مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه - زنجان

توابع تقریباً محدب روی گروه‌های توپولوژیک

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

علی مرصّعی

استاد راهنما: دکتر فرض‌ا... میرزاپور

استاد مشاور: دکتر بهمن مهری

خرداد ماه ۱۳۷۸

چکیده

در این پایان نامه توابع تقریباً محدب را روی گروههای توپولوژیک مطالعه خواهیم کرد. همچنین، قضایای ینسن، برنشتاین—دوچ، استروفسکی، بلومبرگ—سیرپنسکی و مهدی را روی توابع تقریباً محدب میانی در فضاهای برداری توپولوژیک به توابع تقریباً محدب میانی در گروههای توپولوژیک تعمیم خواهیم داد. در نهایت، توابع تقریباً Wright—محدب را در گروههای توپولوژیک تعریف کرده و قضیه‌ای را در مورد آن اثبات می‌کنیم.

بسم اللّه الرّحمن الرّحیم

فهرست مطالب

مقدمه

نظریه توابع محدب با معرفی نامعادله تابعی

$$f\left(\frac{x+y}{۲}\right) \leq \frac{۱}{۲}f(x) + \frac{۱}{۲}f(y)$$

که به نامساوی محدب میانی معروف است، توسط ینسن در سال ۱۹۰۵ شروع شد. ینسن در [۱۲] نشان داد که اگر f یک تابع محدب میانی بر بازه (α,β) باشد و روی آن از بالا کراندار باشد، آن گاه f یک تابع پیوسته می‌باشد و لذا f محدب است. در سال ۱۹۱۵ ف. برنشتاین و ج. دوچ با شرایط ضعیفتری نشان دادند که اگر f محدب میانی روی (α,β) باشد و در یک همسایگی از یک نقطه (α,β) از بالا کراندار باشد، آن گاه f پیوسته می‌باشد و در سال ۱۹۲۹، استروفسکی ثابت کرد که اگر f یک تابع محدب میانی روی (α,β) باشد و روی یک زیر مجموعهٔ با اندازه مثبت از (α,β)، از بالا کراندار باشد، آن گاه f پیوسته است و در سالهای ۱۹۱۹ و ۱۹۲۰، بلومبرگ و سیرپنسکی نشان دادند که اگر f محدب میانی و اندازه پذیر روی (α,β) باشد، آن گاه f پیوسته است. در سال ۱۹۶۴، م. ر. مهدی در [۱۶] نشان داد که اگر f محدب میانی بر (α,β) باشد و در یک زیر مجموعه بئر رسته دوّم از (α,β) از بالا

کراندار باشد، آن گاه f پیوسته می‌باشد. این مفاهیم توسط افراد متعددی روی فضاهای دیگر از جمله فضای اقلیدسی n—بعدی $\mathbf{R}^n$ و فضاهای برداری توپولوژیک دلخواه توسعه داده شد که در این مقوله وارد بحث آنها نخواهیم شد و در صورت علاقمند بودن می‌توان به [۲۲] مراجعه کرد. در رساله حاضر توابع تقریباً محدب را بررسی خواهیم کرد. آغازگر مفهوم توابع تقریباً محدب، Hyers و Ulam بودند که در سال ۱۹۵۲ طی مقاله‌ای [ر.ک. ۱۱] این مفهوم را بصورت زیر معرفی کردند که اگر $S \subset \mathbf{R}^n$ یک مجموعه محدب و ϵ یک ثابت نامنفی و f یک تابع تعریف شده بر S باشد، گوئیم f، «ϵ—محدب» است هر گاه برای هر $x, y \in S$ و هر $\lambda \in [\text{۰}, \text{۱}]$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (\text{۱} - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (\text{۱} - \lambda) f(y) + \epsilon.$$

Hyers و Ulam در مقاله خود طی یک قضیه طولانی نشان دادند که اگر f یک تابع ϵ—محدب بر زیر مجموعه باز و محدب S از $\mathbf{R}^n$ باشد، آن گاه تابع محدب ϕ چنان موجود است که برای هر $x \in S$،

$$|\phi(x) - f(x)| \leq \frac{n^{\text{۲}} + \text{۳}n}{\text{۴}n + \text{۴}}\epsilon.$$

همین تعریف از توابع تقریباً محدب، در سال ۱۹۹۳ توسط C. T. Ng و K. Nikodem به روی فضاهای برداری توپولوژیک تعمیم داده شد [ر.ک. ۲۱]، که خلاصه‌ای از این کارها را در رساله خواهیم دید.

