به نام خدا

دانشگاه خوارزمی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

عنوان

آخرین مدول‌های کوهمولوژی موضعی و حلقه‌های کاتنری

تدوین

حسن حاجی‌نژاد

استاد راهنما

دکتر حسین ذاکری

اسفند ۱۳۹۱

تقدیم به بهترین های زندگی که بودنشان، امروز مرا رقم زده است؛

پدرم، چشمه ی معرفت؛

مادرم، دریای مهربانی؛

خواهرم فاطمه، دوست آسمانی؛

حمد و سپاس خداوند مهربان را که به من پدری دلسوز و مادری مهربان بخشید...

بر خود لازم می‌دانم که در این مجال، از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر حسین ذاکری که در تمام مراحل تدوین، دلسوزانه راهنمایم بودند، تشکر و قدردانی نمایم.

همچنین از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر کامران دیوانی آذر و سرکار خانم دکتر مریم جهانگیری که زحمت مطالعه ی این پایان نامه را به عهده گرفته و ریز بینانه کاستی‌های نوشته‌ام را پوشش دادند سپاس گزارم.

فرصتی است که کمال قدردانی از استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمد تقی دیبایی که در طول این دو سال علم آموز محضر ایشان بوده ام را داشته باشم.

در پایان تشکر می کنم از دوستانی که در این دو سال در سایه ی مهربانی بی اندازه شان بوده ام، به ویژه آقایان صادق حسن زاده دلویی، حمیدرضا عاشوری، شهرام سلامپور، بهروز ورمزیار و خانم ها مریم قربانی دهاقانی، پریسا زارعی زیاری، الهام صراف و فرحناز صادقی.

حسن حاجی نژاد

اسفند ۱۳۹۱

چکیده

فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و نوتری و I ایده‌آلی از R باشد. همچنین فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی از بعد d باشد. d-اُمین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به I را با علامت $H_I^d(M)$ نمایش می‌دهیم و به آن آخرین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به I گوییم. با به‌کار بردن دوگان ماتلیس، این مطلب ثابت شده است که اگر R کامل و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از R باشد که $\operatorname{Ann}_R(H_I^d(M)) \subseteq \mathfrak{p}$، آن‌گاه خاصیت

$$\operatorname{Ann}_R(0 :_{H_I^d(M)} \mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \qquad (*)$$

برقرار است. به هر حال این خاصیت در حالت کلی برقرار نیست. در این پایان‌نامه، علاوه بر مطالب دیگر، ضمن مطالعه‌ی خاصیت $(*)$ به بررسی کاتنری بودن حلقه‌ی $R/\operatorname{Ann}_R(H_I^d(M))$ و چندگانگی $H_I^d(M)$ می‌پردازیم و مجموعه‌های $\operatorname{Att}_R(H_I^d(M))$ و $\operatorname{Cos}_R\left(H_I^d(M)\right)$ را مشخص می‌کنیم. همچنین نشان خواهیم داد که اگر خاصیت $(*)$ در مورد $H_I^d(M)$ برقرار باشد، آن‌گاه زیرمدولی ناصفر مانند N از M موجود است به‌طوری‌که

$$H_I^d(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^d(M/N).$$

واژه‌های کلیدی: آخرین مدول کوهمولوژی موضعی، ایده‌آل اول چسبیده، هم-محمل، چندگانگی

رده بندی موضوعی (۲۰۱۰): 13D45 ، 13E15 ، 13E10 .

مقدمه

در سرتاسر این پایان‌نامه، R یک حلقه‌ی جابه‌جایی است. در فصل سوم و چهارم، $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه نوتری و موضعی، I ایده‌آلی از R و M یک $R-$مدول با تولید متناهی از بعد d است. همچنین $\mathrm{Var}(I)$ نشان‌دهنده مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول R است که شامل I هستند. $\mathfrak{m}-$ادیک تکمیل شده‌ی R و M را به ترتیب با $\widehat{R}$ و $\widehat{M}$ نشان می‌دهیم.

