بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گرایش کاربردی

کاربرد تبدیلات انتگرالی در حل معادلات انتگرال منفرد و معادلات با مشتقات جزیی کسری

(کارشناسی ارشد)

از:

فرشاد نقی یاسوری

استاد راهنما:

دکتر آرمان عقیلی

اردیبهشت ۹۱

تقدیم به

همسرم

و

پسرم سینا

که تمام وجودشان مهر به من است

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

حمد وسپاس بی‌پایان خداوند متعال که توفیق انجام این پژوهش را به من ارزانی داشت. بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای دلسوز و بزرگوارم جناب آقای دکتر آرمان عقیلی که صبر و حوصله ایشان در انجام این مطالعه و تحقیق برای من درسی عظیم بود و بدون راهنمایی‌های علمی و مساعدت همه‌جانبه‌ی ایشان رسیدن به این نقطه امکان‌پذیر نبود، کمال قدردانی را بعمل آورم.

از استادان بزرگوار جناب آقای دکتر حسین پناهی و سرکار خانم دکتر کامله نصیری که به عنوان داور زحمت بازخوانی پایان نامه را بر عهده داشته و نظرات ارزنده‌ای در هرچه بهتر شدن آن ارائه نمودند، سپاسگذارم.

همچنین از کلیه استادان گروه ریاضی که در مدت دوره کارشناسی ارشد زحمات فراوانی برای اینجانب کشیده اند و مطالب علمی و اخلاقی بسیاری از ایشان آموخته‌ام، تشکر می‌نمایم

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

۳. فصل سوم

کاربرد تبدیلات انتگرالی در حل معادلات انتگرال منفرد و معادله‌ی حرارت با مشتق کسری نسبت به زمان و دستگاه معادلات تأخیری

۴. فصل چهارم

معرفی تبدیل L_A و حل معادله دیفیوژن کشی از مرتبه‌ی کسری زمان

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

چکیده

عنوان پایان‌نامه: کاربرد تبدیلات انتگرالی در حل معادلات انتگرال منفرد و معادلات با مشتقات جزیی کسری

نگارنده: فرشاد نقی یاسوری

در این پایان نامه پاسخی براساس جملاتی از تابع رایت، برای تعمیم یافته‌ی معادله‌ی دیفیوژن کسری کشی با استفاده از تبدیل انتگرالی $\mathcal{L}_A$ ارائه می‌شود. همچنین برای تعمیم معادله‌ی آشفتگی کسری کشی با توزیع گسسته یا پیوسته با مشتق کسری زمان با بکار بردن تبدیل انتگرالی $\mathcal{L}_A$ پاسخی حاصل شده‌است. بنابراین در فصل اول به معرفی تبدیلات انتگرالی لاپلاس و $\mathcal{L}_2$ پرداخته می‌شود. در فصل دوم توابع خاص از جمله تابع‌های رایت و H–فوکس بررسی می شوند. در فصل سوم برخی معادلات انتگرال منفرد حل می‌شوند که در جواب آنها تابعهای خاص دیده می‌شوند و در فصل آخر مسایلی از نوع کشی حل شده اند.

کلید واژه: معادله‌ی دیفیوژن کشی، تبدیل انتگرالی لاپلاس، تبدیل انتگرالی $\mathcal{L}_A$ ، تابع H–فوکس

پیشگفتار

با توجه به گسترش علوم در زمینه‌های مختلف مانند فیزیک، مکانیک، فنی و مهندسی وسایر شاخه‌ها لازم است که بتوان از پدیده‌های طبیعی مدلی مناسب‌تر و منطبق‌تر طراحی نمود. همچنین می‌دانیم مدلسازی یک پدیده فیزیکی یا فنی و ... منجر به ارائه یک معادله‌ی دیفرانسیل یا انتگرال می‌شود در نتیجه لازم است راه‌های حل این‌گونه از معادلات را بشناسیم. به دلیل نوع پدیده‌های فیزیکی، فنی و مهندسی، هر مسئله دارای شرایط اولیه و مرزی می‌باشد که به تناسب معادلات مربوط به آنها را به نام مسائل مقدار مرزی یا مقدار اولیه می‌شناسیم.