در سال ۱۹۹۷، دکتر شادمان و دکتر میرزاپور در مقاله‌ای مشترک که در Proc. AMS مورد پذیرش قرار گرفت، توابع محدب میانی را روی گروه‌های توپولوژیک تعمیم دادند.

من نیز با توجه به علاقه‌ای که به مطالعه گروه‌های توپولوژیک و توابع محدب داشتم، پس از کار دکتر شادمان و دکتر میرزاپور و دیدن کارهای Hyers، Ulam، Ng و Nikodem، بر آن شدم که توابع تقریباً محدب را تحت راهنمایی دکتر میرزاپور به روی گروه‌های توپولوژیک تعمیم دهم که در این راه از راهنماییهای ارزنده دکتر میرزاپور و تشویق‌ها و کمکهای دکتر مهری کمال استفاده را برده‌ام که در همین جا از این اساتید محترم کمال تشکر را دارم.

رساله بصورت زیر سازماندهی شده است:

۱. در فصل اوّل با مختصری از برخی خواص فضاهای توپولوژیک و گروه‌های توپولوژیک آشنا شده و توابع محدب میانی را روی بازه‌های باز از $\mathbf{R}$ مطرح می‌کنیم و در بخش آخر فصل، این توابع را روی فضاهای برداری با توپولوژی نیم خطی بررسی می‌کنیم.

۲. فصل دوّم به بررسی توابع تقریباً محدب روی فضاهای اقلیدسی $\mathbf{R}^n$ و فضاهای برداری توپولوژیک اختصاص دارد.

۳. در فصل سوّم، تعمیم توابع تقریباً محدب میانی و تقریباً محدب را روی گروه‌های توپولوژیک خواهیم دید و دو قضیه مهم برنشتاین—دوچ و استروفسکی را در آن ثابت خواهیم کرد.

۴. فصل چهارم به تعمیم قضایای بلومبرگ—سیرپنسکی و مهدی در گروه‌های توپولوژیک اختصاص دارد و در آخر این فصل، تعریف توابع تقریباً Wright—محدب را در گروه‌های توپولوژیک و اثبات یک قضیه در مورد آن را خواهیم دید.

نتیجه حاصل از این رساله، دو مقاله زیر است که به صورت ضمیمه در آخر رساله می‌آید:

1. A. Morassaei and Y. Alizadeh, *Approximately convex functions on locally compact topological groups*, (submitted to A Quarterly of the Hungarian Academy of Sciences).

2. F. Mirzapour and A. Morassaei, *Theorems of Blumberg-Sierpinski and Mehdi and approximately Wright-convex functions*, (submitted to J. London Math. Soc.).

علی مرصّعی

خرداد ماه ۱۳۷۸

فصل اوّل

مقدّمات

در فصل حاضر، سعی بر این است که مقدمات لازم را برای فصول آینده جمع آوری کنیم. این فصل شامل چهار بخش به صورت زیر می‌باشد؛ بخش اول، به یادآوری و بررسی مختصری از برخی خواص فضاهای توپولوژیک از جمله مجموعه‌هایی از رسته اول و دوم، مجموعه‌هایی با خاصیت بئر و ... می‌پردازد، که در این زمینه برای دیدن مطالب بیشتر می‌توان به [۱۴] و [۱۵] مراجعه نمود. در بخش دوم، کلیاتی از گروههای توپولوژیک و نیم توپولوژیک و مفاهیم اندازه هار چپ و راست و تابع کالبد مورد بحث می‌باشند. در بخش سوم، توابع محدب میانی و قضایای مهم مربوط به آنها روی فضای اقلیدسی $\mathbf{R}$ مرور می‌شوند. در بخش چهارم، مختصری در مورد توابع محدب میانی روی فضاهای برداری با توپولوژی نیم خطی بحث و چند قضیه اساسی را همراه با اثبات می‌آوریم.

