بسم الله الرحمن الرحيم

IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

وزارت علوم تحقیقات و فن‌آوری

پایان‌نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته فیزیک اتمی- مولکولی

بازسازی عملگر چگالی به روش بیشینه درست‌نمایی تکراری در توموگرافی هموداین کوانتمی

استاد راهنما:

آقای دکتر محمدرضا بذرافکن

استاد مشاور:

خانم دکتر الهه نحوی‌فرد

دانشجو:

معصومه ذوالفقاری‌نژاد

۸۷۴۱۸۳۰۰۳

مهر ماه ۱۳۹۰

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)
معاونت آموزشی دانشگاه- مدیریت تحصیلات تکمیلی

تعهد نامه اصالت پایان نامه

اینجانب .... دانشجوی رشته .... مقطع تحصیلی .... بدین وسیله اصالت کلیه مطالب موجود در مباحث مطروحه در پایان نامه / تز تحصیلی خود، با عنوان .... را تأیید کرده، اعلام می نمایم که تمامی محتوی آن حاصل مطالعه ، پژوهش و تدوین خودم بوده و به هیچ وجه رونویسی از پایان نامه و یا هیچ اثر یا منبع دیگری، اعم از داخلی، خارجی و یا بین المللی ، نبوده و تعهد می نمایم در صورت اثبات عدم اصالت آن و یا احراز عدم صحت مفاد و یا لوازم این تعهد نامه در هر مرحله از مراحل منتهی به فارغ التحصیلی و یا پس از آن و یا تحصیل در مقاطع دیگر و یا اشتغال و ... دانشگاه حق دارد ضمن رد پایان نامه نسبت به لغو و ابطال مدرک تحصیلی مربوطه اقدام نماید. مضافاً اینکه کلیه مسئولیت ها و پیامدهای قانونی و یا خسارت وارده از هر حیث متوجه اینجانب می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو

امضاء و تاریخ

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی
IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

معاونت آموزشی –مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۳۰

فرم تأییدیه‌ی هیأت داوران جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه/رساله

بدین وسیله گواهی میشود جلسه دفاعیه از پایان نامه کارشناسی ارشد/ دکتری معصومه ذوالفقاری نژاد دانشجوی رشته فیزیک گرایش اتمی مولکولی تحت عنوان بازسازی عملگر چگالی به روش بیشینه درست‌نمایی تکراری در توموگرافی همودابن کوانتمی در تاریخ ۱۳۹۰/۷/۱۱ در دانشگاه برگزار گردید و این پایان نامه با نمره ...۱۹٫۵... و درجه ...عالی... مورد تایید هیئت داوران قرار گرفت.

ردیف	سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه‌ی دانشگاهی	دانشگاه یا مؤسسه	امضا
۱	استاد راهنما	دکتر محمدرضا بذرافکن	استادیار	بین‌المللی امام خمینی(ره)	
۲	استاد مشاور	دکتر الهه نحوی فرد	استادیار	بین المللی امام خمینی(ره)	
۳	داور خارج	دکتر سعید باطبی	استادیار	گیلان	
۴	داور داخل	دکتر بابک محمد حسینی	مربی	بین المللی امام حمینی(ره)	
۵	نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمد جباری	مربی	بین المللی امام خمینی(ره)	

تقدیم به آستان پاک جانان

که سرمنشأ هستی است و نامش هستی بخش

تقدیم به مادر

که فرشته ای بی همتاست

و پدر

که اسوهٔ ایستادگی و پایمردی است

چکیده

در بسیاری از کاربردها، نیاز به تعیین حالت کوانتمی سیستم وجود دارد. برای این منظور روش‌های توموگرافی کوانتمی توسعه یافته است. توموگرافی کوانتمی تکنیک توصیف حالت یک سیستم کوانتمی از اندازه‌گیری‌های مختلف انجام شده روی تعداد زیادی از حالت‌ها است که همگی در حالت یکسان قرار دارند، می‌باشد. گذشته از روش تجربی انجام مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌های توموگرافیک روی یک سیستم، QT به الگوریتم عددی برای استخراج اطلاعات کامل درباره حالت مورد بررسی در نتایج اندازه‌گیری نیاز دارد. در این پایان‌نامه ما الگوریتم بیشینه درست‌نمایی تکراری برای بازسازی ماتریس چگالی یک آنسامبل اپتیکی از مجموعه اندازه‌گیری‌های هموداین متعادل را پیشنهاد و امتحان می‌کنیم. این الگوریتم برای داده‌های حاصل از شبیه‌سازی کامپیوتری به‌کار می‌رود. مزایای استفاده از روش جدید در مقایسه با روش سنتی تکنیک تبدیل معکوس رادون به روشنی قابل مشاهده می‌باشد.