واضح است که برای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Var}\Big(\mathrm{Ann}_R(M)\Big)$، $\mathrm{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M) = \mathfrak{p}$. با توجه به دوگان ماتلیس اگر R کامل باشد، آن‌گاه برای هر $R-$مدول آرتینی A و هر $\mathfrak{p}$ متعلق به $\mathrm{Var}\Big(\mathrm{Ann}_R(A)\Big)$،

$$\mathrm{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}. \qquad (*)$$

زوچینگر [1] در سال ۲۰۱۰ ([28]) نشان داد که هر $R-$مدول آرتینی در خاصیت $(*)$ صدق می‌کند اگروتنهااگر نگاشت طبیعی $R \longrightarrow \widehat{R}$ در قضیه بالارو صدق کند. اما باید توجه داشت که در حالت کلی خاصیت $(*)$ برقرار نیست، سند این موضوع مثالی است که **کنگ** [2] و **نیهان** [3] در سال ۲۰۰۲ ([9]) بیان کرده‌اند.

برای هر $i \geq 0$، $i-$اُمین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به $\mathfrak{m}$ (یعنی مدول $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$)، آرتینی است. **کنگ، دونگ** [4] و **نیهان** در سال ۲۰۰۷ ([8]) ثابت کردند که آخرین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به $\mathfrak{m}$ در خاصیت $(*)$ صدق می‌کند اگروتنهااگر $R/\mathrm{Ann}_R(H^d_{\mathfrak{m}}(M))$ یک حلقه کاتنری باشد.

[1] H. Zöchinger

[2] N. T. Cuong

[3] L. T. Nhan

[4] N. T. Dung

در سال ۲۰۰۹ **نیهان** و **آن** [۵] [2] نشان دادند که برای هر R–مدول با تولید متناهی M و هر $i \geq 0$، i–اُمین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به $\mathfrak{m}$ در خاصیت $(*)$ صدق می‌کند اگروتنهااگر R یک حلقه کاتنری جهانی باشد و تمام فیبرهای صوری آن کوهن-مکالی باشند. این مطلب را **نیهان** و **چائو** [۶] در [7] به صورت جداگانه مورد بررسی قرار دادند.

آخرین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به I، آرتینی است. این مدول ممکن است حتی زمانی‌که R خارج قسمتی از یک حلقه موضعی منظم باشد، در تساوی $(*)$ صدق نکند. در این مورد مثالی (مثال ۱۲.۳.۴) در فصل چهارم بیان می‌کنیم.

در این پایان‌نامه خاصیت $(*)$ را به منظور مطالعه کاتنری بودن حلقه $R/\mathrm{Ann}_R(H_I^d(M))$ و مشخص کردن مجموعه ایده‌آل‌های اول چسبیده‌ی $H_I^d(M)$، هم-محمل $H_I^d(M)$ و چندگانگی آن بررسی می‌کنیم.

در سال ۱۹۷۳ **مک دونالد** [۷]، مجموعه ایده‌آل‌های اول چسبیده‌ی یک مدول آرتینی مانند A را معرفی کرد و آن را با علامت $\mathrm{Att}_R(A)$ نشان داد. فصل دوم را به بیان پاره‌ای از مقدمات مورد نیاز در مورد مجموعه ایده‌آل‌های اول چسبیده‌ی یک مدول اختصاص داده‌ایم.

فرض کنید $\bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_R(M)} N(\mathfrak{p}) = 0$ یک تجزیه اولیه کاهش‌یافته برای زیرمدول صفر از M باشد. قرار می‌دهیم

$$\mathrm{Ass}_R(I,M) := \left\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M) \mid \dim(R/\mathfrak{p}) = d \ , \ \sqrt{I+\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}\right\}$$

و

$$N := \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_R(I,M)} N(\mathfrak{p}).$$

توجه کنید N مستقل از انتخاب تجزیه اولیه کاهش‌یافته است، زیرا $\mathrm{Ass}_R(I,M) \subseteq \min \mathrm{Ass}_R(M)$.

[۵] T. N. An

[۶] T. D. M. Chau

[۷] I. G. Macdonald

هم-محمل $H_I^d(M)$ را با نماد $\mathrm{Cos}_R\left(H_I^d(M)\right)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{Cos}_R\left(H_I^d(M)\right)=\left\{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)\mid H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{d-\dim(R/\mathfrak{p})}(M/N)_{\mathfrak{p}}\neq \circ\right\}$$

در فصل سوم برهان دو قضیه‌ی زیر آورده شده است.

