بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشکده‌ی علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی

گرایش آنالیزعددی

عنوان

روش لتیس—نیستروم برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم

اساتید راهنما

دکتر داود رستمی

آقای محمد جباری

استاد مشاور

دکتر سعید عباسبندی

توسط

مهشید قدیریان

بهمن ۱۳۹۰

اگر شایسته‌ی تقدیم باشد،

تقدیم به آستان حقیقت ...

تقدیم به پدر و مادر فداکارم که بی منّت تمام وجودشان را به پای من ریختند...

تقدیم به همسر مهربانم که مسیح وار با صبرش در تمامی لحظات رفیق راه بود...

صمیمانه‌ترین سپاس‌هایم نثار بزرگوارانه‌ترین همراهی‌هاتان باد !

اکنون که با یاری خداوند متعال، کار نگارش این پایان‌نامه به پایان رسیده‌است، بدین وسیله از استاد بزرگوار و فرهیخته، جناب آقای دکتر داود رستمی که تجارب ارزشمندشان را در اختیارم نهادند و مرا در تکمیل این پایان نامه یاری کردند، صمیمانه سپاسگذاری می‌نمایم. همچنین، از جناب آقای دکتر محمد جباری و جناب آقای دکتر سعید عباسبندی که از راهنمایی‌هاشان بهره برده‌ام، تقدیر و تشکر می‌نمایم . آرزومند سلامتی، توفیق و پیشرفت روز افزون برایشان هستم.

مهشید قدیریان

چکیده

ما در این رساله به حل معادلات انتگرال و انتگرال–دیفرانسیل با هسته پیچشی در فضای وزن‌دار کروبوف می‌پردازیم. این فضاها با پارامتر همواری $\alpha > 1$ و وزن‌های $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \cdots$ مشخص می‌شوند. وزن γ_j رفتار تابع را نسبت به متغیر j ام نشان می‌دهد. ما جواب معادله‌های اخیر را به روش لتیس–نیستروم و با استفاده از نقاط لتیس رتبه یک تقریب می‌زنیم.
بدترین حالت خطا را در نرم سوپریمم بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که بردار مولد روش‌های لتیس می‌تواند به گونه‌ای ساخته شود که سرعت همگرایی مطلوب $\mathcal{O}(n^{-\alpha/2+\delta})$, $\delta > 0$ را نتیجه دهد که δ مستقل از n است.
همچنین مفهوم n کنترل شده را بررسی می‌کنیم، که در واقع به معنی کوچکترین مقدار n است که خطا به اندازه ϵ کاهش یابد. ثابت می‌کنیم که روش شبه مونت کارلو–نیستروم قویاً تحت کنترل به مفهوم مطلق است، اگر و فقط اگر $\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j < \infty$ و تحت کنترل به مفهوم مطلق است، اگر و فقط اگر $\limsup_{d\to\infty} \sum_{j=1}^{d} \gamma_j / \log(d+1) < \infty$.

فهرست مندرجات

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فهرست الگوریتم‌ها

پیشگفتار

امروزه حل بسیاری از مسائل ریاضیات مالی نیازمند محاسبه انتگرال‌های چندگانه است. در گذشته مطالعات بسیاری در خصوص انتگرال‌گیری در یک بعد انجام شده است و روش‌هایی از قبیل مستطیلی، سیمپسون و گاوسی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. انتگرال‌های چندگانه در عمل در حالت‌های متنوعی رخ می‌دهند. انتگرالده ممکن است تکین، ناپیوسته، هموار و یا ناهموار باشد و یا نوسان‌های تند داشته باشد. انتگرالده ممکن است از نظر ریاضی بسیار پیچیده و با بعد بسیار بالا باشد [۱].

فرض کنید می‌خواهیم مقدار تقریبی انتگرال زیر را بدست آوریم:

$$If = \int_{[0,1]^s} f(x)dx, \qquad (1.0)$$

روش‌های انتگرال‌گیری متعددی به فرم زیر

$$Qf = \sum_{j=0}^{N-1} w_j f(x_j), \qquad x_j \in [0,1]^s,\ j = 0, ..., N-1$$

وجود دارد. روش‌های حاصل‌ضربی یکی از این روش‌ها هستند که انتگرال s بعدی (۱.۰) را به عنوان s بار تکرار انتگرال‌های یک بعدی جداگانه در نظر می‌گیرند و روش یک بعدی

$$\int_0^1 g(t)dt \approx \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j g(t_j),$$