یکی از روشهای حل مسائل مقدار مرزی و اولیه استفاده از تبدیل انتگرالی لاپلاس و تبدیلاتی مانند آن می‌باشد. این تبدیل در اغلب کتب معادلات دیفرانسیل مقدماتی معرفی شده است.

با معرفی مشتقات کسری توسط ریمان – لیوویل[1] و کاپوتو[2] دانشمندان برآن شدند تا معادلات دیفرانسیل و انتگرال را با این مشتقات ترکیب کرده تا بدین وسیله مدلی مناسب‌تر و منطبق‌تر با پدیده فیزیکی بسازند. در این زمان سوال جدیدی طرح گردید ، «آیا این معادلات جدید با روشهای قبل قابل حل هستند؟» بنابراین بسیاری تلاش کردند روشهای قبلی و معمول را ارتقاء دهند و در این میان روشهای جدیدی هم گاهی ایجاد گردید.اجازه دهید ابتدا خیلی مختصر چند تعریف را مرور نماییم.

معادله‌دیفرانسیل معمولی یا با مشتقات جزئی شامل یک تابع و مشتقات معمولی یا جزئی از مراتب طبیعی می‌باشد در معادلات انتگرال هم یک تابع مجهول در انتگرالده در داخل نماد انتگرال قرار می‌گیرد حال اگر در معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مشتقات کسری تابع را قرار دهیم یک معادله با مشتقات کسری داریم و اگر در معادله انتگرال مشتقات تابع مجهول را چه از مرتبه‌ی معمولی یا کسری قرار دهیم با یک معادله‌ی انتگرال دیفرانسیل روبرو هستیم.

وقتی تعمیم و تعریفهای جدید از مشتق و معادلات دیفرانسیل و انتگرال معرفی شد در راه حل آنها هم توابع فوق هندسی و نظریه‌ی آنها مشاهده گردید بنابراین دیده می‌شود که چگونه چند شاخه ظاهرا مجزا از ریاضیات بهم مرتبط می‌شوند که در این راستاتوسعه‌ی مشتق از مراتب معمولی به مراتب کسری، توسعه‌ی معادلات دیفرانسیل و انتگرال به معادلات با مشتقات کسری ، ارائه روشهای تعمیم یافته و جدید برای حل آنها و توابع فوق هندسی و نظریه آن را می توان برشمرد.

[1] Riemann-Liouvill
[2] Caputo

همانطور که بیان شد، وقتی معادلات تعمیم پیدا کردند باید روشهای آنها هم تعمیم یابند تا بتوان معادلات را حل نمود و یکی از روشهای کارآمد برای حل معادلات با مشتقات کسری تبدیل انتگرالی لاپلاس و تعمیم‌های آن می باشد. در این تعمیم ضرایب هم از حالت ثابت به ضرایب غیر ثابت تغییر یافتند لذا روشهای جدید باید توانایی حل معادلات با ضرایب غیرثابت را داشته باشند.برای حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال با مشتقات کسری با ضرایب غیر ثابت تبدیل لاپلاس به راحتی و تنهایی قادر به حل مسأله نیست حتی در مورد معادله‌ی معروف بسل تبدیل لاپلاس به سختی راه حلی ارائه می‌نماید لذا برای حل این مشکل خانواده‌ای از تبدیلات انتگرالی بر پایه تبدیل لاپلاس معرفی شدند.

