بسم الله الرّحمن الرّحيم

دانشگاه شهید بهشتی
دانشکدهٔ علوم ریاضی
گروه آمار

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

عنوان

مدل‌های رژیم-تبدّلی در سری‌های زمانی مالی

نگارش

مهدی شفیعی علویجه

استاد راهنما

دکتر احمد خدادادی

۱۳۸۹/۷/۲۴

استاد مشاور

دکتر مجتبی خزایی

بهمن ۱۳۸۸

تاریخ ....
شماره ....
پیوست........................

دانشگاه شهید بهشتی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شماره **۲۰۰/۴۲۷۳/د** مورخ **۱۳۸۸/۱۱/۰۹** جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه آقای **مهدی شفیعی علویجه** شماره شناسنامه **۲۱۳۳** صادره از **تهران** متولد **۱۳۶۱** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد **آمار اقتصادی اجتماعی**

با عنوان:

مدل های رژیم- تبدلی در سری های زمانی مالی

به راهنمایی:

۱۳۸۹/۷/۲۴

دکتر احمد خدادادی

طبق دعوت قبلی در تاریخ **۱۳۸۸/۱۱/۱۴** تشکیل گردید و براساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده **۲۰** آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ **۷۵/۱۰/۲۵** پایان نامه مزبور با نمره ۱۹٫۵ و درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت .

نام استاد	مرتبه علمی	نام دانشگاه
۱) **استاد راهنما:** دکتر احمد خدادادی	استاد یار	شهیدبهشتی
۲) **استاد مشاور:** دکترمجتبی خزایی	استادیار	شهیدبهشتی
۳) **داور:** دکتر مسعود البرز	استادیار	شهیدبهشتی
۴) **داور:** دکتر فیروزه ریواز	استادیار	شهید بهشتی
۵) **نماینده تحصیلات تکمیلی:** فیروزه ریواز		

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

قدردانی

بر خود وظیفه می‌دانم از استاد عزیز و بزرگوار جناب آقای دکتر احمد خدادادی که با راهنمایی‌های بی‌دریغشان من را در انجام این پایان‌نامه یاری رساندند صمیمانه قدردانی نمایم.

همچنین از استاد گرامی جناب آقای دکتر مجتبی خزایی که مشاورهٔ این پایان‌نامه را بر عهده داشتند و اساتید محترم جناب آقای دکتر البرز و سرکار خانم دکتر ریواز که زحمت داوری آن را تقبّل فرمودند، کمال تشکر را دارم.

چکیده

وجود تغییرات ساختاری در سری‌های زمانی مالی، از عواملی است که موجب می‌شود مدل‌های خطی برای تحلیل این سری‌ها مناسب نباشند. در محیط اقتصادی گهگاه با پیشامدهایی مواجه می‌شویم که با ایجاد دگرگونی در شرایط حاکم بر بازارها و یا حتی تغییر وضعیت اقتصاد در سطح کلان، سری‌های زمانی مربوطه را دچار تغییرات اساسی می‌کنند. برخی از این پیشامدها بازگشتی‌اند، به این معنا که امکان وقوع دوبارهٔ آن‌ها وجود دارد. در چنین شرایطی تغییرات به صورت تبدّل نمود پیدا می‌کنند، تبدّلی بین رژیم (وضعیت)های مختلف که هر یک رفتار متفاوتی را برای سری‌های زمانی به همراه خواهد داشت.

در این پایان‌نامه به بررسی مدل‌هایی پرداخته‌ایم که در تحلیل سری‌های زمانی مالی تحت شرایط تبدّل رژیم‌ها بیشتر مورد استفاده قرار گرفته‌اند، که از آن جمله می‌توان به مدل‌های آستانه‌ای و مدل‌های با تبدّل مارکوفی اشاره کرد. در نهایت با ارزیابی مدل‌های رژیم-تبدّلی در پیش‌بینی نوسانات بازار جهانی طلا، نشان داده‌ایم که برخی از این مدل‌ها بهتر از مدل‌های خطی قادرند نوسانات بلند مدت را پیش‌بینی کنند.

کلمات کلیدی: رژیم-تبدّلی، تغییر ساختاری، سری‌های زمانی ناخطی، پیش‌بینی نوسانات، تبدّل مارکوفی، قیمت‌های طلا.