را برای هر انتگرال یک بعدی بکار می‌برند و به روش حاصل‌ضربی به فرم

$$Qf = \sum_{j_s=0}^{n-1} \cdots \sum_{j_1=0}^{n-1} \mu_{j_1} \cdots \mu_{j_s} f(t_{j_1}, \cdots, t_{j_s}),$$

می‌رسند. استفاده از روش‌های حاصل‌ضربی ساده است، زیرا مجموعه نقاط انتگرال‌گیری s بار ضرب مجموعه $\{t_0, \cdots t_{n-1}\}$ است و وزن‌ها ضرب متناظر وزن‌های حالت یک بعدی هستند. اما این روش‌ها بیشتر برای مسائل با بعد پایین توصیه می‌شود، زیرا برای مقدارهای بزرگ s ، پیچیدگی

محاسبات (تعداد عملیات) و تعداد نقاط انتگرال‌گیری به شدت افزایش می‌یابد. باافزایش s ، مرتبه محاسبات روش $\mathcal{O}(N = n^s)$ بطور قابل ملاحظه و هشداردهنده‌ای زیاد می‌شود واین سبب افزایش خطای گردکردن خواهد شد. مثلاً وقتی $n = ۱۰$، یک روش حاصل‌ضربی با بعد $s = ۵$، از مرتبه $\mathcal{O}(N = ۱۰^۵)$ است. هم چنین بیشتر روش های تقریب انتگرال (۱.۰) برای انتگرال‌گیری از کلاس خاصی از چند جمله‌ای‌ها یا توابع دقیق هستند. بطور مثال روش حاصل‌ضرب گاوسی برای چندجمله‌ای‌های از درجه $۲n - ۱$ دقیق است. پس ما به دنبال روش‌هایی مؤثرتر از روش حاصل‌ضربی گاوسی هستیم که هم برای چندجمله‌ای‌های بیشتر از $۲n - ۱$ دقیق باشند و هم تعداد نقاط انتگرال‌گیری و تعداد محاسبات کاهش یابد.

روش‌های مونت کارلو یکی از روش‌های انتگرال‌گیری و دارای مرتبه خطای $\mathcal{O}(N^{-\frac{۱}{۲}})$ می‌باشند که برای Nهای بزرگ بسیار مناسب است. روش‌های شبه‌مونت کارلو دسته‌ای دیگر از روش‌های انتگرال‌گیری هستند که در آنها نقاط x_j طوری انتخاب می‌شود که کران خطا تا حد ممکن کاهش یابد. اما با این وجود ما همچنان به دنبال کاهش حجم محاسبات هستیم [۱].

روش‌های انتگرال‌گیری لتیس، نمونه‌ای از روش‌های شبه‌مونت کارلو هستند که ضمن کاهش حجم محاسبات و مرتبه روش، خطا را نیز به میزان قابل ملاحظه‌ای کاهش می دهند (توضیحات بیشتر در فصل یک ارائه شده‌است). ویژگی جالب روش‌های لتیس در سادگی آنهاست و اینکه حتی در ابعاد بالاتر از هزار نیز عملی هستند. اما این روش‌ها مانند هر روش دیگری محدودیت‌هایی نیز دارند: انتگرالده باید به قدر کافی هموار باشد و نسبت به تمام s متغیر دارای دوره تناوب یک باشد و همچنین ناحیه انتگرال‌گیری فقط باید مکعب واحد s بعدی باشد. اگر چه مشاهده می‌شود که حتی اگر انتگرالده متناوب نباشد، می‌توان آن را به یک تابع متناوب تبدیل کرد.

درحقیقت روش‌های لتیس حالت عمومیت‌داده شده روش مستطیلی هستند. روش مستطیلی معمولا به عنوان بخش موفقی در آنالیز عددی یاد نمی‌شود اما در واقع اگر انتگرالده هموار و با دوره تناوب یک باشد آنگاه به عنوان یک روش بسیار مؤثر شناخته می‌شود [۱].

روش‌های لتیس در ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ با تلاش‌های نظریه‌پردازان برجسته در حوزه آنالیز عددی از

جمله $E. Hlawka$ ، $N. M. Korobov$ ، $S. K. Zaremba$ و $L. K. Hua$ وارد عرصه ریاضیات شدند. $Niederreiter$ در سال ۱۹۷۸ به خوبی آن را بیان کرد. در دهه اخیر مفهوم روش‌های لتیس دوباره جان تازه‌ای گرفته و مقالات متعددی در این رابطه نوشته شده‌است [۱].