تقدیر و تشکر

پس از حمد و سپاس خداوند متعال که در همه حال رحمت خود را شامل حالم نموده است، بر خود لازم می‌دانم از زحمات و حمایت‌های بی‌دریغ **جناب آقای دکتر محمدرضا بذرافکن**، استاد گرانقدر دانشکده علوم پایه دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) قزوین، که طی مدت تحصیل و انجام این پایان‌نامه از نظرات و راهنمایی‌های ارزشمند ایشان بهره‌مند شده‌ام، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

همچنین از اعضای محترم هیات داوران **جناب آقای دکتر سعید باطبی، دکتر بابک محمد حسینی** که در جلسه دفاعیه با ارائه نظرات ارزشمند خود زمینه رفع نقایص پایان‌نامه و پربارتر شدن آن را فراهم نمودند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

مقدمه

برای توصیف حالت کوانتمی یک میدان الکترومغناطیسی از اپراتور چگالی استفاده می‌شود، اپراتور چگالی مجموعه‌ای از نمایش‌ها، به شکل توابع اسکالر تعریف شده بر " فضای فاز " دارد که بطور معکوس‌پذیر با آن مربوط هستند. هر یک از این نمایش‌ها که توابع شبه احتمال نامیده می‌شوند، در واقع چشمداشتی یک اپراتور هرمیتی خاص هستند که مختصات نقاط فضای فاز را به عنوان پارامتر درون خود دارد. توابع شبه احتمال گلاوبر- سودارشان و تابع ویگنر و نیز تابع هوسی می- کانو مثال‌هایی از این نوع توابع شبه احتمال هستند.

همانطور که در مکانیک کوانتمی می‌دانیم به خاطر محدودیت‌های اصل عدم قطعیت نمی‌توان روی یک سیستم مجرد آزمایشات پی‌درپی انجام داد و حالت کوانتمی سیستم را حدس زد. اما می‌توانیم حالت یک سیستم ناشناخته را با انجام آزمایش که روی کپی‌های مساوی آن انجام می‌گیرد حدس زد که این فرآیند توموگرافی کوانتوم نامیده می‌شود. در کوانتوم اپتیک این کار با استفاده از یک آشکارساز هموداین متعادل انجام می‌گیرد. با اندازه‌گیری همه‌ی ترکیبات خطی مکان و تکانه یک نوسانگر می‌توان یک مد سیگنال میدان الکترومغناطیسی را نمایش داد، تکنیک تخمین المان‌های اپراتور چگالی از اندازه‌گیری‌های همداین، توموگرافی هموداین نامیده می‌شود.

ویژگی اساسی اندازه‌گیری‌ها در مورد یک سیستم کوانتمی آماری بودن نتایج بدست آمده است. در هر حال با انجام تعداد محدودی آزمایش امکان اندازه‌گیری توابع توزیع احتمال وجود ندارد. آنچه بدست می‌آید مجموعه‌ای از هیستوگرام‌ها است که بطور تصادفی از یک آزمایش به آزمایش دیگر تغییر می‌کند. بنابراین حتی وقتی ابزارهای اندازه‌گیری و شرایط آزمایش به‌طور ایده‌آل کنترل شوند نوفه ناشی از تصادفی بودن آنچه اندازه می‌گیریم حضور