فهرست مطالب

پیشگفتار ۱

۱ مدل‌های رژیم-تبدّلی برای میانگین شرطی ۴

۱-۱ مدل‌های اتورگرسیو آستانه‌ای ۵

۱-۱-۱ معرفی ۵

۱-۱-۲ برآورد پارامترهای مدل ۶

۱-۱-۳ پیش بینی ۷

۱-۱-۴ مانایی ۹

۱-۱-۵ تعمیم به مدل‌های با تغییر رژیم تدریجی ۱۰

۱-۲ مدل اتورگرسیو با تبدّل مارکوفی ۱۳

۱-۲-۱ مقدمه ۱۳

۱-۲-۲ مشخصات مدل ۱۴

۱-۲-۳ استنباط دربارهٔ رژیم‌های غیرقابل مشاهده ۱۷

۱-۲-۴ استفاده از الگوریتم EM برای یافتن برآوردهای ماکسیمم درستنمایی ۲۳

۲ مدل‌های رژیم-تبدّلی برای واریانس شرطی ۳۵

۲-۱ مقدمه ۳۶

۲-۲ مروری بر مدل‌های واریانس شرطی ناهمگن تک-رژیمی ۳۸

۲-۲-۱ واریانس شرطی و خصوصیات آن ۳۸

۲-۲-۲ مدل واریانس شرطی ناهمگن اتورگرسیو (ARCH) ۳۹

۲-۲-۳ مدل واریانس شرطی ناهمگن اتورگرسیو تعمیم یافته (GARCH) ۴۳

۲-۳ مدل‌های واریانس شرطی ناهمگن با رژیم‌های قابل مشاهده ۴۷

۲-۳-۱ مدل GARCH آستانه‌ای ۴۸
۲-۳-۲ مدل GARCH با انتقال هموار ۵۰
۲-۳-۳ مدل GARCH با تبدّل نوسانات ۵۱
۲-۳-۴ مدل GARCH نمایی ۵۲
۲-۴ مدل‌های ناهمواریانسی شرطی با تبدّل مارکوفی ۵۶
۲-۴-۱ مدل ARCH با تبدّل مارکوفی ۵۸
۲-۴-۲ مدل GARCH با تبدّل مارکوفی ۶۲

۳ ارزیابی مدل‌های رژیم-تبدّلی در پیش‌بینی نوسانات قیمت جهانی طلا ۶۸
۳-۱ مقدمه ۶۹
۳-۲ داده ها ۶۹
۳-۳ مقایسه نیکویی برازش مدل‌ها ۷۷
۳-۴ مقایسه توانایی پیش‌بینی مدل‌ها ۸۴
۳-۵ آزمون فرض برابری توانایی پیش‌بینی مدل‌ها ۹۱

پیوست A : تفاضل مارتینگل ۹۸

پیوست B : الگوریتم EM ۱۰۰

واژه‌نامه ۱۰۳

فهرست اختصارات ۱۰۶

نام‌نامه ۱۰۷

کتاب‌نامه ۱۰۹

فهرست جداول

جدول (۳-۱)- برخی آماره‌های توصیفی برای بازده‌ها ۷۰
جدول (۳-۲)- ACF ، PACF و نتایج آزمون لیونگ-باکس ۷۱
جدول (۳-۳)- برآوردهای ماکسیمم درستنمایی مدل‌های GARCH ، EGARCH و GJR-GARCH ۷۸
جدول (۳-۴)- برآوردهای ماکسیمم درستنمایی مدل‌های MS-GARCH ۷۹
جدول (۳-۵)- مقایسه نیکویی برازش مدل‌ها بر اساس معیارهای مختلف ۸۳
جدول (۳-۶)- مقایسه پیش‌بینی‌های صورت گرفته برای نوسانات یک روز بعد ۸۵
جدول (۳-۷)- مقایسه پیش‌بینی‌های صورت گرفته برای نوسانات یک هفته بعد ۸۶
جدول (۳-۸)- مقایسه پیش‌بینی‌های صورت گرفته برای نوسانات دو هفته بعد ۸۷
جدول (۳-۹)- مقایسه پیش‌بینی‌های صورت گرفته برای نوسانات یک ماه بعد ۸۸
جدول (۳-۱۰)- آزمون برابری توانایی پیش‌بینی یک روز بعد ۹۴
جدول (۳-۱۱)- آزمون برابری توانایی پیش‌بینی یک هفته بعد ۹۵
جدول (۳-۱۲)- آزمون برابری توانایی پیش‌بینی دو هفته بعد ۹۶
جدول (۳-۱۳)- آزمون برابری توانایی پیش‌بینی یک ماه بعد ۹۷