این رساله شامل پنج فصل می باشد:

در فصل یک، روش‌های انتگرال‌گیری لتیس و فضای کروبوف وزن‌دار معرفی شده‌است.

در فصل دو، مباحثی از ریاضیات مالی و کاربرد لتیس‌ها در قیمت‌گذاری قراردادها را بررسی کرده‌ایم.

در فصل سه، مسأله را فرمول‌بندی کرده، روش انتگرال‌گیری لتیس—نیستروم را برای حل معادله انتگرال فردهلم نوع دوم با هسته پیچشی، در فضای وزن‌دار کروبوف، بکار برده و ضمن معرفی بدترین حالت خطا، کران‌های بالا و پایین آن را بدست آورده‌ایم.

در فصل‌های چهار و پنج، دو حالت مختلف از معادلات انتگرال‌ـدیفرانسیل با هسته پیچشی را بررسی کرده و کران‌های بالا و پایین بدترین حالت خطا را بدست آورده‌ایم که قبلاً به آن‌ها پرداخته نشده است.

از منابع مهمی که در این پایان‌نامه استفاده شده است می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

[1] X. I. H. Sloan, S. Joe, *Lattice method for multiple integration*, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[2] Y. J. Dick, P. Kritzer, F. Y. Kuo, I. H. Sloan, *Lattice-Nyström method for Fredholm integral equations of the second kind*, J. Complexity, **23** (2006) pp.752-772.

فصل ۱

مقدمه‌ای بر لتیس‌ها

۱.۱ انتگرال‌گیری چندگانه عددی

انتگرال زیر روی مکعب واحد s بعدی را در نظر می‌گیریم:

$$If = \int_{C^s} f(x)\,dx = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, x_2, \cdots, x_s)dx_1 dx_2 \cdots dx_s, \qquad (1.1)$$

که در آن $C^s = [0, 1]^s$.

می‌دانیم برای حل انتگرال یک بعدی $If = \int_0^1 f(x)dx$، روش‌های انتگرال‌گیری متعددی به فرم

$$Qf = \sum_{j=0}^{N-1} w_j f(x_j),$$

وجود دارند، که بر اساس نحوه‌ی انتخاب مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\{x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}\} \subseteq [0, 1]$ (نقاط انتگرال‌گیری) و $\{w_0, w_1, \cdots, w_{N-1}\}$ (وزن‌های انتگرال‌گیری) با هم متفاوتند. در حالت

کلی انتگرال s بعدی (۱.۱) می‌تواند با روش‌های انتگرال‌گیری متعددی به فرم

$$Qf = \sum_{j=0}^{N-1} w_j f(x_j), \tag{۲.۱}$$

تقریب زده شود که در آن $\{x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}\} \subseteq [0,1]^s$.

در ادامه روش‌های معمول محاسبه تقریبی (۱.۱) به فرم (۲.۱) را بررسی خواهیم کرد.

۱.۱.۱ روش مونت کارلو

یکی از روش‌های انتگرال‌گیری به فرم (۲.۱) روش مونت کارلو می باشد. در این روش نقاط انتگرال‌گیری $\{x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}\}$ بطور تصادفی از $[0,1]^s$ انتخاب می‌شوند و انتگرال (۱.۱) با رابطه‌ی

$$Q_N f = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} f(x_j), \tag{۳.۱}$$

تقریب زده می‌شود. در این روش خطای انتگرال‌گیری $|Q_N f - If|$ با رابطه $\frac{\sigma(f)}{\sqrt{N}}$ نمایش داده می‌شود که در آن

$$\sigma^2(f) = \int_{C^s} f^2(x)dx - (If)^2,$$

واریانس f است.

۲.۱.۱ روش‌های شبه مونت کارلو

ملاحظه کردیم که در روش مونت کارلو از اعداد تصادفی استفاده می‌شود. در عمل این اعداد در دسترس نیستند. روش‌های شبه مونت کارلو روش‌هایی هستند که در آن‌ها از اعدادی استفاده می‌شود که براساس یک الگوریتم خاص بدست می‌آیند. به عبارت دیگر، در روش‌های انتگرال‌گیری شبه مونت کارلو از رابطه (۳.۱) استفاده می‌شود که در آن نقاط انتگرال‌گیری بر اساس یک الگوریتم مشخص، طوری انتخاب می‌شوند که تقریب بهتری از انتگرال را نتیجه دهند. روش‌های شبه مونت