۱. فضاهای توپولوژیک

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های باز نسبت به $S = \cup_{\alpha\in I} S_\alpha$ باشد. اگر هر S_α از رسته اول باشد، در آنصورت دیده می‌شود که S نیز از رسته اول است [ر.ک. ۱۴]. این مطلب در اثبات گزاره‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد. البته اثبات گزاره‌های بعدی را در این مقوله نمی‌گنجانیم و برای دیدن اثباتی از آنها می‌توان به [۱۴] مراجعه کرد.

تعریف ۱. فرض کنیم $S \subset X$ باشد. گوئیم S **دارای خاصیت بئر است** هرگاه

$$S = (G \setminus P) \cup R$$

که G باز و P و R مجموعه‌هایی از رسته اول می‌باشند.

تعریف ۲. مجموعه $S \subset X$ را **در نقطه x از رسته اول** نامیم هرگاه همسایگی G_x از x چنان موجود باشد که $G_x \cap S$ از رسته اول باشد. مجموعه همه نقاطی از X را که در S از رسته اول نمی‌باشند را با $D(S)$ نمایش می‌دهیم، پس

$$D(S) = \{x \in X \ : \ \forall G_x \ , \ \text{از رسته دوّم است } G_x \cap S\}.$$

مجموعه $D(S)$ دارای خواص زیر می‌باشد:

(الف) $S \subset X$ از رسته اول است اگر و تنها اگر $D(S) = \emptyset$.

(ب) هرگاه $S_1 \subseteq S_2$ باشد، آنگاه $D(S_1) \subseteq D(S_2)$.

(ج) برای هر زیرمجموعه S_1 و S_2 از X، $D(S_1 \cup S_2) = D(S_1) \cup D(S_2)$.

(د) برای هر خانواده دلخواه $\{S_\alpha\}$،

$$D(\cap_\alpha S_\alpha) \subseteq \cap_\alpha D(S_\alpha)$$

$$\cup_\alpha D(S_\alpha) \subseteq D(\cup_\alpha S_\alpha)$$

(ه) $D(S_1) \setminus D(S_2) \subseteq D(S_1 \setminus S_2)$.

(و) هرگاه $G \subset X$ باز باشد، آن گاه $G \cap D(S) = G \cap D(G \cap S)$.

(ز) هرگاه $S \subset X$ باشد، آن گاه $D(D(S)) = D(S)$.

(ح) برای $S \subset X$، $D(S \setminus D(S)) = \emptyset$؛ یعنی $S \setminus D(S)$ از رسته اول است.

(ط) S دارای خاصیت بئر است اگر و تنها اگر $D(S) \setminus S$ از رسته اول باشد.

(ی) $D(S)$ بسته است.

(ک) $D(S) \subseteq \overline{S}$.

(ل) $D(S) = \overline{intD(S)}$.

(م) اگر $S_۱$ از رسته اول باشد و $S_۱ \cap S_۲ = \emptyset$، آن گاه $intD(S_۱) \cap intD(S_۲) = \emptyset$.

(ن) اگر X یک فضای برداری توپولوژیک باشد و $S \subset X$ و $a \in X$ و $\lambda \in \mathbf{R}$ آن گاه

$$D(\lambda S + a) = \lambda D(S) + a.$$

در مورد فضاهای توپولوژیک به مطالب فوق بسنده می‌کنیم. این مطالب در بخش ۲ و در اثبات قضیه مهدی کاربرد خواهند داشت.

۲. گروه‌های توپولوژیک

گروه G را همراه با یک توپولوژی، که یک فضای توپولوژیک می‌باشد، یک **گروه توپولوژیک** خوانیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(الف) نگاشت $(x, y) \mapsto xy$ از $G \times G$ به روی G نگاشتی پیوسته باشد.

(ب) نگاشت $x \mapsto x^{-۱}$ از G به روی G پیوسته باشد.

در این بخش برخی از خواص گروه‌های توپولوژیک را که در فصلهای بعد مورد استفاده خواهد بود، یادآوری می‌کنیم. در این خصوص برای مطالب بیشتر به [۵] و [۱۰] مراجعه کنید.

فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک و Φ فیلتر تمام همسایگی‌های عضو خنثی e باشد. خواص زیر را برای گروه توپولوژیک G داریم:

(الف) اگر گروه توپولوژیک G هاسدورف باشد، آنگاه برای هر $x \neq e$، $U \in \Phi$ چنان موجود است که $x \notin U$.