فهرست اشکال

شکل (۱-۱)- نمودار تابع لوژستیک ۱۱
شکل (۱-۲)- نمودار نرخ رشد تولید ناخالص ملی ایالات متحده از سال ۱۹۵۲ تا ۱۹۸۵ ... ۳۴
شکل (۱-۳)- نمودار احتمال قرار داشتن در وضعیت رکود اقتصادی ۳۴
شکل (۲-۱)- نمودارهای منحنی تاثیر اخبار برای چند مدل رژیم-تبدّلی ۵۵
شکل (۳-۱)- نمودار قیمت جهانی طلا از ابتدای سال ۱۹۹۷ تا پایان نیمه اول سال ۲۰۰۹ ... ۷۳
شکل (۳-۲)- نمودار بازده‌ها از ابتدای سال ۱۹۹۷ تا پایان نیمه اول سال ۲۰۰۹ .... ۷۳
شکل (۳-۳)- نمودار تابع خودهمبستگی نمونه‌ای بازده‌ها ۷۴
شکل (۳-۴)- نمودار تابع خودهمبستگی نمونه‌ای توان دوم بازده‌ها ۷۴
شکل (۳-۵)- نمودار واریانس شرطی برآورد شده بر اساس مدل GARCH(۱،۱) ۷۵
شکل (۳-۶)- نمودار مانده‌های استاندارد شده به دست آمده از مدل GARCH(۱،۱) ۷۵
شکل (۳-۷)- نمودار خودهمبستگی نمونه‌ای مانده‌های استاندارد شده به دست آمده از برازش مدل
GARCH(۱،۱) ۷۶
شکل (۳-۸)- نمودار خودهمبستگی نمونه‌ای توان دوم مانده‌های استاندارد شده به دست آمده از
برازش مدل GARCH(۱،۱) ۷۶

پیشگفتار

گرچه مدل‌های خطی ساده‌ای چون مدل‌های ARIMA به دلیل سهولت استفاده همچنان از محبوبترین مدل‌های سری زمانی محسوب می‌شوند، ولی اغلب مشاهده شده که این مدل‌ها توان تبیین برخی ویژگی‌های خاص متغیرهای اقتصادی و مالی را ندارند و برای تحلیل این نوع سری‌های زمانی مناسب نیستند. یک علت، پویایی محیط اقتصادی است. گهگاه عواملی چون تغییر سیاست‌ها، جنگ‌ها و بلایای طبیعی، رونق و رکود اقتصادی، تنش در بازارهای مالی و ... باعث ایجاد تغییر اساسی در سری‌های زمانی مربوط به متغیرهای اقتصادی و مالی می‌شود به طوری که برازش یک مدل خطی ساده به داده‌هایی که در بازهٔ زمانی نسبتاً طولانی جمع‌آوری شده، رضایت بخش نخواهد بود.

در یکی دو دههٔ اخیر در مورد امکان بروز تغییرات ساختاری در سری‌های زمانی مالی مطالعات زیادی انجام شده و تبعات نادیده گرفتن این تغییرات مورد بررسی قرار گرفته است. از جمله می‌توان به نتایج مطالعات پرون (۱۹۸۹) اشاره کرد که نشان می‌دهد وجود تغییرات ساختاری در سری‌های زمانی می‌تواند اثر ریشهٔ واحد دروغین را به همراه داشته باشد. به عقیدهٔ پرون نادیده گرفتن تغییرات در سطح میانگین سری‌های زمانی مالی اغلب سبب می‌گردد که تصور شود این سری‌ها دارای ریشهٔ واحد هستند و این تصور نادرست تاثیر سوئی بر تحلیل‌ها خواهد گذاشت. لامورکس و لاستریپس (۱۹۹۰) همین مطلب را در مورد نادیده گرفتن تغییرات در سطح واریانس سری‌های زمانی مالی عنوان کرده و با ذکر نمونه‌های مختلف نشان داده‌اند که دوام بالای مشاهده شده در اغلب مدل‌های واریانس شرطی ناهمگن، می‌تواند ناشی از این تغییرات باشد.

آزمون‌های زیادی پیشنهاد شده که توسط آنها می‌توان فرض وجود تغییرات ساختاری را آزمود و از تبعات نامطلوبی که ممکن است به طور ناخواسته با نادیده گرفتن این تغییرات به وجود آید، احتراز کرد. البته این آزمون‌ها موضوع بحث این پایان‌نامه نخواهند بود و آنچه ما بررسی خواهیم کرد مدل‌هایی هستند که در شرایط وجود تغییر ساختاری، برای تحلیل سری‌های زمانی مالی به‌کار گرفته می‌شوند.