کارلو بر اساس نحوه‌ی انتخاب نقاط انتگرال‌گیری، به دو نوع « روش‌های مونت کارلو باز » و « روش‌های مونت کارلو بسته » تقسیم می‌شوند. در روش‌های مونت کارلو باز، نقاط انتگرال‌گیری یک دنباله نامتناهی و مستقل از N (تعداد نقاط انتگرال گیری) تشکیل می‌دهند. بنابراین با افزایش N، تنها کافیست مقدار تابع f در نقاط اضافه شده محاسبه شود. دنباله ی هالتون [1] نمونه ای از دنباله نقاط انتگرال‌گیری مستقل از N است که در زیر نحوه ساختار آن را ذکر می‌کنیم؛
ابتدا اعداد شمارشی $0, 1, 2, \cdots$ را در مبنای ۲ می‌نویسیم:

$$0, 1_2, 10_2, 11_2, 100_2, 101_2, 110_2, \cdots,$$

سپس در مبنای ۳،

$$0, 1_3, 2_3, 10_3, 11_3, 12_3, 20_3, \cdots,$$

سپس در مبنای ۵، و به همین ترتیب تا مبنای sامین عدد اول ادامه می‌دهیم (s، بعد مسأله مورد نظر می‌باشد). حال اعداد هر دنباله را، برعکس کرده و بصورت اعشاری می‌نویسیم. بطور مثال برای اعداد شمارشی در مبنای ۲، به دنباله زیر می‌رسیم:

$$0, 0.1_2, 0.01_2, 0.11_2, 0.001_2, 0.101_2, 0.011_2, \cdots,$$

و برای اعداد شمارشی در مبنای ۳، به دنباله

$$0, 0.1_3, 0.2_3, 0.01_3, 0.11_3, 0.21_3, 0.02_3, \cdots,$$

خواهیم رسید. اگر دنباله‌های حاصل، سطرهای ماتریس M باشند، آنگاه ستون iام ماتریس M، i امین عضو دنباله هالتون خواهدبود. به این ترتیب دنباله هالتون، بصورت زیر بیان می‌شود:

$$x_0 = (0, 0, \cdots, 0),$$

[1] Halton

$$x_1 = (0.1_2, 0.1_3, \cdots, 0.1_{p(s)}),$$
$$x_2 = (0.01_2, 0.2_3, 0.2_5, \cdots, 0.2_{p(s)}),$$
$$x_3 = (0.11_2, 0.01_3, 0.3_5, \cdots, 0.3_{p(s)}),$$

که در آن $p(s)$، s امین عدد اول است.

در روش مونت کارلو بسته، نقاط انتگرال گیری وابسته به N است. روش‌های انتگرال‌گیری لتیس مثال برجسته‌ای از روش‌های مونت کارلو بسته است. آزادی انتخاب دوباره نقاط انتگرال‌گیری برای هر مقدار جدیدN ، موجب می‌شود که روش‌های لتیس نسبت به هر روش شبه مونت کارلو باز، نتیجه بهتری را در مورد سرعت همگرایی بدهد؛ البته اگر f بقدر کافی خوش رفتار باشد.

۲.۱ روش‌های لتیس

۱.۲.۱ مختصری درباره لتیس‌ها

روش‌های لتیس، روش‌های انتگرال‌گیری هستند که برای تقریب انتگرال (۱.۱) روی مکعب واحد s بعدی طراحی شده‌اند؛ البته در صورتیکه تابع f هموار و نیز نسبت به هر مؤلفه‌ی x دارای دوره تناوب یک باشد، به این معنی که

$$f(x) = f(x+z), \qquad \forall z \in \mathbb{Z}^s, \forall x \in \mathbb{R}^s. \tag{۴.۱}$$

در واقع می‌توان با عمومیت بخشیدن روش یک بعدی مستطیلی، به روش‌های لتیس رسید؛ همانطور که می‌دانیم روش مستطیلی فرم زیر را دارد:

$$R_n f = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(j/n),$$

یکی از آشکارترین روش‌هایی که با عمومیت بخشیدن روش مستطیلی به بعد بالاتر حاصل می‌شود، روش ضرب مستطیلی است که به فرم

$$R_{n^s}f = \frac{۱}{n^s}\sum_{j_s=۰}^{n-۱}\cdots\sum_{j_۱=۰}^{n-۱} f(\frac{j_۱}{n}, \frac{j_۲}{n}, ..., \frac{j_s}{n}),$$