قضیه. فرض کنید A شبه نامخلوط باشد. اگر A دارای خاصیت $(*)$ باشد، آن‌گاه حلقه $R/\mathrm{Ann}_R(A)$ کاتنری است و $\dim(R/\mathrm{Ann}_R(A))=\dim(\widehat{R}/\mathrm{Ann}_{\widehat{R}}(A))$.

قضیه. فرض کنید $U_M(\circ)$ بزرگترین زیرمدول از بعد کمتر از d، M باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.

(۱) $\mathrm{Supp}_R\left(M/U_M(\circ)\right)$ کاتنری است.

(۲) $H_{\mathfrak{m}}^d(M)$ در خاصیت $(*)$ صدق می‌کند.

در فصل چهارم دو قضیه‌ی اصلی این پایان‌نامه را بیان و اثبات می‌کنیم. در زیر این دو قضیه را در قالب یک قضیه آورده‌ایم.

قضیه. گزاره‌های زیر معادل هستند.

(۱) $H_I^d(M)$ خاصیت $(*)$ دارد.

(۲) حلقه $R/\mathrm{Ann}_R(H_I^d(M))$ کاتنری است و برای هر $\mathfrak{p}\in\mathrm{Att}_R\left(H_I^d(M)\right)$، $\sqrt{\mathfrak{p}+I}=\mathfrak{m}$.

(۳) حلقه $R/\mathrm{Ann}_R(H_I^d(M))$ کاتنری است و $H_I^d(M)\cong H_{\mathfrak{m}}^d(M/N)$.

(۴) $\mathrm{Cos}_R\left(H_I^d(M)\right)=\mathrm{Var}\left(\mathrm{Ann}_R\left(H_I^d(M)\right)\right)$.

این قضیه نشان می‌دهد که اگر آخرین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به I در تساوی $(*)$ صدق کند، آن‌گاه ایده‌آل‌های اول چسبیده، هم-محمل و چندگانگی آن مانند حالتی که حلقه کامل است، به‌خوبی مشخص می‌شود.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌های زیر تدوین شده است.

مقاله اصلی:

L. T. Nhan and T. D. M. Chau, *On the top local cohomology modules*, Journal of Algebra. 349 (2012) 342-352.

مقاله‌های فرعی:

L. T. Nhan and T. N. An, *On the catenaricity of Noetherian local rings and quasi unmixed Artinian modules*, Comm. Algebra 38 (2010) 3728–3736.

N. T. Cuong, N. T. Dung and L. T. Nhan, *Top local cohomology and the catenaricity of the unmixed support of a finitely generated module*, Comm. Algebra 35 (2007) 1691–1701.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات

در سرتاسر این پایان‌نامه، R یک حلقه جابه‌جایی است.

۱.۱ مقدمه‌ای از جبر جابه‌جایی

تعریف ۱.۱.۱. [25, 3.48,52.3] فرض کنید I یک ایده‌آل سره از حلقه‌ی R باشد. دراین‌صورت واریته‌ی I را با نماد $V(I)$ یا $\mathrm{Var}(I)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$\mathrm{Var}(I) := \Big\{\mathfrak{p} \mid \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\ ,\ \mathfrak{p} \supseteq I\Big\}.$$

عضوهای مینیمال $\mathrm{Var}(I)$ با رابطه‌ی شمول را ایده‌آل‌های اول مینیمال I می‌نامند و مجموعه ایده‌آل‌های اول مینیمال I را با $\min(I)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۱. [25, 2.5] فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. دراین‌صورت رادیکال I را با نماد $\sqrt{I}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$\sqrt{I} := \Big\{r \in R \mid \ r^n \in I \text{ عددی چون } n \in \mathbb{N} \text{ وجود داشته باشد به‌طوری‌که }\Big\}.$$

$\sqrt{\circ_R}$ را که از عضوهای پوچ توان R تشکیل شده است، رادیکال پوچ R می‌نامند.

لم ۳.۱.۱. [25, 3.48] فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. دراین‌صورت $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Var(I)} \mathfrak{p}$.