در زمینه این تغییر و تحولات در معادلات و تعمیم آنها دو معادله و مسأله زیر معرفی می‌شوند یکی بررسی معادله دیفیوژن کشی روی فراکتالها که بوسیله‌ی جیونا[1] و رومن[2] [۱۷،۱۸] معرفی گردید و دیگری بررسی آشفتگی در یک محیط لزج و چسبناک که بوسیله‌ی شانکار[3] [۳۶] مطرح شد. این مسائل به کمک تبدیلات انتگرالی از خانواده‌ی لاپلاس به نام L_2 و L_A حل می‌شوند و در پاسخها ما شاهد ظهور توابع خاص و تعمیم‌یافته فوق هندسی هستیم.

بنابراین در این پایان‌نامه تبدیلات انتگرالی لاپلاس و L_2 بررسی و از آنها در حل و یافتن پاسخ چند انتگرال و معادله‌ی انتگرالی استفاده می‌شود و با معرفی توابع فوق هندسی و مشتقات کسری ریمان–لیوویل و کاپوتو به بررسی و تعمیم و حل معادلات انتگرالی منفرد با هسته‌های متفاوت پرداخته می‌شود و می‌بینیم که توابع فوق هندسی در این پاسخها خود را نشان می‌دهند سپس با تعمیم تبدیل انتگرالی لاپلاس به تبدیل انتگرالی L_A و ارائه‌ی ویژگیهای آن به بررسی و حل تعمیم یافته‌ی دو مسأله‌ی فوق پرداخته می‌شود.

[1] Giona
[2] Roman
[3] Shankar

۱. تبدیلات انتگرالی لاپلاس و L_2

۱-۱ تبدیل لاپلاس

۱-۲ وارون تبدیل لاپلاس

۱-۳ تبدیل لاپلاس و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

۱-۴ تبدیل انتگرالی L_2

مقدّمه :

تبدیلات انتگرالی روشی برای حل معادلات دیفرانسیل با مقادیر اولیه و شرایط مرزی ارائه می‌نمایند. تبدیل لاپلاس اولین بار توسط پیر لاپلاس در یکی از کارهایش برروی نظریه‌ی احتمالات معرفی شد. در فیزیک و مهندسی از این تبدیل برای تحلیل سیستمهای پایدار زمانی خطی مانند مدارهای الکتریکی و سیگنالها و سیستمهای مکانیکی استفاده می‌شود. بطور ساده اگر سیستمی داشته‌باشید که توصیف ریاضی آن یعنی توابع ورودی و خروجی آن معلوم باشد تبدیل لاپلاس آن به ما کمک می‌کند تا تابع جایگزینی پیدا کنیم که تحلیل رفتار این تابع را آسانتر سازد. در این فصل به دو تبدیل انتگرالی لاپلاس و L_2 پرداخته و روابط و کاربردهای آنها را معرفی می‌نماییم.

۱-۱ : تبدیل لاپلاس

تعریف(۱-۱-۱) : اگر $f(t)$ تابعی باشد که برای $t \geq 0$ تعریف شده است در اینصورت تبدیل لاپلاس آن بصورت زیر تعریف می‌شود

$$L\{f(t);s\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \quad . \blacksquare$$

قضیه (۱-۱-۲) : وجود تبدیل لاپلاس

اگر تابع f روی هر بازه متناهی $(0,t_0)$ بطور قطعه‌ای پیوسته و برای $t \geq t_0$ از مرتبه‌ی نمایی α باشد تبدیل لاپلاس تابع برای $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ وجود دارد و بطور مطلق همگراست[۱].