می‌باشد و $N = n^s$ نقطه انتگرال‌گیری دارد. اما از نظر ما یکی از روش‌های جالب که از طریق عمومیت بخشیدن به روش مستطیلی حاصل میشود، روش نقاط خوب لتیس است (به بخش ۴.۱ مراجعه شود)، که انتگرال (۱.۱) را با رابطه

$$Qf = \frac{۱}{N}\sum_{j=۰}^{N-۱} f(\frac{j}{N}z),$$

تقریب می‌زند و در آن N تعداد نقاط انتگرال‌گیری و z یک بردار صحیح است $(z \in \mathbb{Z}^s)$. روش ضرب مستطیلی و روش نقاط خوب لتیس از برخی جهات مشابهند: هر دو روش‌هایی با وزن‌های مساوی هستند و هر دو در حالت یک بعدی به روش مستطیلی تبدیل می‌شوند. به بیان ساده می‌توان گفت هر روش لتیس می‌تواند بصورت مجموع چندگانه زیر نوشته شود:

$$Qf = \frac{۱}{n_۱ n_۲ ... n_t}\sum_{j_t=۰}^{n_t-۱} ... \sum_{j_۱=۰}^{n_۱-۱} f(\frac{j_۱}{n_۱}z_۱ + ... + \frac{j_t}{n_t}z_t),$$

و بر عکس هر عبارتی که به این فرم باشد یک روش لتیس است ($z_۱, z_۲, ..., z_t$ بردارهای عددی هستند).

۲.۲.۱ روش مستطیلی

از آنجا که روش مستطیلی یک بعدی، نمونه ساده‌ای از روش‌های لتیس است، مطالعه روش‌های لتیس را با توضیح مختصری در مورد ویژگی‌های روش مستطیلی آغاز می‌کنیم.

چون R_nf یک مجموع ریمان است، روش مستطیلی برای توابع ریمان انتگرال‌پذیر وقتی $n \longrightarrow \infty$ به مقدار واقعی انتگرال If همگراست؛ اما از طرف دیگر وقتی f متناوب نباشد، R_nf یک تقریب نسبتاً

ضعیف برای If خواهد بود. برای مثال تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = x, \qquad \circ \leqslant x \leqslant ۱,$$

برای این تابع $If = ۱/۲$ و $R_nf = ۱/۲ - ۱/۲n$ بنابراین $|R_nf - If| = ۱/۲n$

پس اگر $n = ۱٦$ خواهیم داشت: $|R_nf - If| = ۱/۳۲ = \circ.\circ۳۱۲\cdots$

حال به تابع زیر توجه کنید:

$$f(x) = e^{\sin ۲\pi x},$$

روش مستطیلی را برای آن بکار می‌بریم. نتایج در جدول (۱.۱) آمده‌است.

مشاهده می‌شود وقتی $n = ۱٦$، خطا به مقدار قابل توجهی به صفر نزدیک شده‌است، اما در مثال قبل وقتی $n = ۱٦$، مقدار خطا $\circ.\circ۳۱۲\cdots$ است. بنابراین می‌بینیم که روش مستطیلی برای یک تابع متناوب تقریب بهتری را نتیجه داده است.

جدول ۱.۱ : خطای روش مستطیلی برای تابع $e^{\sin ۲\pi x}$

n	R_nf	$R_nf - If$
۲	۱.∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘	∘.۲٦٦∘٦۵۸۷۷۷۵۲∘∘۸
۴	۱.۲۷۱۵۴∘۳۱۷۴∘۷٦۲۲	∘.∘∘۵۴۷۴۴۳۹٦۵۵٦۱۴
۸	۱.۲٦٦∘٦٦∘۷٦۹٦۴۴۸۹	∘.∘∘∘∘∘∘∘۱۹۹۲۱۲۴۸۱
۱٦	۱.۲٦٦∘٦۵۸۷۷۷۵۲∘∘۹	∘.∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘۱
∞	۱.۲٦٦∘٦۵۸۷۷۷۵۲∘∘۸	

اما چرا روش مستطیلی برای یک تابع هموارمتناوب بهتر عمل می‌کند؟

فرض کنیم انتگرالده f در (۱.۱)، وقتی بطور تناوبی به کل محور تعمیم داده‌شود، دارای سری فوریه مطلقاً همگرا باشد، به این معنی که

$$f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \hat{f}(h) e^{۲\pi i h x}, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{۵.۱}$$