تعریف ۴.۱.۱. [25, 3.16] رادیکال جیکبسن R را اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال R تعریف می‌کنند و آن را با نماد$J(R)$ یا $\mathrm{Jac}(R)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۵.۱.۱. [25, 2.31] فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R باشند. خارج قسمت $(I :_R J)$ به صورت

$$(I :_R J) = \Big\{ a \in R \ \mid \ aJ \subseteq I \Big\}$$

تعریف می‌شود. واضح است که $I \subseteq (I :_R J)$. در حالت خاص، اگر $I = ۰$، $(۰ :_R J)$ را پوچساز J می‌نامند و آن را با نماد $\mathrm{Ann}_R J$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۶.۱.۱. [25, 6.16] فرض کنید M یک مدول روی حلقه‌ی R باشد. فرض کنید G زیرمدولی از M باشد و $J \subseteq M$ و $J \neq \varnothing$. دراین‌صورت ایده‌آل

$$\Big\{ r \in R \ \mid \ rj \in G \ , \ j \in J \text{ برای هر} \Big\}$$

از R را با نماد $(G :_R J)$ نمایش می‌دهند. در حالت خاص، اگر $G = ۰$، ایده‌آل $(۰ :_R J)$ را پوچساز J می‌نامند و آن را با نماد $\mathrm{Ann}_R J$ نمایش می‌دهند.

قضیه ۷.۱.۱. [25, 8.25] (اشتراک کرول) فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از حلقه‌ی جابه‌جایی و نوتری R باشد به‌طوری‌که $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Jac}(R)$. دراین‌صورت $\bigcap_{n=۱}^{\infty} \mathfrak{a}^n = ۰$.

قضیه ۸.۱.۱. فرض کنید A یک $R-$مدول و I ایده‌آلی سره از R باشد. همچنین برای هر $\mathfrak{p} \supseteq \mathrm{Ann}_R(A)$، $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(۰ :_A \mathfrak{p})$ که در آن $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. دراین‌صورت

$$\sqrt{\mathrm{Ann}_R(۰ :_A I)} = \sqrt{I + \mathrm{Ann}_R(A)}.$$

برهان. چون $I \subseteq \mathrm{Ann}_R(۰ :_A I)$ و $\mathrm{Ann}_R(A) \subseteq \mathrm{Ann}_R(۰ :_A I)$، پس

$$I + \mathrm{Ann}_R(A) \subseteq \mathrm{Ann}_R(۰ :_A I). \qquad (۱.۱)$$

فرض کنیم $I+\mathrm{Ann}_R(A)\subseteq \mathfrak{p}$، دراین‌صورت $\circ :_A I \subseteq \circ :_A \mathfrak{p}$ و لذا $\mathrm{Ann}_R(\circ :_A I)\subseteq \mathrm{Ann}_R(\circ :_A \mathfrak{p})$. با توجه به فرض $\mathrm{Ann}_R(\circ :_A I)\subseteq \mathfrak{p}$. بنابراین $\sqrt{\mathrm{Ann}_R(\circ :_A I)}\subseteq \sqrt{I+\mathrm{Ann}_R(A)}$. در نتیجه با توجه به رابطه‌ی ۱.۱، تساوی $\sqrt{\mathrm{Ann}_R(\circ :_A I)}=\sqrt{I+\mathrm{Ann}_R(A)}$ برقرار است.

□

تعریف ۹.۱.۱. [19, P: 6] فرض کنید M یک مدول روی حلقه‌ی R باشد. دراین‌صورت M را R-مدول باوفا می‌نامند اگر $\mathrm{Ann}_R\, M=\circ$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید M یک مدول روی حلقه‌ی R باشد. دراین‌صورت M را R-مدول **یکدست** [1] می‌نامند اگر برای هر $R-$همریختی یک‌به‌یک $f: N\longrightarrow L$، یک‌به‌یک بودن $R-$همریختی

$$f\otimes Id_M : N\otimes_R M\longrightarrow L\otimes_R M$$

نتیجه شود. $R-$مدول یکدست M را یکدست باوفا [2] می‌نامند اگر برای هر $R-$همریختی $f: N\longrightarrow L$، از یک‌به‌یک بودن همریختی $f\otimes Id_M : N\otimes_R M\longrightarrow L\otimes_R M$، یک‌به‌یک بودن f نتیجه شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید $f: R\longrightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ای و S یک $R-$مدول یکدست (یکدست باوفا) باشد. دراین‌صورت f را یک همریختی یکدست (یکدست باوفا) می‌نامیم.