اثبات : تابع f از مرتبه‌ی نمایی α است یعنی اعداد ثابت α و M حقیقی و مثبت وجود دارند که $|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \quad , t \geq t_0$ و بدلیل بطور قطعه‌ای پیوسته بودن می‌توان M را به اندازه کافی بزرگ گرفت و بیان کرد برای هر t ، تابع f از مرتبه‌ی نمایی α می باشد. در اینصورت

$$\left|L\{f(t);s\}\right| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt\right| \le \int_0^{+\infty} e^{-st}\left|f(t)\right|dt \le M\int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t}dt$$

بدلیل اینکه $\operatorname{Re}(s) > \alpha$ انتگرال سمت راست بصورت $M\int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t}dt = -\frac{Me^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha}\Big|_0^{+\infty} = \frac{M}{s-\alpha}$ محاسبه شده

در نتیجه انتگرال تبدیل لاپلاس وجود دارد و بطور مطلق همگرا است.■

در هر کتاب معادلات دیفرانسیل معمولی می‌توان خواص و ویژگیها و مثالهای فراوانی از این تبدیل انتگرالی یافت. در اینجا چندین مورد مهم تر را بیان می کنیم.

مثال (۱–۱–۳): تبدیل لاپلاس دو تابع $f(t) = \sinh at$ و $g(t) = \sin at$ بترتیب $F(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$و $G(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$ می‌باشند .

قضیه (۱–۱–۴): اگر تابع f روی بازه $[0,t_0]$ پیوسته و برای $t \ge t_0$ ، از مرتبه‌ی نمایی $e^{\alpha t}$ و f' هم تابعی از مرتبه‌ی نمایی و بطور قطعه ای پیوسته باشد و $L\{f(t);s\} = F(s)$ آنگاه $L\{f'(t);s\} = sF(s) - f(0)$. [۱]

قضیه (۱–۱–۵): با فرض اینکه توابع f و f' هر دو در بازه $[0,t_0]$ پیوسته و برای $t \ge t_0$ از مرتبه‌ی نمایی باشند و تابع f'' روی این بازه بطور قطعه‌ای پیوسته باشد داریم $L\{f''(t);s\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$.[۱]

قضیه (۱–۱–۶): با فرض اینکه توابع f و f' الی $f^{(n-1)}$ در بازه $[0,t_0]$ پیوسته و برای $t \ge t_0$ از مرتبه‌ی نمایی باشند و تابع $f^{(n)}$ روی این بازه بطور قطعه‌ای پیوسته باشد داریم

$$L\{f^{(n)}(t);s\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)\text{.[۱]}$$

قضیه (۱–۱–۷): اگر $L\{f(t);s\} = F(s)$ در اینصورت $L\{e^{at}f(t);s\} = F(s-a)$.[۱]

قضیه (۱–۱–۸): اگر $L\{f(t);s\} = F(s)$ آنگاه $L\{\int_0^t f(u)du;s\} = \frac{F(s)}{s}$.[۱]

قضیه (۱–۱–۹): اگر $L\{f(t);s\} = F(s)$ آنگاه $L\{t^n f(t);s\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)$ برای $n = 1,2,3,\ldots$.[۱]

اثبات :برای اثبات قضیه می‌توان از استقراء استفاده کرد. در ضمن از قضیه لایبنیتز[1] کمک می‌گیریم.گام اول اثبات را انجام داده برای سایر مراحل استقرا خواننده را به [۱] ارجاع می دهیم.

$$F'(s)=\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}e^{-st}f(t)dt$$

$$=-\int_0^{+\infty}te^{-st}f(t)dt=-L\{tf(t);s\}\Rightarrow L\{tf(t);s\}=-F'(s)\,.\ \blacksquare$$

قضیه (۱–۱–۱۰): اگر تابع $f(t)$ در شرایط قضیه (۱–۲) صدق کرده و $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{t}$ موجود باشد و $L\{f(t);s\}=F(s)$ آنگاه $L\{\frac{f(t)}{t};s\}=\int_s^{+\infty}F(u)du$.[۱]

قضیه(۱–۱–۱۱):اگر $L\{f(t);s\}=F(s)$ آنگاه برای $b>0$ ، $L\{f(bt);s\}=\frac{1}{b}F(\frac{s}{b})$.[۱]