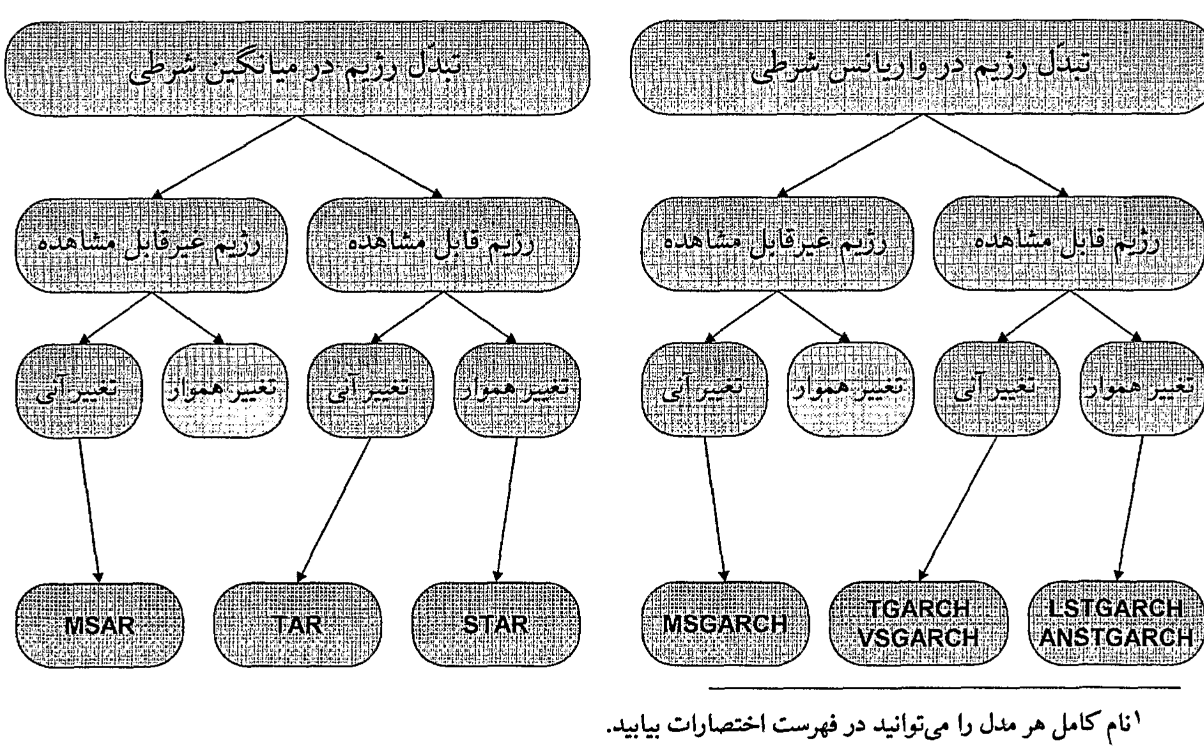
در محیط اقتصادی برخی پیشامدها امکان بازرخداد دارند و وقوع گاه و بیگاه آن‌ها موجب تغییر وضعیت اقتصادی و بالطّبع بروز تغییر ساختاری در سری‌های زمانی مالی می‌شود. چون این پیشامدها بازگشتی‌اند تغییرات به شکل تبدّل بین چند وضعیت (یا به اصطلاح رژیم) مختلف نمود پیدا می‌کند به طوری که سری‌های زمانی

در هر زمان، بسته به رژیم حاکم در آن زمان، رفتاری مشخص را از خود بروز می‌دهند.

برای تحلیل سری‌های زمانی در این‌چنین شرایطی، مدل‌هایی پیشنهاد شده‌اند که به مدل‌های رژیم تبدّلی معروفند. این مدل‌ها از تعدادی زیرمدل تشکیل می‌شوند و فرض بر آن است که سری‌های زمانی بر اساس رژیم حاکم در هر زمان، از یکی از این زیر مدل‌ها تبعیت می‌کنند. در اغلب موارد زیرمدل‌ها همه از یک کلاس (مثلا اتورگرسیو) اما با پارامترهای متفاوت هستند به‌طوری که تغییر رژیم، شکل کلی مدل را تغییر نمی‌دهد بلکه تنها منجر به تغییر پارامترها می‌گردد.