ملاحظه ۱۲.۱.۱. [25, 6.19] (تغییر حلقه) فرض کنید M یک مدول روی حلقه‌ی R باشد. فرض کنید I ایده‌آلی از R باشد به‌طوری‌که $I\subseteq \mathrm{Ann}_R(M)$. دراین‌صورت M با عمل ضرب اسکالر زیر به R/I-مدول تبدیل می‌شود. برای هر $r\in R$ و $m\in M$، $(r+I).m=rm$.

قضیه ۱۳.۱.۱. [24, 4.51] (لم ناکایاما) فرض کنید M یک مدول با تولید متناهی روی حلقه‌ی R و I ایده‌آلی از R باشد به‌طوری‌که $I\subseteq \mathrm{Jac}(R)$. دراین‌صورت اگر $M=IM$، آن‌گاه $M=\circ$.

---

[1] Flat

[2] Faithfully flat

تعریف ۱.۱.۱۴. [25, 8.26] حلقه‌ی نوتری R را موضعی می‌نامند هرگاه تنها یک ایده‌آل ماکسیمال مانند $\mathfrak{m}$ داشته باشد. دراین‌صورت، $k = R/\mathfrak{m}$ میدان مانده‌ای R نامیده می‌شود. حلقه‌ی موضعی R را به صورت $(R, \mathfrak{m}, k)$ نمایش می‌دهند.

ملاحظه ۱.۱.۱۵. [25, 6.6] فرض کنید $f : R \longrightarrow S$ همریختی حلقه‌ای و M یک S-مدول باشد. دراین‌صورت M با ضرب اسکالر زیر یک R-مدول است. برای هر $r \in R$ و $m \in M$،

$$r.m = f(r)m.$$

قضیه ۱.۱.۱۶. [25, 3.61] (قضیه اجتناب از ایده‌آل‌های اول) فرض کنید $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ ($n \geq 2$) ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی جابه‌جایی R باشند که حداکثر دوتا از آن‌ها اول نیستند و فرض کنید S زیرگروهی از گروه جمعی R باشد که نسبت به ضرب بسته است. (برای مثال S می‌تواند ایده‌آل R یا زیرحلقه R باشد.) فرض کنید $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$، دراین‌صورت به‌ازای jی که $1 \leq j \leq n$، $S \subseteq \mathfrak{p}_j$.

تعریف ۱.۱.۱۷. [19, P: 38] فرض کنید M یک مدول روی حلقه‌ی جابه‌جایی R باشد. عنصر $r \in R$ را یک مقسوم‌علیه صفر برای M می‌نامند اگر عضوی ناصفر مانند m از M موجود باشد به‌طوری‌که $rm = 0$. عضوی از R را که مقسوم‌علیه صفر برای M نباشد، غیرمقسوم‌علیه صفر M می‌نامند. مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر R-مدول M را با نماد $\mathrm{Zdv}_R(M)$ نمایش می‌دهند.

توجه کنید که اگر $r \in R$ یک عضو غیرمقسوم‌علیه صفر برای M باشد، آن‌گاه r یک عضو M-منظم از حلقه‌ی R نیز نامیده می‌شود.

۱.۲ مقدمه‌ای از جبر همولوژی

تعریف ۱.۲.۱. [15, 2.1.1] دنباله‌ای از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها مانند

$$X = \cdots \xrightarrow{\delta^X_{n+1}} X_n \xrightarrow{\delta^X_n} X_{n-1} \xrightarrow{\delta^X_{n-1}} X_{n-2} \xrightarrow{\delta^X_{n-2}} \cdots$$

را یک همبافت می‌نامند درصورتی‌که برای هر عدد صحیح n، $\delta^X_{n-1}\delta^X_n = 0$. برای هر عدد صحیح n، X_n را مدول از درجه‌ی n می‌نامند و $\delta^X_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$، n-اُمین تابع تفاضلی نام دارد.