مثال (۱–۱–۱۲): محاسبه لاپلاس تابع $f(t)=\int_0^t\frac{\sin u}{u}du$

بنا به قضیه (۱–۱–۱۰) داریم:

$$L\{\frac{\sin t}{t};s\}=\int_s^{+\infty}L\{\sin t;u\}du=\int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}du=\tan^{-1}(\frac{1}{s})$$

حال از قضیه (۱–۱–۸) استفاده می‌کنیم.

$$L\{\int_0^t\frac{\sin u}{u}du;s\}=\frac{1}{s}L\{\frac{\sin t}{t};s\}=\frac{1}{s}\tan^{-1}(\frac{1}{s})\ \blacksquare$$

مثال (۱–۱–۱۳) : مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

الف) $\int_0^{+\infty}t^2.J_0(t)dt=-1$

برای این انتگرال ابتدا لاپلاس تابع $J_0(t)$ را بدست می‌آوریم که $F(s)=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ می‌باشد.[۲۳].حالا از تعریف

[1] Leibniz

تبدیل لاپلاس نسبت به s دو بار مشتق می‌گیریم.

$$L\{J_0(t);s\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}J_0(t)dt=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial s}\int_0^{+\infty}e^{-st}J_0(t)dt=\frac{-s}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}-te^{-st}.J_0(t)dt=\frac{-s}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^{+\infty}-te^{-st}.J_0(t)dt=\frac{d}{ds}(\frac{-s}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}})\Rightarrow\int_0^{+\infty}t^2e^{-st}.J_0(t)dt=\frac{2s^2-1}{(s^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\xrightarrow{s=0}\int_0^{+\infty}t^2.J_0(t)dt=-1\ \blacksquare$$

ب) $\int_0^{+\infty}e^{-t}Erf(\sqrt{t})dt=\frac{\sqrt{2}}{2}$

برای محاسبه‌ی این انتگرال ابتدا لاپلاس تابع $f(t)=Erf(\sqrt{t})=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-u^2}du$ را بدست می‌آوریم که

عبارت $F(s)=\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$ می‌شود.حال در این تعریف لاپلاس مقدار $s=1$ را جایگذاری می‌کنیم

$$f(t)=Erf(\sqrt{t})=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-u^2}du\Rightarrow L\{f(t);s\}=\int_{t=0}^{+\infty}e^{-st}Erf(\sqrt{t})dt$$

$$=\int_{t=0}^{+\infty}e^{-st}(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{u=0}^{\sqrt{t}}e^{-u^2}du)dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{u=0}^{+\infty}e^{-u^2}du(\int_{t=u^2}^{+\infty}e^{-st}dt)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Re}(s)>0}L\{f(t);s\}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\frac{-1}{s})\int_0^{+\infty}e^{-(1+s)u^2}du\xrightarrow{\sqrt{1+s}u=w}$$

$$L\{f(t);s\}=(\frac{1}{s})\frac{1}{\sqrt{1+s}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-w^2}dw=(\frac{1}{s})\frac{1}{\sqrt{1+s}}$$

$$\xrightarrow{s=1}\int_{t=0}^{+\infty}e^{-t}Erf(\sqrt{t})dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\ .\blacksquare$$

۱-۲ : وارون تبدیل لاپلاس

تعریف (۱-۲-۱) : تابع پوچ

هر تابع $N(t)$ برای $t>0$ که $\int_0^t N(u)du=0$ تابع پوچ نامیده می‌شود. می‌توان نشان داد که لاپلاس تابع پوچ صفر است.برای این کار با روش انتگرال گیری جزء به جزء ، انتگرال زیر را محاسبه نمایید.

$$F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}N(t)dt$$

توجه کنید که اگر $L\{f(t);s\}=F(s)$ در اینصورت برای هر تابع پوچ $N(t)$ رابطه‌ی $L\{f(t)+N(t)\}=F(s)$ برقرار است. به طور مثال دو تابع $f_1(t)=e^{-at}$ و $f_2(t)=\begin{cases}0 & ,t=1\\ e^{-at} & ,t\neq 1\end{cases}$ دارای تبدیل لاپلاس یکسان $F(s)=\dfrac{1}{s+a}$ هستند و این نشان می دهد که یک تابع $F(s)$ می تواند دارای وارون لاپلاس متعدد $f(t)$ باشد. بنابراین باید شرایطی را بیان نمود که تحت آن شرایط وارون لاپلاس یک تابع منحصر بفرد باشد، این شرایط در قضیه‌ی زیر بیان می‌شود.