(ب) برای هر $U, V \in \Phi$، یک $W \in \Phi$ چنان موجود است که $W \subseteq U \cap V$.

(ج) برای هر $U \in \Phi$، یک $V \in \Phi$ هست که $V^{-1}V \subseteq U$ و $V^{2} \subseteq U$.

(د) برای هر $U \in \Phi$ و هر $x \in G$ یک $V \in \Phi$ موجود است که $V \subseteq x^{-1}Ux$.

(ه) برای هر $U \in \Phi$ و هر $x \in U$، $V \in \Phi$ چنان موجود است که $Vx \subseteq U$.

(و) هرگاه $U \subset G$ یک مجموعه باز باشد و $x \in G$، آن گاه Ux و xU نیز در G باز می‌باشند.

(ز) فرض کنیم A و B دو زیر مجموعه از G باشند. اگر A یا B باز باشند، آن گاه AB و BA باز می‌باشند. اگر A و B فشرده باشند، آن گاه AB و BA نیز فشرده‌اند. اگر A بسته و B فشرده باشد، آن گاه AB و BA بسته‌اند.

(ح) G دارای پایه‌ای باز در e متشکل از همسایگی‌های متقارن می‌باشد.

(ط) برای هر همسایگی U از e، همسایگی V از e چنان موجود است که $\overline{V} \subseteq U$.

تبصره ۱. با توجه به اینکه نگاشت $x \mapsto x^{2}$ پیوسته می‌باشد، در نتیجه برای هر مجموعه باز V از G، مجموعه

$$V^{\frac{1}{2}} = \{x \in G \ : \ x^{2} \in V\}$$

یک مجموعه باز می‌باشد.

در ادامه مباحث این بخش، مطالبی را در مورد اندازه هار یادآوری می‌کنیم.

فرض کنیم G یک گروه (نه لزوماً گروه توپولوژیک) و E یک مجموعه ناتهی و f تابعی با دامنه G و برد مشمول در E باشد. $a \in G$ را ثابت در نظر بگیرید. فرض کنیم $\ell_a f$ $(r_a f)$ تابعی روی G باشد که برای هر $x \in G$، $(\ell_a f)(x) = f(ax)$ $((r_a f)(x) = f(xa))$. در آنصورت $\ell_a f$ $(r_a f)$، **انتقال چپ (راست) از f بوسیله** a نامیده می‌شود. تابع f^* را نیز روی G به صورت زیر در نظر می‌گیریم که برای هر $x \in G$، $f^*(x) = f(x^{-1})$.

تذکر ۱. اگر G یک گروه توپولوژیک باشد در اینصورت $\mathcal{C}(G)$ را برای مجموعه همه توابع حقیقی پیوسته کراندار بر G به کار خواهیم برد. $\mathcal{C}_c(G)$ عبارتست از مجموعه همه توابع حقیقی پیوسته بر G که دارای محملی فشرده می‌باشند و $\mathcal{C}_0(G)$ بنا به تعریف، عبارتست از مجموعه تمام توابع حقیقی پیوسته بر G چنان که برای هر $\epsilon > 0$، مجموعه فشرده K از G موجود می‌باشد بطوری که

$$\forall x \in G \setminus K, \quad |f(x)| < \epsilon$$

و نیز یادآوری می‌کنیم که نمادهای $\mathcal{C}^+(G)$ و $\mathcal{C}_c^+(G)$ و $\mathcal{C}_0^+(G)$ را به ترتیب برای توابع حقیقی نامنفی با خواص فوق به کار خواهیم برد.

اکنون فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک موضعاً فشرده باشد. در [۱۰] نشان داده شده است که تابعک $I \in \mathcal{C}_c^+(G)$ چنان موجود است که

(الف) $I(f)$ حقیقی و مثبت است.

(ب) برای هر $f, g \in \mathcal{C}_c^+(G)$، $I(f+g) = I(f) + I(g)$.

(ج) برای هر $\alpha > 0$ و هر $f \in \mathcal{C}_c^+(G)$، $I(\alpha f) = \alpha I(f)$.

(د) برای هر $\alpha > 0$ و هر $f \in \mathcal{C}_c^+(G)$، $I(\ell_a f) = I(f)$؛ یعنی آنکه I یک تابعک ناوردای چپ می‌باشد.

