابهامی ایجاد نمی‌کند. به چند مثال دیگر توجه می‌کنیم. فرض کنیم $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$ یک تابع تام در $\mathbb{C}$ باشد. آنگاه مشابه بحث مثال ۱.۲.۴ سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ همیشه همگراست. پس $f(x) \in \mathcal{A}$ را می‌توان به‌صورت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تعریف کرد. بعنوان مثالی دیگر، فرض کنیم $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda - a}$. آنگاه $f(x)$ بطور طبیعی بصورت $f(x) = (\lambda.1 - x)^{-1}$ تعریف می‌شود. اما باید توجه کرد که $\lambda.1 - x$ وارون‌پذیر باشد یا $\lambda \notin \sigma(x)$. حدس می‌زنیم که f حداقل باید در یک همسایگی از $\sigma(x)$ تعریف شده باشد. حال از

فرمول انتگرال کوشی به تعریف ۱.۲.۵ می‌رسیم.

$Hol(a)$ را همه توابعی که در یک همسایگی از $\sigma(x)$ تحلیلی باشند، تعریف می‌کنیم.

۱.۲.۶ قضیه حسابان تابعی ریس [۵، ص ۲۰۱]: فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $a \in \mathcal{A}$:

(الف) نگاشت $f(a) \longmapsto f$ از $Hol(a) \to \mathcal{A}$ خطی و ضربی است.

(ب) اگر شعاع همگرایی سری $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ بزرگتر از $\rho(a)$ باشد، آنگاه $f \in Hol(a)$ و $f(a) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k a^k$.

(ج) اگر $f(z) \equiv 1$ آنگاه $f(a) = 1$.

(د) اگر برای هر $z \in \mathbb{C}$، $f(z) = z$ آنگاه $f(a) = a$.

(ه) اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع تحلیلی روی G باشد و $\sigma(a) \subset G$ و $f_n(z) \to f(z)$ بطور یکنواخت روی زیر مجموعه‌های فشرده G، آنگاه $||f_n(a) - f(a)|| \to 0$ وقتی که $n \to \infty$.

مثال: با استفاده از قسمت (ه) قضیه فوق نتیجه می‌گیریم که تعریف e^x بصورت $\sum\limits_{1=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ با تعریف ۱.۲.۵ منطبق می‌شود.

۱.۲.۷ گزاره: فرض کنیم $a \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ (به تعریف ۱.۳.۸ رجوع کنید) و $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ یک تابع تام باشد، آنگاه $F(a) = Foa$.

اثبات: فرض کنیم $\{p_n\}$ دنباله‌ای از چند جمله‌ایها باشد که روی $\mathbb{C}$ بطور یکنواخت به F همگرا است بنابه قضیه ۱.۲.۶، اگر $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ آنگاه:

$$p(a) = a_n a^n + \cdots + a_1 a + a_0 1 = poa$$

بنا به قسمت ه قضیه ۱.۲.۶ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} p_n oa = \lim_{n\to\infty} p_n(a) = F(a)$$

اما برای هر $\varepsilon > 0$ یک N هست که برای هر $n \geq N$ و هر $z \in \mathbb{C}$، $|p_n(z) - F(z)| < \varepsilon$. پس

برای هر N و هر $n \geq N$ و هر $z \in \bar{\mathbb{D}}$

$$|p_n oa(z) - Foa(z)| = |p_n(a(z)) - F(a(z))| < \varepsilon$$

بنابراین $F(a) = \lim p_n oa = Foa$. $\square$

۱.۲.۸. قضیه (نگاشت طیفی) [۵]: اگر $a \in \mathcal{A}$ و $f \in Hol(a)$ آنگاه $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.

مثال: فرض کنیم $f(\lambda) = \lambda + ۱$ و $\sigma(a) = [۰, ۱]$ در نتیجه:

$$\sigma(f(a)) = \sigma(a + ۱) = \{t + ۱ : t \in [۰, ۱]\} = [۱, ۲]$$

در قضیه ۱.۲.۶، $f(a)$ را بعنوان مقداری از $\mathcal{A}$ تعریف کردیم. اما می‌توان از $f \in H(\Omega)$ تابع $\tilde{f}$ را روی $A_\Omega = \{x \in \mathcal{A} : \sigma(x) \subset \Omega\}$ تعریف کرد که مقادیرش در $\mathcal{A}$ باشند. توجه کنید $\tilde{f}(x)$ همانند ۱.۲.۵ تعریف می‌شود. همچنین A_Ω زیر مجموعه بازی در $\mathcal{A}$ است. برای دیدن این رهیافت می‌توانید به مرجع [۱۸، ص ۲۴۳] رجوع کنید.