همبافت X را کراندار می‌نامند اگر برای هر $|n|$ به‌قدرکافی بزرگ، $X_n = \circ$. همچنین اگر X_iها همگی R-مدول‌های با تولید متناهی باشند، همبافت X متناهی نامیده می‌شود.

n-اُمین مدول همولوژی همبافت X را با نماد $H_n(X)$ نمایش می‌دهند که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H_n(X) := \operatorname{Ker} \delta_n^X / \operatorname{Im} \delta_{n+۱}^X.$$

لم ۲.۲.۱. [24, 6.8] فرض کنید T یک تابعگون همورد، دقیق و جمعی از رسته‌ی R-مدول‌ها به خودش باشد. دراین‌صورت برای هر عدد صحیح n و هر همبافت $X_\bullet$ از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها، یکریختی زیر برقرار است

$$H_n(TX_\bullet) \cong T(H_n(X_\bullet)).$$

تعریف ۳.۲.۱. [24, P: 326] فرض کنید A یک $R-$مدول باشد. یک تحلیل انژکتیو از A، دنباله دقیق

$$E = \circ \longrightarrow A \xrightarrow{\eta} E^\circ \xrightarrow{d^\circ} E^۱ \xrightarrow{d^۱} E^۲ \longrightarrow \cdots$$

است که در آن برای هر $i \geq \circ$، E^i یک $R-$مدول انژکتیو است.

اگر E یک تحلیل انژکتیو از A باشد، آن‌گاه همبافت

$$E^A = \circ \longrightarrow E^\circ \xrightarrow{d^\circ} E^۱ \xrightarrow{d^۱} E^۲ \longrightarrow \cdots$$

یک تحلیل انژکتیو محذوف از A است.

تعریف ۴.۲.۱. [19, P: 280] فرض کنید که M یک مدول روی حلقه‌ی R باشد. دراین‌صورت، بعد انژکتیو M را با نماد $\operatorname{id}_R(M)$ نمایش داده و برابر با کوچکترین nی که به‌ازای آن یک تحلیل انژکتیو به صورت

$$\circ \longrightarrow I_\circ \longrightarrow I_۱ \longrightarrow I_۲ \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_n \longrightarrow \circ$$

برای M موجود است، تعریف می‌کنند. اگر چنین تحلیل انژکتیوی موجود نباشد، بعد انژکتیو M را برابر $+\infty$ در نظر می‌گیرند. توجه شود که R-مدول M انژکتیو است اگروتنهااگر $\operatorname{id}_R(M) = \circ$.

تعریف ۵.۲.۱. [24, P: 365] فرض کنید A و B دو $R-$مدول باشند و

$$E = \circ \longrightarrow B \xrightarrow{\eta} E^\circ \xrightarrow{d^\circ} E^۱ \xrightarrow{d^۱} E^۲ \longrightarrow \cdots$$

یک تحلیل انژکتیو از B باشد. دراین‌صورت

$$\mathrm{Ext}^n_R(A,B)=H^n\Big(\mathrm{Hom}_R(A,E^B)\Big)=\mathrm{Ker}\, d^n_*/\mathrm{Im}\, d^{n-1}_*$$

که در آن $d^n_*:\mathrm{Hom}_R(A,E^n)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,E^{n+1})$ یک همریختی با ضابطه‌ی $d^n_*(f)=d^nf$ است.

۳.۱ حلقه و مدول کسرها

تعریف ۱.۳.۱. [25, 3.43] زیرمجموعه‌ی S از حلقه‌ی R را یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی R می‌نامند اگر

۱) $1_R\in S$، $0_R\notin S$ و

۲) برای هر $a,b\in S$، $ab\in S$.

بحث و تعریف ۲.۳.۱. [25, 5.2] فرض کنیم S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R باشد. رابطه‌ی $\sim$ را روی $R\times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $(a,s),(b,t)\in R\times S$ می‌نویسیم

$(a,s)\sim(b,t)$ اگروتنهااگر $u\in S$ی وجود داشته باشد به‌طوری‌که $u(ta-sb)=0$.

دراین‌صورت $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $R\times S$ است. برای هر $(a,s)\in R\times S$، رده‌ی هم‌ارزی شامل (a,s) را با a/s و مجموعه‌ی رده‌های هم‌ارزی $\sim$ را با $S^{-1}R$ نمایش می‌دهند. $S^{-1}R$ تحت عمل‌های

$$a/s\ +\ b/t=(at+sb)/st \quad \text{و} \quad a/s\ .\ b/t=ab/st$$

که در آن $a,b\in R$ و $s,t\in S$، یک حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار است. این حلقه، حلقه‌ی کسرهای R نسبت به S نامیده می‌شود. درصورتی‌که $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول R باشد و $S=R\setminus\mathfrak{p}$، آن‌گاه $S^{-1}R$ با علامت $R_{\mathfrak{p}}$ نمایش داده می‌شود.