قضیه (۱-۲-۲) : قضیه لرچ[1]

اگر تابع $f(t)$ روی هر بازه متناهی $(0,t_0)$ بطور قطعه‌ای پیوسته و برای $t\geq t_0$ از مرتبه‌ی نمایی α باشد وارون تبدیل لاپلاس آن یکتا است.[۳]

مثال (۱-۲-۳) : تبدیل لاپلاس چند تابع محاسبه می‌شود

الف) $L\{\ln(x);s\}$.[۱]

حل: می‌دانیم $v>-1$ $\quad L\{x^v;s\}=\int_0^{+\infty} e^{-sx}x^v dx=\dfrac{\Gamma(v+1)}{s^{v+1}}$ حال اگر از قضیه لایبنیتز استفاده کرده و از دو طرف این رابطه نسبت به v مشتق گرفته شود،

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}x^v\ln(x)dx=\frac{\Gamma'(v+1)-\Gamma(v+1)\ln s}{s^{v+1}}$$

[1] Lerch

که با قرار دادن مقدار $v=0$ خواهیم داشت

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}\ln(x)dx=-\frac{\gamma+\ln s}{s}$$

بنابراین $L\{\ln x;s\}=-\dfrac{\gamma+\ln s}{s}$.

عدد $\gamma=-\Gamma'(1)$ که به ثابت اویلر-ماشرونی[1] معروف است هم از طریق انتگرال‌های فوق قابل محاسبه است، کافی است در انتگرال $\int_0^{+\infty} e^{-sx}\ln(x)dx=-\dfrac{\gamma+\ln s}{s}$ مقدار $s=1$ را جایگزین کنیم که $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(x)dx=-\gamma$ می شود.حال انتگرال سمت چپ را با نوشتن بسط می‌توان محاسبه کرد.■

ب) $L\{\int_0^{+\infty}\dfrac{x^v a^{-v}}{\Gamma(v+1)}dv;s\}$

حل: می‌دانیم $L\{\dfrac{x^v}{\Gamma(v+1)};s\}=\dfrac{1}{s^{v+1}}$ در اینصورت

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}(\int_0^{+\infty}\frac{x^v}{\Gamma(v+1)}dv)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(v+1)}(\int_0^{+\infty}e^{-sx}x^v dx)dv=\int_0^{+\infty}\frac{1}{s^{v+1}}dv=\frac{1}{s\ln s}$$

یعنی $L\{\int_0^{+\infty}\dfrac{x^v}{\Gamma(v+1)}dv;s\}=\dfrac{1}{s\ln s}$

حال اگر از قضیه (۱-۱-۱۱) استفاده کنیم داریم

$$L\{\int_0^{+\infty}\frac{x^v a^{-v}}{\Gamma(v+1)}dv;s\}=L\{\int_0^{+\infty}\frac{(\frac{x}{a})^v}{\Gamma(v+1)}dv;s\}=\frac{1}{s(\ln s+\ln a)}$$.■

مثال(۱-۲-۴): محاسبه انتگرال $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{t^2}\sin t.\sin\dfrac{1}{t}dt$.[۳]

برای محاسبه‌ی این انتگرال تابع $I(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{t^2}\sin xt.\sin\dfrac{1}{t}dt$ را معرفی و نسبت به x تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

