فهرست مطالب

پیشگفتار

در دنیای واقعی بسیاری از سیستم‌های موجود دارای زیر سیستم‌های مختلفی هستند و رابطه بین این زیرسیستم‌ها به گونه‌ای است که می‌توان آن‌ها را در سطوح مختلفی قرار داد به‌طوری‌که زیرسیستم‌هایی که دارای ویژگی‌های مشترکی هستند، در یك سطح قرار بگیرند. نحوه قرار گرفتن و ارتباط بین سطوح با توجه به اصول و قوانین حاکم بر سیستم صورت می گیرد و سطح بالاتر معمولاً از بعضی جنبه‌ها بر سطح پایین تر مسلط است. چنین ساختاری را که برای بسیاری از سیستم‌های واقعی می‌توان بنا نمود، یك ساختار سلسله‌مراتبی[۱] می گویند.

به‌عنوان مثال، فرض کنیم شرکتی دارای چند کارخانه مجزا و هر کارخانه دارای بخش‌های مختلفی است. در چنین شرکتی، هیأت مدیره شرکت در سطح اول تصمیم‌گیری قرار دارد و با توجه به مسؤلیت و اطلاعات بیشتری که دارد، تصمیم‌های مهم‌تری را در جهت توسعه شرکت و به طور کلی بهینه‌کردن اهداف شرکت می گیرد. تصمیمات اتخاذ شده توسط هیأت مدیره چون در سطح بالاتری قرار دارد، بایستی توسط مدیران کارخانجات تابعه اجرا شود؛ اما مدیران کارخانجات نیز در حوزه اختیارات خود می‌توانند تصمیماتی را اتخاذ کنند، به گونه‌ای که معیارهای عملکردی خود را بهینه کنند. بخش‌های مختلف کارخانجات نیز چنین وضعیتی دارند. از طرف دیگر تصمیم‌ها در سطح کارخانه می‌تواند در میزان رسیدن به هدف شرکت و فضای تصمیم‌گیری هیأت مدیره اثر بگذارد و هیأت مدیره شرکت را مجبور به تغییر در تصمیم‌گیری خود کند. تصمیم‌های بخش‌های مختلف کارخانه نیز می‌تواند اثری مشابه روی تصمیمات مدیران کارخانجات بگذارد. این مشکلی است که نمی‌گذارد در چنین ساختارهایی، تصمیم‌گیری بهینه به سادگی صورت پذیرد، با این وجود تلاش‌های بسیاری برای مدل‌بندی توانایی یک تصمیم‌گیرنده برای تحت نفوذ قرار دادن تصمیم‌گیرنده‌های دیگر، به‌طور غیر مستقیم، با منفعت شخصی، انجام شد و افراد مختلف،

[۱] Hierarchical Structure

روش‌های گوناگونی پیشنهاد کردند که از آن جمله می‌توان به روش تجزیه ولف[۲] (۱۹۶۰)، و روش بهینه‌سازی چندهدفه هُگان[۳](۱۹۷۲)، اشاره کرد، اما تمام این‌روش‌ها فاقد صلاحیت کافی برای مدل‌بندی زیرسیستم‌های موجود بودند تا این‌که در سال ۱۹۸۲ مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی، توسط بیالاس[۴] ، و کاروان[۵] تعریف شدند و از آن زمان تاکنون به عنوان ابزاری موثر و قدرتمند برای تصمیم‌گیری در شرایط غیرمتمرکز[۶] محسوب می شوند. بعلاوه کاربردهای فراوان برنامه‌ریزی چندسطحی در زمینه‌های مختلف، از جمله سیاست‌گذاری‌های دولتی، طراحی شبکه‌های حمل و نقل، اقتصاد، شیمی و ....، سبب شده افراد زیادی به دنبال یافتن راه حل‌های صریح و کارا برای حل این مسائل باشند.

برنامه‌ریزی چندسطحی برخلاف دیگر مسائل برنامه‌ریزی متمرکز که فقط شامل یك تصمیم‌گیرنده و یك تابع هدف هستند، شامل چندین تصمیم‌گیرنده می‌باشد که از نظر قدرت تصمیم‌گیری در سطوح مختلفی قرار دارند و هر یك به‌طور مستقل یك بخش از متغیرهای تصمیم‌گیری را کنترل می‌کنند. در واقع هنگامی این مسائل مطرح می‌شوند که تصمیم‌گیرنده سطح اول قادر به اتخاذ تصمیم در مورد تمام متغیرها نیست، به عبارت دیگر قدرت دیکته کردن تصمیم خود به تمام بخش‌های سیستم را ندارد.

در مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی، هر تصمیم‌گیرنده در یك سطح از سلسله مراتب سعی می کند تابع خود را بدون توجه به هدف قسمت دیگر بهینه سازد، با این وجود تصمیم هر تصمیم‌گیرنده و اسباب کنترلش به او اجازه می‌دهد تا بر سیاست‌گذاری‌های سطوح دیگر تأثیر بگذارد و در نتیجه تابع هدف خود را بهبود بخشد. سرانجام تصمیم نهایی به‌طور متوالی براساس یک سلسله مراتب از بالاترین سطح به پایین‌ترین سطح اجرا می‌شود. برای مطالعه بیشتر بهینه‌سازی چندسطحی می‌توان به مراجع [۲] و [۹] مراجعه کرد. در این رساله ما دسته‌ای خاصی از مسائل چندسطحی را که ساختاری با دو سطح دارند و تابع هدف مسأله سطح اول به صورت حاصلضرب دو تابع خطی و تابع هدف سطح دوم یک تابع خطی است و ناحیه تشکیل شده توسط قیود مشترک مسأله یک چندوجهی ناتهی و کراندار است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. ثابت شده است که جواب بهینه چنین مسائلی در یکی از نقاط رأسی چندوجهی کراندار مذکور رخ می‌دهد.[۶] با توجه به این موضوع

---

[۲] Wolf

[۳] Hogan

[۴] Bialas

[۵] Karwan

[۶] Decenteralize Conditions

کالوت و گاله در سال ۲۰۰۸، الگوریتمی مبنی بر ایجاد پی در پی برش‌های صفحه‌ای مقعر برای حل مسأله مذکور پیشنهاد داده‌اند.

این رساله شرحی بر مقاله:

Bilevel Multiplicative problems :

A penalty approach to optimality and a cutting plane based algorithm.

نوشته کالوت و گاله می‌باشد و به صورت زیر تنظیم شده است.

- در فصل اول، به معرفی مسائل دوسطحی خطی-خطی پرداخته و ویژگی‌های مهم ناحیه شدنی مسأله را که جواب بهینه در آن رخ می‌دهد، مورد بررسی قرار می‌دهیم.
- در فصل دوم ابتدا مسائل ضربی-خطی را معرفی کرده و روشی برای حل آن‌ها ارائه می دهیم.سپس مسائل دوسطحی ضربی خطی-خطی و مسائل دوسطحی شبه‌مقعر را تعریف می‌کنیم.
- در فصل سوم مفهوم یک برش صفحه‌ای را تعریف و نحوه ساختن برش‌های صفحه‌ای مقعر را برای حالت خاصی از مسائل بهینه‌سازی ارائه می‌دهیم.
- در فصل آخر نیز با شرح الگوریتم LSCP به حل مسائل دوسطحی ضربی خطی-خطی می‌پردازیم.

فصل ۱

برنامه‌ریزی دوسطحی خطی-خطی

در این فصل ابتدا مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی خطی-خطی را تعریف کرده و با شرح چند مثال به تبیین مسأله می پردازیم؛ سپس ویژگی‌های مسأله دوسطحی را بیان کرده و الگوریتمی برای حل این نوع مسائل ارائه می دهیم.

۱.۱ مسأله برنامه‌ریزی دوسطحی خطی-خطی،(LBLP[1])

برنامه‌ریزی چندسطحی برای توجیه فرایندهای تصمیم‌گیری شامل چند تصمیم‌گیرنده که ساختار سلسله مراتبی [2]دارند، پیشنهاد شده است. مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی حالت خاصی از مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی هستند که ساختاری با دوسطح دارند. در مسائل دوسطحی، کنترل کلیه متغیرهای تصمیم مسأله(بردار $x = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{n_2}^2)$) بین دو تصمیم‌گیرنده تقسیم بندی می‌شود که به عنوان تصمیم‌گیرنده‌های سطح اول و سطح دوم شناخته می‌شوند. تصمیم گیرنده سطح اول، اولین n_1 مؤلفه بردار x یعنی بردار$x_1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n_1}^1)$ و تصمیم‌گیرنده سطح دوم n_2 مؤلفه باقیمانده یعنی بردار $x_2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{n_2}^2)$ را کنترل می‌کند. در واقع در هر مسأله دوسطحی، ابتدا تصمیم‌گیرنده سطح اول بردارx_1 را معین می‌سازد، آن‌گاه تصمیم‌گیرنده سطح دوم تابع هدف خود را تحت بردار x_1 ارسالی از تصمیم‌گیرنده سطح اول بهینه می‌سازد. پس از آن مجدداً تصمیم‌گیرنده سطح اول با اطلاع کامل از واکنش‌های ممکن تصمیم‌گیرنده سطح