در تحلیل سری‌های زمانی مالی دو گروه از مدل‌های رژیم-تبدّلی تاکنون بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌اند: مدل‌های آستانه‌ای که اولین بار توسط تانگ (۱۹۷۹) معرفی شده‌اند و مدل‌های با تبدّل مارکوفی که باید همیلتون (۱۹۸۹) را پیشگام استفاده از این مدل‌ها در مبحث سری‌های زمانی دانست. تفاوت این دو گروه ناشی از نوع تعیین رژیم در هر یک از آنهاست. در مدل‌های آستانه‌ای، رژیم‌ها بر اساس مقدار یک متغیر قابل مشاهده دقیقاً قابل تعیین‌اند ولی در مدل‌های با تبدّل مارکوفی، رژیم‌ها بر اساس متغیری غیر قابل مشاهده (که از یک زنجیر مارکوف تبعیت می‌کند) تعیین می‌شوند و بنابراین اطلاع دقیقی از آنها در دست نخواهد بود و تنها می‌توان به صورت احتمالی، در مورد وقوع یا عدم وقوع هر رژیم صحبت کرد.

دو گروه مذکور شامل تعداد زیادی مدل هستند که در این پایان‌نامه پراستفاده‌ترین آنها معرفی خواهند شد. فصل ۱ به مدل‌های رژیم-تبدّلی برای میانگین شرطی اختصاص یافته، و فصل ۲ مدل‌های رژیم-تبدّلی برای واریانس شرطی سری‌های زمانی را تشریح می‌کند. شکل زیر یک دسته‌بندی از این مدل‌ها را نشان می‌دهد[1]:



[1] نام کامل هر مدل را می‌توانید در فهرست اختصارات بیابید.

فصل ۳ پایان‌نامه را به ارزیابی مدل‌های رژیم تبدّلی در پیش‌بینی نوسانات بازار جهانی طلا اختصاص داده‌ایم. به این منظور پیش‌بینی‌های کوتاه مدت و بلند مدت به دست آمده از مدل‌های تک-رژیمی و رژیم-تبدّلی را با معیارهای مختلف مورد مقایسه قرار داده‌ایم. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که مدل‌های با تبدّل مارکوفی بهتر از مدل‌های تک-رژیمی قادرند نوسانات بلند مدت بازار را پیش‌بینی کنند.

فصل ۱

مدل‌های رژیم-تبدّلی برای میانگین شرطی

۱-۱ مدل‌های اتورگرسیو آستانه‌ای

۱-۱-۱ معرفی

مدل‌های اتورگرسیو آستانه‌ای (TAR) یک گروه مهم از مدل‌های سری‌های زمانی ناخطی هستند که اولین بار توسط تانگ (۱۹۷۸) پیشنهاد شدند. این مدل‌ها با وجود سادگی، توان تولید رفتارهای ناخطی پیچیده‌ای همچون جهش، تناوب و عدم تقارن را دارند و همین باعث شده در بین مدل‌های ناخطی از جایگاه ویژه‌ای برخوردار باشند. مدل TAR شبیه به یک مدل اتورگرسیو (AR) است با این تفاوت که اجازه می‌دهد پارامترهای مدل براساس مقدار یک متغیر آستانه تغییر کنند:

$$Y_t = \phi_0^{(j)} + \phi_1^{(j)} Y_{t-1} + \cdots + \phi_{p_j}^{(j)} Y_{t-p_j} + \varepsilon_t \qquad ; if \quad r_{j-1} < Z_t \leq r_j \tag{۱.۱}$$

که $j = 1, 2, \ldots, k$ و $-\infty = r_0 < r_1 < \ldots < r_k = \infty$ و $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$.

Z_t که متغیر آستانه نامیده می‌شود، متغیری قابل مشاهده است که می‌تواند مقدار تاخیری خود سری زمانی یا مقادیر مشاهده شدهٔ یک سری زمانی دیگر را نشان دهد. در واقع در مدل (۱.۱) فضای متغیر آستانهٔ Z_t توسط مقادیر آستانه $r_1, \ldots, r_{k-1}$ به k رژیم متفاوت تقسیم شده و در هر رژیم سری زمانی Y_t از یک مدل اتورگرسیو متفاوت تبعیت می‌کند.