بحث و تعریف ۳.۳.۱. [25, 9.4] فرض کنیم S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی جابه‌جایی R و M یک R-مدول باشد. رابطه‌ی $\sim$ را روی $M\times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $(m,s),(n,t)\in M\times S$ می‌نویسیم

$(m,s)\sim(n,t)$ اگروتنهااگر $u\in S$ی وجود داشته باشد به‌طوری‌که $u(tm-sn)=0$.

دراین‌صورت $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $M \times S$ است. برای هر $(m,s) \in M \times S$، رده‌ی هم‌ارزی شامل (m,s) را با m/s و مجموعه‌ی رده‌های هم‌ارزی $\sim$ را با $S^{-1}M$ نمایش می‌دهند. $S^{-1}M$ تحت عمل‌های

$$m/s \ + \ n/t = (tm+sn)/st \quad \text{و} \quad r/s \ . \ n/t = rn/st$$

که در آن $m,n \in M$ ، $s,t \in S$ و $r \in R$، یک $S^{-1}R$-مدول است. $S^{-1}M$ را مدول کسرهای M نسبت به S می‌نامند. درصورتی‌که $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول R باشد و $S = R \setminus \mathfrak{p}$، آن‌گاه $S^{-1}M$ با علامت $M_{\mathfrak{p}}$ نمایش داده می‌شود.

نمادگذاری و لم ۴.۳.۱. [25, 9.7] فرض کنید $f : L \longrightarrow M$ یک همریختی R-مدولی و $S \subseteq R$ یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. دراین‌صورت،

$$S^{-1}f : S^{-1}L \longrightarrow S^{-1}M$$

با ضابطه‌ی $S^{-1}f(a/s) = f(a)/s$ که در آن $a \in L$ و $s \in S$، یک $S^{-1}R$-همریختی است.

قضیه ۵.۳.۱. [25, 5.38] فرض کنید S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه R باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند.

(۱) اگر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ و $\mathfrak{p} \bigcap S \neq \emptyset$، آن‌گاه $S^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^e = S^{-1}R$.

(۲) اگر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ و $\mathfrak{p} \bigcap S = \emptyset$، آن‌گاه $S^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^e \in \operatorname{Spec}(S^{-1}R)$.

(۳) اگر $P \in \operatorname{Spec}(S^{-1}R)$، آن‌گاه $P^c \in \operatorname{Spec}(R)$ و $P^c \bigcap S = \emptyset$.

لم ۶.۳.۱. [25, 9.9] فرض کنید M، N و L همگی $R-$مدول باشند و

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

یک رشته‌ی دقیق باشد. دراین‌صورت اگر $S \subseteq R$ یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد، آن‌گاه رشته‌ی

$$S^{-1}L \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}N$$

نیز دقیق است.

قضیه ۷.۳.۱. [24, 4.87] اگر S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی نوتری R و N یک R-مدول با تولید متناهی باشد، آن‌گاه برای هر R-مدول دلخواه M، یکریختی طبیعی

$$\varphi : S^{-۱} \operatorname{Hom}_R(N, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{S^{-۱}R}(S^{-۱}N, S^{-۱}M)$$

موجود است به‌طوری‌که برای هر $g \in \operatorname{Hom}_R(N, M)$ و هر $s \in S$، $\varphi(g/s) = (۱/s)S^{-۱}g$.

تعریف ۸.۳.۱. [25, 9.14] فرض کنید M یک R-مدول باشد. دراین‌صورت محمل M را که با نماد $\operatorname{Supp}_R(M)$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$\operatorname{Supp}_R(M) := \Big\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \ \mid \ M_\mathfrak{p} \neq ۰\Big\}.$$

لم ۹.۳.۱. [25, 9.15] فرض کنید M یک R-مدول باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.

۱) $M = ۰$.

۲) برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$، $M_\mathfrak{p} = ۰$؛ یعنی $\operatorname{Supp}_R(M) = \emptyset$.