علاوه بر این، هر گاه J هر تابعک نامنفی روی $\mathcal{C}_c(G)$، صادق در شرایط (ب) تا (د) باشد آن گاه ثابتی چون $c > 0$ موجوداست که $J = cI$ [ر.ک. ۱۰]. I بدست آمده در بالا را **انتقگرال هار چپ** روی G می‌نامند.

اکنون فرض کنیم که همه شریط بالا برقرار بوده و U یک زیر مجموعه باز ناتهی از G باشد. تعریف می‌کنیم

$$\mu(U) = \overline{\overline{I}}(\chi_U)$$

که در آن

$$\overline{\overline{I}}(\chi_U) = \inf\{\overline{I}(f) : \chi_U \leq f \text{ و } f \text{ نیم پیوسته پایین در } G \text{ می‌باشد}\}$$
$$\overline{I}(f) = \sup\{I(g) : g \leq f\ ,\ g \in \mathcal{C}_c^+(G)\} \text{ و}$$

و χ_U تابع مشخصه روی مجموعه باز U می‌باشد. می‌توان نشان داد که μ بدست آمده در بالا، یک اندازه روی G است که دارای خواص زیر می‌باشد:

(الف) برای هر زیر مجموعه باز ناتهی U، $\mu(U) > ۰$.

(ب) برای $E \subset G$ و هر $a \in G$، $\mu(aE) = \mu(E)$، یعنی μ یک اندازه ناوردای چپ می‌باشد.

تعریف ۳. اندازه μ ساخته شده در بالا را **اندازه هار ناوردای چپ** می‌نامند. بعبارت دیگر، اندازه برل منظم μ را روی گروه توپولوژیک موضعا فشرده G، اندازه هار ناوردای چپ نامیم هرگاه در شرایط بالا صادق باشد [ر.ک. ۱۰ ,۷].

مثال. گروه $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R}^+, y \in \mathbf{R} \right\}$ با عمل ضرب ماتریس‌ها یک گروه توپولوژیک است که بطور توپولوژیکی با نیم صفحه بالایی $\mathbf{R}^۲$ همئومورفیسم بوده و لذا موضعاً فشرده می‌باشد. هرگاه $E \subset G$ یک مجموعه برل باشد، اندازه هار چپ و راست به صورت زیر قابل تعریف می‌باشند

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \int\int_E \frac{dxdy}{x^۲} \\ \nu(E) &= \int\int_E \frac{dxdy}{x} \end{aligned}$$

که انتگرالها نسبت به اندازه لبگ روی نیم صفحه بالایی $\mathbf{R}^۲$ گرفته شده‌اند. چون $\mu(E^{-۱}) = \nu(E)$، این مثال نشان می‌دهد که ممکن است مجموعه برلی چون E باشد که $\mu(E) < \infty$ ولی $\nu(E) = \infty$ [ر.ک. ۱۷].

همان طوری که در مثال بالا دیدیم، در حالت کلی هیچ رابطه‌ای بین اندازه هار چپ و راست وجود ندارد، اما اگر $\mu_۱$ و $\mu_۲$ دو اندازه هار چپ روی G باشند، آن گاه $c > ۰$ وجود دارد که $\mu_۱ = c\mu_۲$.

قضیه ۱. **فرض کنیم G گروهی موضعا فشرده و I انتگرال هار چپ روی $\mathcal{C}_c(G)$ باشد. برای $۰ \neq f \in \mathcal{C}_c^+(G)$ و برای $x \in G$، تعریف می‌کنیم**

$$\Delta(x) = \frac{I(r_{x^{-۱}}f)}{I(f)}.$$

در این صورت $\Delta : G \longrightarrow \mathbf{R}^+$ فقط تابعی از x است و به I و f بستگی ندارد و یک همریختی پیوسته از گروه G به گروه ضربی $\mathbf{R}^+$ می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $x \in G$ باشد. تابعک J_x را روی $\mathcal{C}_c^+(G)$ بصورت زیر در نظر می‌گیریم

$$J_x : C_c^+(G) \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$J_x(f) = I(r_{x^{-۱}}f)$$

J_x یک انتگرال هار چپ روی $\mathcal{C}_c(G)$ می‌باشد، در نتیجه بنا به تذکر فوق، ضریب ثابت مثبتی مانند $\Delta(x)$ که فقط به x بستگی دارد چنان موجود است که