همان‌طور که از (۱.۱) پیداست، مدل TAR در حقیقت نوعی مدل تکه‌ای-خطی است ولی برخلاف مدل‌های تکه‌ای-خطی معمول که بازه زمانی را به قسمت‌های مختلف تقسیم و روی هر قسمت از یک مدل خطی متفاوت تبعیت می‌کنند، مدل TAR فضای متغیر آستانه Z_t را افراز می‌کند، به عبارتی در این‌جا تغییر رژیم روی فضای آستانه صورت می‌گیرد نه فضای زمان. این امر باعث بروز خواص جالبی برای مدل TAR می‌شود از جمله آن‌که این مدل برخلاف مدل‌های تکه‌ای-خطی معمول می‌تواند تحت شرایطی مانا باشد.

اگر متغیر آستانه برابر با مقدار تأخیری خود سری زمانی در نظر گرفته شود، یعنی داشته باشیم $Z_t = Y_{t-d}$ (که d مقداری صحیح و مثبت دارد و پارامتر تأخیر نامیده می‌شود) در این صورت رژیم Y_t توسط مقدار تأخیری خودش یعنی Y_{t-d} تعیین می‌شود و به همین علت مدل به دست آمده را یک مدل اتورگرسیو آستانه‌ای خودانگیز یا به اختصار SETAR می‌نامند. تاکنون بیشتر مطالعات و مطالب نوشته شده در مورد مدل‌های اتورگرسیو آستانه‌ای به مدل SETAR اختصاص یافته، تا جایی که محققین و نویسندگان اغلب آن را به عنوان مدل TAR معرفی می‌کنند. این مدل تاکنون به طور گسترده‌ای در تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی مالی مورد استفاده قرار گرفته که یک علت سادگی آن در مقایسه با مدل‌های ناخطی دیگر است. به علاوه در بسیاری موارد، تئوری‌های اقتصادی و مالی یا یافته‌های تجربی نوع خاصی از ناخطی بودن را برای سری‌های زمانی تحت بررسی پیشنهاد می‌کنند که

با مدل SETAR به خوبی قابل تبیین است. به عنوان مثال سیاست برخی بانک‌های مرکزی این است که حدودی را برای تغییرات آزادانه نرخ تبادل ارزی تعیین کنند. تا زمانی که نرخ ارز در این محدوده در نوسان است هیچ دخالتی از طرف بانک مرکزی صورت نمی‌گیرد ولی در صورتی که نرخ ارز از این حدود تجاوز کند بانک وارد عمل شده، با تزریق یا خرید ارز جلوی افزایش یا کاهش بی‌رویه قیمت را می‌گیرد. در این شرایط سری زمانی مربوط به نرخ تبادل ارزی از دو رژیم متفاوت تبعیت خواهد کرد: رژیم آزاد بدون دخالت بانک مرکزی و رژیم کنترلی با دخالت بانک. به علاوه در هر زمان می‌توان رژیم را با استفاده از مقدار سری در زمان گذشته کاملاً مشخص کرد. بنابراین طبیعی است که مدل SETAR یکی از گزینه‌های مطلوب برای مدل‌بندی رفتار این نوع سری زمانی باشد.

چون مدل SETAR مهمترین مدل از نوع TAR است و بخش اعظم مطالعات را به خود اختصاص داده، و همچنین برای سهولت در نمادگذاری، در بخش‌های بعدی این مدل را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۱-۱-۲ برآورد پارامترهای مدل

چون مدل SETAR یک مدل تکه‌ای-خطی است روش کمترین توان‌های دوم روشی معمول و ساده برای برآورد پارامترهای مدل خواهد بود[۱]. اگر پارامتر تاخیر d و مقادیر آستانه $r = (r_1, \dots, r_{k-1})$ دانسته فرض شوند برآورد حداقل مربعات ضرائب اتورگرسیو مقادیری خواهند بود که

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{r_{j-1}<y_{t-d}<r_j} [y_t - (\phi_0^{(j)} + \phi_1^{(j)} y_{t-1} + \cdots + \phi_{p_j}^{(j)} y_{t-p_j})]^2$$

را مینیمم کنند. در حقیقت ضرائب اتورگرسیو هر رژیم با استفاده از داده‌هایی که در آن رژیم قرار می‌گیرند و با به کار بردن روش برآورد رگرسیون خطی ساده به راحتی قابل محاسبه‌اند. واریانس مانده‌های به دست آمده هم برآوردی برای σ^2 خواهد بود که آن را با $\hat{\sigma}^2(r,d)$ نشان می‌دهیم (از این نمادگذاری برای نشان دادن وابستگی برآورد به‌دست آمده به r و d استفاده می‌کنیم).