[1] Euler-Mascheroni

$L\{I(x);s\}=\int_0^{+\infty}e^{-sx}(\int_0^{+\infty}\sin xt.\sin\frac{1}{t}dt)dx$ در اینجا اگر ترتیب انتگرال گیری را عوض کرده و از تبدیل لاپلاس تابع $g(x)=\sin xt$ نسبت به x استفاده کنیم به رابطه‌ی $L\{I(x);s\}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}\frac{t}{s^2+t^2}dt$ می‌رسیم، با تغییر متغیر $\frac{1}{t}=w$ و سپس با تغییر متغیر $ws=u$ رابطه‌ی $L\{I(x);s\}=\frac{1}{s^2}\int_0^{+\infty}\frac{u\sin\frac{u}{s}}{u^2+1}du$ حاصل می‌شود.با استفاده از انتگرال $\int_0^{+\infty}\frac{u\sin\alpha u}{u^2+\beta^2}du=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}$ بدست می‌آید: $L\{I(x);s\}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{s^2}e^{\frac{-1}{s}}$ که از جداول تبدیل لاپلاس برای $a>0$ و $n>-1$ داریم $L^{-1}\{\frac{e^{-as}}{s^{n+1}};x\}=(\frac{x}{a})^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{ax})$ پس $I(x)=\frac{\pi}{2}\sqrt{x}J_1(2\sqrt{x})$ و برای $x=1$ داریم

$$I(1)=\int_0^{+\infty}\sin t.\sin\frac{1}{t}dt=\frac{\pi}{2}J_1(2)\quad .\blacksquare$$

مثال(۱–۲–۵): محاسبه انتگرال $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{\sqrt{x}}dx$.[۳]

حل: انتگرال

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-iax}}{\sqrt{x}}dx \qquad (۱–۱)$$

را معرفی کرده و پس از حل آن، قسمت حقیقی، جواب مسأله خواهد بود.از طرفین انتگرال (۱–۱) نسبت به a لاپلاس می-گیریم

$$L\{I(a);s\}=\int_0^{+\infty}e^{-sa}(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-iax}}{\sqrt{x}}dx)da=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}(\int_0^{+\infty}e^{-(s-ix)a}da)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{s-ix}dx\xrightarrow{\sqrt{x}=u}=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{s-iu^2}du \qquad (۲–۱)$$

در این جا بدلیل زوج بودن تابع زیر انتگرال (۱–۲)، بوسیله قضیه‌ی مانده کشی[۱] [۱] مقدار

[1] Cauchy

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{s-iu^2}du=\pi\sqrt{\frac{i}{s}}$ حاصل می‌شود. در نتیجه ازانتگرال (۱-۲) داریم

$$L\{I(a);s\}=\frac{\pi}{\sqrt{2s}}(i+1)\Rightarrow I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2a}}(i+1) \qquad (۱-۳)$$

حالا با انتخاب قسمت حقیقی رابطه (۱-۳) داریم $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos ax}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$. ■

تعریف (۱-۲-۶): تلفیق دو تابع در تبدیل لاپلاس

تلفیق دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ به صورت $(f*g)(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)du=\int_0^t f(t-u)g(u)du$ تعریف می‌شود.

قضیه (۱-۲-۷):قضیه تلفیق

اگر $L\{f(t);s\}=F(s)$ و $L\{g(t);s\}=G(s)$ در اینصورت $L\{(f*g)(t);s\}=F(s)\times G(s)$.[۱]

اثبات:

$$L\{(f*g)(t);s\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}(f*g)(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-st}(\int_0^t f(u)g(t-u)du)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}f(u)(\int_u^{+\infty}e^{-st}g(t-u)dt)du\xrightarrow{t-u=w}=\int_0^{+\infty}f(u)(\int_0^{+\infty}e^{-s(u+w)}g(w)dw)du$$

$$=\int_0^{+\infty}f(u)e^{-su}du\int_0^{+\infty}g(w)e^{-sw}dw=F(s)\times G(s) \qquad .■$$