دارد. این نوفه بخصوص از این جهت مهم است که کرنل تبدیل انتگرالی وارون رادون تکین است و لذا حضور نوفه باعث ایجاد خطا در محاسبه تابع ویگنر می‌شود. یکی از روش‌های گریز از این خطای مرتبط با نوفه آماری استفاده از روش بیشینه درست‌نمایی است. در این روش فرض می‌شود تابع احتمال مادر که به دنبال آن هستیم عضوی از یک کلاس از توابع توزیع احتمال است که به‌وسیله یک یا چند پارامتر بر چسب زده می‌شوند. مثلاً تابع توزیع کوادراچرهای میدان به اپراتور $\hat{\rho}$ وابسته است، البته $\hat{\rho}$ نماینده تعداد بی‌شماری پارامتر است. اما در روش بیشینه درست‌نمایی اغلب با فرضیات مناسبی تعداد آنها را متناهی در نظر می‌گیریم. در یک آزمایش خاص یک هیستوگرام بدست می‌آید که تقریباً معرف تابع توزیع احتمال است. اساس روش بیشینه درست‌نمایی این است که فرض می‌کنیم برای داده‌های آزمایش مذکور احتمال رخ دادن بیشینه بوده است یعنی پارامترهای مجهول را طوری انتخاب کنیم که آنچه بدست آمده محتمل‌ترین نتیجه باشد. کاربرد این روش در آمار متداول است. به دو روش تابع درست‌نمایی را بیشینه می‌کنیم روش اول روش مشتق‌گیری و روش دوم که هدف اصلی این پایان‌نامه است روش تکرار است که سرعت اجرای آن به مراتب بالاتر از روش مشتق‌گیری است.

پایان‌نامه حاضر تلاشی برای آشنایی و بکارگیری روش بیشینه درست‌نمایی تکراری برای تقریب زدن ماتریس چگالی میدان تک مد و یا بطور معادل تابع ویگنر آن است. فصل نخست روش استاندارد محاسبه توابع توزیع احتمال در مکانیک کوانتمی را معرفی می‌کنیم به دنبال آن هستیم که بدانیم چگونه با داشتن توابع توزیع کلاسی از مشاهده‌پذیرها می‌توانیم عملگر چگالی آن را حدس بزنیم. فصل دوم به اختصار کلاس توابع توزیع شبه احتمال که با روابطی خطی و معکوس‌پذیر به اپراتور چگالی مربوط هستند را معرفی می‌کند تأکید اساسی این فصل بر تابع ویگنر است. فصل سوم به معرفی تبدیل رادون می‌پردازد و در ادامه اندازه‌گیری هموداین و توموگرام اپتیکی را بیان می‌کند. در فصل چهارم به معرفی روش بیشینه درست‌نمایی می‌پردازد. فصل پنجم به معرفی روش‌های بیشینه کردن تابع درست‌نمایی می‌پردازیم و تکنیک تکرار را که هدف اصلی این پایان‌نامه است را معرفی خواهیم کرد. در بخش نهایی این فصل روش بیشینه درست‌نمایی تکراری را برای سیستم اسپین $1/2$ به‌کار خواهیم برد و مزیت این روش را نسبت به روش بیشینه مشتق‌گیری بیان خواهیم کرد. در فصل آخر این پایان‌نامه اصول

بازسازی حالت کوانتمی را در مورد مسئله بازسازی حالت یک تک مد میدان الکترومغناطیسی بکار خواهیم برد. بازسازی می‌تواند مستقیما برای عناصر ماتریس چگالی حالت سیستم انجام شود، که برای نمایش قابل فهم‌تر تابع ویگنر عملگر چگالی بازسازی شده را نمایش می‌دهیم.

فصل۱-

روش استاندارد بازسازی حالت کوانتمی

۱-۱- روش استاندارد محاسبه توابع توزیع احتمال در مکانیک کوانتمی

فرض کنید یک سیستم کوانتمی S با فضای هیلبرت حالات قابل دسترسی H داریم. اگر حالت سیستم با بردار حالت بهنجار $|\psi\rangle$ تعیین شده باشد می‌توان توابع توزیع مشاهده‌پذیرهای مختلف سیستم را محاسبه نمود. همانطور که از مکانیک کوانتمی می‌دانیم داشتن $|\psi\rangle$ به تنهایی کافی نیست تا بتوان توابع توزیع مورد نظر را محاسبه کرد. فرض کنید بخواهیم تابع توزیع مشاهده‌پذیر Ω را که عملگر هرمیتی متناظر آن $\hat{\Omega}$ است پیدا کنیم. برای سادگی فرض کنید طیف این عملگر گسسته بوده و هیچ یک از ویژه‌مقادیر این عملگر تبهگن نیست و لذا می‌توان ویژه‌بردارهای آن را با ویژه‌مقادیر آن بر چسب زد.

$$\hat{\Omega}|\omega_i\rangle = \omega_i|\omega_i\rangle \quad , \quad i = 1,2,3,...$$