برآورد حداقل مربعات r و d را می‌توان با جستجوی مقادیری که واریانس مانده‌ها را مینیمم می‌کنند به دست آورد:

$$(\hat{r}, \hat{d}) = \underset{r,d}{argmin}\ \hat{\sigma}^2(r,d)$$

[۱] در صورتی که توزیع ε_t ها نرمال در نظر گرفته شود، برآوردهای به دست آمده از روش OLS با برآوردهای ماکسیمم درستنمایی برابر خواهند بود

جستجو برای d تنها روی مقادیر صحیح $1, 2, \ldots, d^*$ انجام خواهد گرفت (که d^* حداکثر مقدار در نظر گرفته شده برای پارامتر تاخیر را نشان می‌دهد). برای برآورد r هم جستجو روی مجموعه مقادیر آستانهٔ قابل قبول انجام خواهد شد. این مجموعه باید به گونه‌ای باشد که هر رژیم تعدادی کافی از مشاهدات را شامل شود در غیر این صورت برآورد ضرائب اتورگرسیو از دقت کافی برخوردار نخواهد بود. همچنین کافیست جستجو تنها روی آماره‌های ترتیبی Y_{t-d} صورت گیرد زیرا با تغییر مقادیر آستانه بین آماره‌های ترتیبی، هیچ مشاهده‌ای از یک رژیم به رژیم دیگر منتقل نخواهد شد و در نتیجه $\hat{\sigma}^2(r,d)$ تفاوتی نخواهد کرد. در نهایت $\hat{\sigma}^2(\hat{r},\hat{d})$ برآورد حداقل مربعات برای σ^2 خواهد بود.

مسئله دیگری که در مورد تشخیص و برآورد مدل مطرح می‌شود، انتخاب مرتبه مناسب برای زیرمدل‌های AR است. پیشنهاد تانگ (۱۹۹۰) استفاده از معیار زیر است:

$$AIC(p_1, \ldots, p_k) = \sum_{j=1}^{k} \left[n_j \ln \hat{\sigma}_j^2 + 2(p_j + 1) \right]$$

این معیار، شبیه معیار AIC معمولی است با این تفاوت که جریمهٔ وارد شدن هر پارامتر اضافی را تنها در مورد تعداد مشاهداتی اعمال می‌کند که در رژیم مربوط به آن پارامتر قرار می‌گیرند.

۱-۱-۳ پیش بینی

به طور کلی پیش‌بینی در مدل‌های ناخطی در مقایسه با مدل‌های خطی از پیچیدگی بیشتری برخوردار است. به عنوان مثال مدل کلی اتورگرسیو ناخطی مرتبه ۱ را در نظر گیرید:

$$Y_t = F(Y_{t-1}; \theta) + \varepsilon_t$$

که F تابعی ناخطی است. با معیار کمترین توان‌های دوم، بهترین پیش‌بینی برای Y_{t+h} در زمان t عبارت است از

$$\hat{Y}_{t+h|t} = E(Y_{t+h} \mid Y_t, Y_{t-1}, \ldots)$$

برای پیش‌بینی یک گامی، با توجه به اینکه $E(\varepsilon_{t+1} \mid Y_t, Y_{t-1}, \ldots) = 0$ خواهیم داشت

$$\hat{Y}_{t+1|t} = E(Y_{t+1} \mid Y_t, Y_{t-1}, \ldots) = E[F(Y_t;\theta) \mid Y_t, Y_{t-1}, \ldots] = F(Y_t;\theta)$$

که همان پیش‌بینی بهینه برای حالتی است که F خطی باشد. با این حال مسئله برای پیش‌بینی دو گامی به این سادگی نخواهد بود:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{t+2|t} = E(Y_{t+2} \mid Y_t, Y_{t-1}, \ldots) &= E(F(Y_{t+1}; \theta) \mid Y_t, Y_{t-1}, \ldots) \\ &\neq F(E[Y_{t+1} \mid Y_t, Y_{t-1}, \ldots]; \theta) \\ &= F(\hat{Y}_{t+1|t}; \theta)\end{aligned}$$

زیرا در حالت کلی $E[F(.)] \neq F(E[.])$. در عوض خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{t+2|t} &= E[F(F(Y_t; \theta) + \varepsilon_{t+1}; \theta) \mid Y_t, Y_{t-1}, \ldots] \\ &= E[F(\hat{Y}_{t+1|t} + \varepsilon_{t+1}; \theta) \mid Y_t, Y_{t-1}, \ldots]\end{aligned}$$