۱.۲.۹ قضیه. [۱۸، ص ۲۵۵]: اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و Ω در $\mathbb{C}$ باز باشد و $f \in H(\Omega)$ و f در Ω یک به یک باشد آنگاه $\tilde{f} : A_\Omega \to A_{f(\Omega)}$ یک به یک و پوشاست.

۱.۲.۱۰ قضیه: اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد، $a \in \mathcal{A}$ و $f \in Hol(a)$ و g در یک همسایگی $f(\sigma(a))$ تحلیلی باشد، آنگاه $gof \in Hol(a)$ و $g(f(a)) = gof(a)$.

برای دیدن اثباتی از قضیه فوق به مرجع [۱۸، ص ۲۴۵] رجوع کنید.

۱.۳. چند قضیه از جبر و جبر خطی

۱.۳.۱ تعریف. فرض کنیم M یک زیرفضای یک فضای برداری $\mathcal{A}$ باشد. $dim(\frac{A}{M})$ را همبعد M می‌نامیم و با $codim(M)$ نشان می‌دهیم.

اثبات قضایای زیر از م. ح شیردره‌حقیقی می‌باشد [۲۰، ص ۲۴] که با اندکی تغییر در زیر آورده شده

است.

۱.۳.۲ قضیه: فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک فضای باناخ مختلط یا حقیقی و $\mathcal{B}$ زیرفضای چگال $\mathcal{A}$ باشد. اگر M زیرفضای بسته همبند متناهی $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه $dim(\frac{\mathcal{A}}{M}) = dim(\frac{\mathcal{B}}{M\cap\mathcal{B}})$.

اثبات: فرض کنیم $dim(\frac{\mathcal{A}}{M}) = n$ و $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ عناصر متمایز $\mathcal{B}$ باشند. پس $x_1 + M, x_2 + M, \cdots, x_{n+1} + M$، $n+1$ عنصر در $\frac{\mathcal{A}}{M}$ می‌باشند، پس وابسته خطی‌اند. در نتیجه اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$، که همگی صفر نیستند، وجود دارند به‌طوری که $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} \in M$. همچنین $x \in \mathcal{B}$. ما نشان دادیم که هر $n+1$ عنصر دلخواه $x_1 + (\mathcal{B}\cap M)$، $x_2 + (\mathcal{B}\cap M), \cdots, x_{n+1} + (\mathcal{B}\cap M)$ در $\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}\cap M}$ وابسته خطی‌اند پس $dim(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}\cap M}) \leq n$.

حال فرض کنیم $dim(\frac{\mathcal{B}}{M\cap\mathcal{B}}) = m \leq n$. اگر $\mathcal{B} \subseteq M$، چون $\mathcal{B}$ چگال و M بسته می‌باشد پس $M = \mathcal{A}$ که حکم بدیهی است. پس یک $x \in \mathcal{B}\backslash M$ وجود دارد. فرض کنیم $M_1 = M \oplus < x_1 >$. اگر $\mathcal{B} \subset M_1$ آنگاه چون M_1 بسته و $\mathcal{B}$ چگال می‌باشد پس $M_1 = \mathcal{A}$ و در نتیجه $dim(\frac{\mathcal{A}}{M}) = 1$ یعنی $m = 1$. در حالت $m = 0$، $\mathcal{B} = M \cap \mathcal{B}$ پس $\mathcal{B} \subset M$ بنابراین حکم بدیهی است. پس یک $x_2 \in \mathcal{B}\backslash M_1$ وجود دارد. فرض کنیم $M_2 = M \oplus < x_1 > \oplus < x_2 >$. اگر $\mathcal{B} \subset M_2$، آنگاه حون M_2 بسته است، $M_2 = \mathcal{A}$ پس $dim(\frac{\mathcal{A}}{M}) = 2$. بنا به انتخاب ما هیچ ترکیب خطی غیربدیهی از $x_1, x_2 \in \mathcal{B}$ در M نیست. پس $2 \leq dim(\frac{\mathcal{B}}{M\cap\mathcal{B}})$ بنابراین حکم ثابت می‌شود. با ادامه این فرایند نتیجه می‌گیریم $n \leq dim(\frac{\mathcal{B}}{M\cap\mathcal{B}})$.

۱.۳.۳ قضیه: فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک فضای باناخ مختلط یا حقیقی و $\mathcal{B}$ یک زیرفضای چگال $\mathcal{A}$ باشد. اگر M یک زیرفضای بسته همبعد متناهی $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه $\mathcal{B} \cap M$ در M چگال است.

اثبات: فرض کنیم $dim(\frac{\mathcal{A}}{M} = n$ پس بنا به قضیه قبل $dim(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}\cap M}) = n$. در نتیجه