مثال(۱-۲-۸): از معادله انتگرالی $\int_0^x\varphi(t)\ln(x-t)dt=f(x)$ تابع $\varphi(x)$ را بدست آورید.[۳]

حل: از طرفین معادله، تبدیل لاپلاس گرفته و ازقضیه (۱-۲-۷) استفاده می‌کنیم.با فرض $L\{f(x);s\}=F(s)$ و $L\{\varphi(x);s\}=\Phi(s)$ داریم

$$L\{(\varphi*\ln)(x);s\}=F(s)\Rightarrow\Phi(s)(-\frac{\gamma+\ln s}{s})=F(s)\quad\Rightarrow\Phi(s)=\frac{sF(s)}{-(\ln s+\gamma)}$$

رابطه فوق را تغییر داده تا به شکل زیر ظاهر گردد

$$\Phi(s)=-\frac{s^2F(s)-sf(0)-f'(0)}{s(\ln s+\gamma)}-\frac{sf(0)+f'(0)}{s(\ln s+\gamma)}$$

در اینجا از مثال(۱-۲-۳) قسمت ب استفاده می کنیم در نتیجه داریم

$$\Phi(s) = -\frac{L\{f''(x);s\}}{s(\ln s + \ln e^{\gamma})} - \frac{f'(0)}{s(\ln s + \ln e^{\gamma})}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{\Phi(s);x\} = f''(x) * \int_0^{+\infty} \frac{x^v e^{-\gamma v}}{\Gamma(v+1)} dv - f'(0) \int_0^{+\infty} \frac{x^v e^{-\gamma v}}{\Gamma(v+1)} dv$$

که با استفاده از قضیه (۱–۲–۷) داریم

$$\varphi(x) = \int_0^{x} f''(x-\eta)\left(\int_0^{+\infty} \frac{\eta^v e^{-\gamma v}}{\Gamma(v+1)} dv\right)d\eta - f'(0)\int_0^{+\infty} \frac{x^v e^{-\gamma v}}{\Gamma(v+1)} dv . \blacksquare$$

مثال (۱–۲–۹): از معادله انتگرال منفرد آبل $\int_0^t \frac{f(u)}{\sqrt{t-u}} du = t$ تابع $f(t)$ را بدست آورید.[۳]

حل : در واقع با انتگرال $\frac{1}{\sqrt{t}} * f(t) = \int_0^t \frac{f(u)}{\sqrt{t-u}} du$ روبرو هستیم که با استفاده از قضیه (۱–۲–۷) و تبدیل لاپلاس حل می‌کنیم.از طرفین رابطه‌ی فوق تبدیل لاپلاس می گیریم :

$$L\{t^{\frac{-1}{2}} * f(t);s\} = L\{t;s\} \Rightarrow \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} . F(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow f(t) = L^{-1}\{F(s);t\} = \frac{2}{\pi}\sqrt{t} \; . \blacksquare$$

مثال(۱–۲–۱۰) : نشان دهید $\int_0^t J_0(t-u)J_0(u)du = \sin t$.[۱]

حل: در نظر بگیرید

$$g(t) = \int_0^t J_0(t-u)J_0(u)du$$

در اینصورت $L\{g(t);s\} = L\{J_0(t);s\}L\{J_0(t);s\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} . \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$.پس

$$g(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1};t\} = \sin t \; . \blacksquare$$

قضیه (۱–۲–۱۱): قضیه افروز[1]

اگر $L\{f(t);s\} = F(s)$ و $L\{\varphi(t,\alpha);s\} = \Phi(s)e^{-\alpha q(s)}$ و با فرض تحلیلی بودن توابع $q(s)$ و $\Phi(s)$ آنگاه $L\{\int_0^{\infty} f(\alpha)\varphi(t,\alpha)d\alpha;s\} = \Phi(s)F(q(s))$.

[1] Efros