اگر تابع توزیع احتمال برای مقادیر مجاز مشاهده‌پذیر Ω را $w(\omega_i)$ بنامیم، آنگاه بنابر اصل موضوع مکانیک کوانتمی داریم:

$$w(\omega_i) = |\langle\omega_i|\psi\rangle|^2 \quad , \quad i = 1,2,3,...$$

چون احتمالات، با مربع قدر مطلق $\langle\omega_i|\psi\rangle$ مربوط است لذا دانستن تابع توزیع $w(\omega_i)$ حالت سیستم را بطور یگانه معلوم نمی‌کند، یعنی بی‌شمار حالت کوانتمی می‌توان یافت که همگی دارای تابع توزیع مشابهی برای مشاهده‌پذیر Ω باشند. نکته مهم این است که آنچه این حالت‌ها را از هم متمایز می‌کند تابع توزیع مشاهده‌پذیرهای ناسازگار دیگر است.

برای یک سیستم بسته کوانتمی، تحول زمانی برای حالت به صورت حتمی انجام می‌گیرد. یعنی اگر سیستم با حالت $|\psi(0)\rangle$ حرکت خود را شروع کرده باشد آنگاه بعد از گذشت زمان t به طور یگانه‌ای به حالت $|\psi(t)\rangle$ خواهد رسید. اما اغلب سیستم‌های کوانتومی بسته نیستند و با محیط اطراف خود برهم‌کنش ضعیفی می‌کنند. بنابراین اگر مجموعه‌ای از سیستم‌ها همگی از یک حالت اولیه کوانتمی شروع به تحول کنند (در یک رهیافت شبه کلاسیکی نه چندان دقیق!) بعد از مدتی ما یک آنسامبل آماری از حالات ممکن در اختیار داریم که در آن هر حالت $|\psi_k\rangle$ دارای فراوانی نسبی w_k است. اطلاعات این آنسامبل را نمی‌توان به وسیله یک بردار حالت نمایش داد و نیاز به ابزار تواناتری وجود دارد. عملگر چگالی یک ابزار ریاضی برای به رمز درآوردن حالت‌های کوانتمی یک آنسامبل از سیستم‌های کوانتمی است که در آن هر حالتی با فراوانی معینی تکرار شده است. فرض کنید آنسامبلی از حالت‌های کوانتمی $\{|\psi_k\rangle\}_{k=1}^{N}$ داریم که هر یک با فراوانی نسبی $0 \le w_k \le 1$ در آن تکرار شده‌اند. بنا به تعریف عملگر چگالی $\hat{\rho}$ برابر است با:

$$\hat{\rho} \equiv \sum_{k=1}^{N} w_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \qquad (۱.۱)$$

تعداد حالت‌های N می‌تواند کوچکتر، مساوی یا بزرگتر از بعد فضای حالت باشد. فرض می‌کنیم هر یک از $|\psi_k\rangle$ ها بهنجار باشد. آشکارا چون فراوانی‌های نسبی اعدادی حقیقی هستند، عملگرهای چگالی هرمیتی $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$ است. همچنین $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}) = 1$، که نتیجه بهنجار بودن فراوانی نسبی است. می‌توان در حالت کلی نشان داد:

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}^2\right) \le 1 \qquad (۲.۱)$$

اگر همه w_k ها جز یکی صفر باشند آنگاه حالت را حالت خالص گوییم. تنها برای حالت خالص نامساوی بالا به تساوی تبدیل می‌شود. اگر حالت سیستم کوانتومی به وسیله عملگر چگالی $\hat{\rho}$ معین شده باشد می‌توان تابع توزیع یک مشاهده‌پذیر دلخواه $\hat{\Omega}$ را محاسبه کرد. ابتدا اجازه دهید چشمداشتی $\left\langle\hat{\Omega}\right\rangle_{\hat{\rho}}$ را محاسبه کنیم. برای این کار چشمداشتی کوانتمی مشاهده‌پذیر مورد بحث را در هر یک از حالات آنسامبل محاسبه کرده و متوسط این کمیت‌ها را روی آنسامبل به دست می‌آوریم، لذا داریم:

$$\left\langle\hat{\Omega}\right\rangle_{\hat{\rho}} = \sum_k w_k \left\langle\psi_k\middle|\hat{\Omega}\middle|\psi_k\right\rangle = \mathrm{Tr}\sum_k w_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\hat{\Omega} = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\,\hat{\Omega}\right\}$$