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^+(G)\ ;\ J_x(f) = \Delta(x)I(f)$$

با توجه به این که $\Delta(x) = \frac{I(r_{x^{-۱}}f)}{I(f)}$ واضح است که Δ به I بستگی ندارد. اکنون برای هر $x, y, u \in G$ داریم

$$r_{y^{-۱}}(r_{x^{-۱}}f)(u) = (r_{x^{-۱}}f)(uy^{-۱}) = f(uy^{-۱}x^{-۱}) = f(u(xy)^{-۱}) = (r_{(xy)^{-۱}}f)(u)$$

بنا بر این خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= \frac{I(r_{(xy)^{-۱}}f)}{I(f)} = \frac{I(r_{y^{-۱}}(r_{x^{-۱}}f))}{I(r_{x^{-۱}}f)} \times \frac{I(r_{x^{-۱}}f)}{I(f)} \\ &= \Delta(y).\Delta(x) = \Delta(x).\Delta(y)\end{aligned}$$

اکنون نشان می‌دهیم که Δ پیوسته است. از آنجا که Δ یک همریختی است، کافی است پیوستگی Δ را در e بررسی کنیم. فرض کنیم U یک همسایگی از e باشد بطوریکه $\overline{U}$ فشرده است و فرض کنیم f تابع

ناصفری در $\mathcal{C}_c^+(G)$ باشد. فرض کنیم φ تابعی در $\mathcal{C}_c(G)$ باشد که

$$\varphi\left(\overline{\{s \in G : f(s) > 0\}.\overline{U}}\right) = 1.$$

فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد. در این صورت همسایگی V از e چنان موجود است که $V \subseteq U$ و برای $u, v \in G$ که $u^{-1}v \in V$،

$$|f(u) - f(v)| < \frac{\epsilon I(f)}{I(\varphi)}.$$

در این صورت اگر $x \in V$ خواهیم داشت

$$\forall s \in G, \quad |f(sx^{-1}) - f(s)| \leq \frac{\epsilon I(f)}{I(\varphi)}\varphi(s)$$

و بنابراین

$$|I(r_{x^{-1}}f) - I(f)| \leq \epsilon I(f)$$

در نتیجه $|\Delta(x) - 1| \leq \epsilon$. □

تعریف ۴. تابع Δی ساخته شده در قضیه قبل، **تابع کالبد** از گروه موضعاً فشرده G نامیده می‌شود. اگر $\Delta = 1$ باشد، آن گاه G **تک کالبدی** نامیده می‌شود. توجه کنیم که $\Delta = 1$ اگر و تنها اگر کلاس انتگرالهای هار چپ و راست یکسان باشند. لذا بدیهی است که هر گروه آبلی موضعاً فشرده، تک کالبدی است و نیز هر گروه فشرده تک کالبدی می‌باشد[ر.ک. ۱۰].

قضیه ۲. **فرض کنیم I یک انتگرال هار چپ روی گروه موضعاً فشرده G باشد. در این صورت برای هر $f \in \mathcal{C}_c^+(G)$،**

$$I(f) = I\left(\frac{1}{\Delta}f^*\right).$$

برهان. قرار می‌دهیم $J(f) = I\left(\frac{1}{\Delta}f^*\right)$، در نتیجه برای $a \in G$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
J(\ell_a f) &= I\left[\frac{1}{\Delta}(\ell_a f)^*\right] = I\left[\frac{1}{\Delta}(r_{a^{-1}}f^*)\right] \\
&= \frac{\Delta(a^{-1})}{\Delta(a^{-1})} I\left[\frac{1}{\Delta}(r_{a^{-1}}f^*)\right] = \Delta(a^{-1}) I\left[\frac{1}{\Delta(a^{-1})\Delta}(r_{a^{-1}}f^*)\right] \\
&= \Delta(a^{-1}) I\left[\frac{1}{r_{a^{-1}}\Delta}(r_{a^{-1}}f^*)\right] = \Delta(a^{-1})\Delta(a) I\left(\frac{1}{\Delta}f^*\right) \\
&= I\left(\frac{1}{\Delta}f^*\right) = J(f)
\end{aligned}$$