[1] Linear Bilevel Linear Programming
[2] Hierarchical Structure

دوم پارامترها را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کند که تابع هدف خودش را بهینه سازد. در نتیجه مسائل دوسطحی همواره با دو مسأله بهینه‌سازی شناخته می‌شوند که ناحیه شدنی مسأله سطح اول به‌طور ضمنی توسط مسأله سطح دوم تعیین می‌شود.
در حالت کلی مسائل دوسطحی به شکل زیر فرموله می‌شوند:

$$\begin{gathered}\min_{(x_۱,x_۲)\in S} f_۱(x_۱,x_۲)\\ x_۲\in \operatorname{argmin}_{v\in S(x_۱)} f_۲(x_۱,v)\end{gathered} \tag{۱.۱}$$

که در آن $x_۱ \in X_۱ \subseteq R^{n_۱}$ و $x_۲ \in X_۲ \subseteq R^{n_۲}$ به ترتیب متغیرهای تحت کنترل تصمیم‌گیرنده‌های سطح اول و سطح دوم هستند. توابع $f_۱, f_۲ : X_۱ \times X_۲ \to R^۱$ به ترتیب توابع هدف سطح اول و سطح دوم مسأله، $n = n_۱ + n_۲$ و$S \subset R^n$ ناحیه تشکیل شده توسط قیود مسأله سطح دوم و $S(x_۱) = \{x_۲ \in X_۲ : (x_۱, x_۲) \in S\}$ ناحیه شدنی مسأله سطح دوم به‌ازای هر پارامتر ارسالی $x_۱ \in X_۱$ می‌باشد. بعلاوه توجه شود که:

$$\operatorname{argmin}_{v\in S(x_۱)} f_۲(x_۱,v) = \left\{v^* \in S(x_۱) : f_۲(x_۱,v^*) = \min_{v\in S(x_۱)} f_۲(x_۱,v)\right\} \tag{۲.۱}$$

دسته وسیعی از تحقیقات علمی در مورد برنامه‌ریزی دوسطحی، بر روی مدل خطی این نوع مسائل متمرکز شده است که در این بخش به معرفی آنها می‌پردازیم.[۲،۵،۹]
با استفاده از نمادگذاری‌های معمول در برنامه‌ریزی دوسطحی، مسائل LBLP به صورت زیر فرموله می‌شوند.

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \min_{x_۱\in X_۱} f_۱(x_۱,x_۲) = \alpha_۱ + c_{۱۱}x_۱ + c_{۱۲}x_۲\\
&\text{b)}\qquad\quad s.t \quad B_۱x_۱ + B_۲x_۲ \le b_۱\\
&\text{c)}\quad \min_{x_۲\in X_۲} f_۲(x_۱,x_۲) = \alpha_۲ + c_{۲۱}x_۱ + c_{۲۲}x_۲\\
&\text{d)}\qquad\quad s.t \quad A_۱x_۱ + A_۲x_۲ \le b
\end{aligned} \tag{۳.۱}$$

که در آن بردارهای c_{ij} برای $i,j \in \{۱,۲\}$، بردارهایی با ابعاد قابل قبول هستند. ماتریس‌های $B_۱$ و $A_۱$ به ترتیب ماتریس‌هایی با بعد $m_۱ \times n_۱$ و $m \times n_۱$ می‌باشند. همچنین ماتریس‌های $B_۲$ و $A_۲$ به ترتیب ماتریس‌هایی با بعد $m_۱ \times n_۲$ و $m \times n_۲$ هستند. بردار $b_۱$، یک بردار ستونی با بعد $m_۱$ و بردار b یک بردار ستونی با بعد m می‌باشد و $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ اسکالر هستند. توجه شود که مجموعه‌های

X_1 و X_2 در اغلب موارد به صورت $X_1 = \{x_1 : x_1 \geq 0\}$ و $X_2 = \{x_2 : x_2 \geq 0\}$ تعریف می‌شوند.