۳) برای هر $\mathfrak{m} \in \max(R)$، $M_\mathfrak{m} = ۰$.

لم ۱۰.۳.۱. [25, 9.20] فرض کنید M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. دراین‌صورت،

$$\operatorname{Supp}_R(M) = \operatorname{Var}(\operatorname{Ann}_R(M)).$$

قضیه ۱۱.۳.۱. [4, 11.3.1] فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ و $(R', \mathfrak{m}')$ حلقه‌های موضعی بوده و $f : R' \longrightarrow R$ یک همریختی پوشا از حلقه‌ها باشد. فرض کنید $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ و $\mathfrak{p}' = f^{-۱}(\mathfrak{p})$. دراین‌صورت f همریختی پوشایی از حلقه‌ها مانند $f' : R'_{\mathfrak{p}'} \longrightarrow R_\mathfrak{p}$ با ضابطه‌ی تعریف $f'(r'/s') = f(r')/f(s')$ $(r' \in R', s' \in R' \setminus \mathfrak{p}')$ القا می‌کند. به‌علاوه برای هر $i \geq ۰$ و هر $R-$مدول با تولید متناهی M، یکریختی

$$\operatorname{Ext}^j_{R'_{\mathfrak{p}'}}(M_\mathfrak{p}, R'_{\mathfrak{p}'}) \cong \Big(\operatorname{Ext}^j_{R'}(M, R')\Big)_\mathfrak{p}$$

از $R_\mathfrak{p}-$ مدول‌ها موجود است.

قضیه ۱۲.۳.۱. [4, 10.1.3] فرض کنید $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی نوتری R و $r \in R \setminus \mathfrak{p}$ باشد. دراین‌صورت،

$$E(R/\mathfrak{p}) \xrightarrow{\ .r\ } E(R/\mathfrak{p})$$

یک یکریختی است.

قضیه ۱۳.۳.۱. [19, 18.4] فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از R باشد. دراین‌صورت برای هر $x \in R \setminus \mathfrak{p}$، نگاشت ضربی توسط x یک خودریختی از $E(R/\mathfrak{p})$ القا می‌کند. لذا $E(R/\mathfrak{p})$ ساختار $R_{\mathfrak{p}}-$مدولی دارد.

قضیه ۱۴.۳.۱. فرض کنید Y یک $R-$مدول و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از R باشد. دراین‌صورت $\mathrm{Hom}_R(Y, E(R/\mathfrak{p}))$ ساختار $R_{\mathfrak{p}}-$مدولی دارد.

برهان. فرض کنیم $a/s \in R_{\mathfrak{p}}$ و $f \in \mathrm{Hom}_R\Big(Y, E(R/\mathfrak{p})\Big)$. برای هر $y \in Y$ ضرب زیر را تعریف می‌کنیم.

$$(a/s.f)(y) := a/sf(y)$$

با توجه به این‌که $E(R/\mathfrak{p})$ ساختار $R_{\mathfrak{p}}-$مدولی دارد، ضرب تعریف شده خوش‌تعریف است. بقیه‌ی اثبات سر راست است. □

قضیه ۱۵.۳.۱. فرض کنید Y یک $R-$مدول و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از R باشد. اگر Y ساختار $R_{\mathfrak{p}}-$مدولی داشته باشد، آن‌گاه $Y \cong Y_{\mathfrak{p}}$.

برهان. همریختی $\phi : Y \longrightarrow Y_{\mathfrak{p}}$ را با ضابطه $\phi(y) = y/۱$ $(y \in Y)$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $y \in \mathrm{Ker}(\phi)$، دراین‌صورت $y/۱ = ۰/۱$. پس $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ی وجود دارد به‌طوری‌که $sy = ۰$. لذا

$$y = ((۱/s)s)y = (۱/s)(sy) = (۱/s).۰ = ۰$$

و از این‌جا نتیجه می‌گیریم که ϕ یک‌به‌یک است. از طرفی برای هر $y/s \in Y_{\mathfrak{p}}$، تساوی

$$y/s = ((۱/s)y)/۱ = \phi((۱/s)y)$$

برقرار و لذا ϕ پوشا می‌باشد. در نتیجه ϕ یک یکریختی است و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود. □