محاسبه تحلیلی امید شرطی فوق کاری سخت (و گاه ناممکن) است و پیش‌بینی گام‌های بعدی از این هم پیچیده‌تر خواهد بود. یک روش ساده برای انجام پیش‌بینی در مدل‌های ناخطی مثل SETAR ، استفاده از شبیه‌سازی است. در اینجا به عنوان نمونه روش شبیه سازی مونت کارلو را برای پیش‌بینی یک مدل SETAR که از دو رژیم تشکیل شده و هر رژیم از یک AR(۱) تبعیت می‌کند بیان خواهیم کرد[۲] . مدل SETAR مذکور را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$Y_t = [\phi_0^{(1)} + \phi_1^{(1)} Y_{t-1}] I(Y_{t-1} < r) + [\phi_0^{(2)} + \phi_1^{(2)} Y_{t-1}] I(Y_{t-1} \geq r) + \varepsilon_t$$

که I(.) تابع نشانگر است. با توجه به مطالبی که پیشتر به آن اشاره شد، پیش‌بینی یک گامی عبارت خواهد بود از:

$$\hat{Y}_{t+1} = [\phi_0^{(1)} + \phi_1^{(1)} Y_t] I(Y_t < r) + [\phi_0^{(2)} + \phi_1^{(2)} Y_t] I(Y_t \geq r)$$

[۲] این روش به سادگی قابل تعمیم به مدل SETAR کلی است ولی به خاطر پرهیز از نمادگذاری‌های پیچیده از انجام این کار صرف نظر شده است.

برای به دست آوردن پیش‌بینی h>۱ گامی، ابتدا مقادیر زیر را به صورت بازگشتی تولید می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{t+2}^{(MC)j} &= [\phi_0^{(1)} + \phi_1^{(1)}\hat{Y}_{t+1}]I(\hat{Y}_{t+1} < r) + [\phi_0^{(2)} + \phi_1^{(2)}\hat{Y}_{t+1}]I(\hat{Y}_{t+1} \geq r) + \epsilon_{2,j} \\
\hat{Y}_{t+3}^{(MC)j} &= [\phi_0^{(1)} + \phi_1^{(1)}\hat{Y}_{t+2}]I(\hat{Y}_{t+2} < r) + [\phi_0^{(2)} + \phi_1^{(2)}\hat{Y}_{t+2}]I(\hat{Y}_{t+2} \geq r) + \epsilon_{3,j} \\
&\vdots \\
\hat{Y}_{t+h}^{(MC)j} &= [\phi_0^{(1)} + \phi_1^{(1)}\hat{Y}_{t+h-1}]I(\hat{Y}_{t+h-1} < r) + [\phi_0^{(2)} + \phi_1^{(2)}\hat{Y}_{t+h-1}]I(\hat{Y}_{t+h-1} \geq r) + \epsilon_{h,j}
\end{aligned}$$

که $\{\epsilon_{i,j}\}$ یک دنبالهٔ نوفهٔ سفید تصادفی با توزیع $N(0,\sigma^2)$ است. مقادیر بالا را به ازاء $j = 1, 2, \ldots, N$ یعنی N بار تولید می‌کنیم. در نهایت پیش‌بینی h گامی مونت کارلو عبارت خواهد بود از:

$$\hat{Y}_{t+h}^{MC} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\hat{Y}_{t+h}^{(MC)j}$$

در مواردی که توزیع ε_t نامعلوم است و نمی‌توان فرض خاصی را در مورد آن در نظر گرفت بهتر است از روش خودگردان استفاده شود. در این روش به جای تولید $\epsilon_{i,j}$ ها از توزیع مفروض، آنها را به تصادف از درون مجموعه خطاهای مدل برآورد شده استخراج می‌کنیم.

۱-۱-۴ مانایی

چان و تانگ (۱۹۸۵) نشان داده‌اند که شرط کافی برای مانایی مدل (۱.۱) عبارت است از:

$$\max_{1\leq j\leq k}\sum_{i=1}^{p_j}|\phi_i^{(j)}| < 1$$

البته این شرط، یک شرط لازم نیست و ممکن است با ایجاد محدودیت کمتر روی پارامترها هم بتوان مانایی را تضمین کرد. مثلا چان و وولفورد (۱۹۸۵) شرایط لازم و کافی برای مانایی یک مدل SETAR با ۲ رژیم و هر رژیم به شکل یک AR(۱) را به دست آورده و نشان داده‌اند که این مدل ماناست اگر و تنها اگر یکی از