فرض می‌کنیم چندوجهی[3] تشکیل شده توسط تمام قیود مسأله که با T نمایش داده می‌شود یک چندوجهی ناتهی و کراندار[4] است.

$$T = \{(x_1, x_2) \in R^n : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, B_1x_1 + B_2x_2 \leq b_1, A_1x_1 + A_2x_2 \leq b\}$$

تصویر[5] T روی R^{n_1} را با T_1 نمایش می‌دهیم.

$$T_1 = \{x_1 \in R^{n_1} : (x_1, x_2) \in T\}$$

توجه داریم که:

$$S = \{(x_1, x_2) \in R^n : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, A_1x_1 + A_2x_2 \leq b\}$$

فرض می‌کنیم که S نیز یک چندوجهی کراندار و ناتهی باشد و به‌طور مشابه تصویر S روی R^{n_1} را با S_1 نمایش می‌دهیم.

$$S_1 = \{x_1 \in R^{n_1} : (x_1, x_2) \in S\} \tag{۴.۱}$$

با توجه به ساختار سلسله‌مراتبی مسائل دوسطحی برای هر $\widetilde{x}_1 \in T_1$ که از تصمیم‌گیرنده سطح اول ارسال می‌شود، تصمیم‌گیرنده سطح دوم تابع هدف خود را بهینه می‌سازد. به عبارت دیگر تصمیم‌گیرنده سطح دوم مسأله بهینه‌سازی زیر را حل می‌کند.

$$\begin{aligned} \mathrm{LB}(\widetilde{x}_1) : \min_{x_2 \in X_2} \; & f_2(\widetilde{x}_1, x_2) = c_{22}x_2 + \widetilde{\alpha}_2 \\ s.t \quad & A_2x_2 \leq \widetilde{b} \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

که در آن $\widetilde{\alpha}_2 = c_{21}\widetilde{x}_1 + \alpha_2$ و $\widetilde{b} = b_2 - A_1\widetilde{x}_1$. این مسأله، مسأله سطح پایین یا مسأله پیرو[6] نامیده می‌شود. مجموعه جواب‌های بهینه مسأله (۵.۱) به‌ازای هر $\widetilde{x}_1 \in T_1$ را با

$$M(\widetilde{x}_1) = \{x_2 \in X_2 : x_2 \in \mathrm{argmin}[f_2(\widetilde{x}_1, \widehat{x}_2) : \widehat{x}_2 \in S(\widetilde{x}_1)]\}$$

[3] Polyhedron
[4] Bounded
[5] Projection
[6] Follower's Problem

نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم تصمیم گیرنده سطح دوم برای هر تصمیم اتخاذ شده توسط تصمیم گیرنده سطح اول مجال واکنش داشته باشد، به عبارت دیگر برای هر پارامتر ارسالی $\widetilde{x}_1$، بردار $\widetilde{x}_2 \in S(\widetilde{x}_1)$ وجود دارد که تابع هدف مسأله سطح پایین را بهینه می‌سازد. یعنی $M(\widetilde{x}_1) \neq \phi$. این امر یک رابطه تابعی بین متغیرهای تحت کنترل تصمیم‌گیرنده سطح اول یعنی بردار x_1، و واکنش‌های منطقی[7] تصمیم‌گیرنده سطح دوم یعنی بردارx_2، ایجاد می‌کند. بنابراین یک نگاشت نقطه به مجموعه[8] وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر نقطه $x_1 \in X_1$، یک زیر مجموعه از X_2 را نظیر می‌سازد. این نگاشت را که به وسیله $\psi : X_1 \to 2^{X_2}$ نمایش داده می‌شود، تابع واکنش[9] $\psi(0)$ می‌نامیم و فرض می‌کنیم این تابع به‌طور کامل توسط تصمیم‌گیرنده سطح اول شناخته شده باشد. اگر عناصر $\psi(x_1)$ را با $x_2(x_1)$ نشان دهیم و فرض کنیم به‌ازای هر پارامتر ارسالی x_1، این واکنش منحصر به‌فرد باشد، آن‌گاه هدف مسأله برنامه‌ریزی دوسطحی تعیین بردار پارامتری x_1 برای مسأله سطح پایین است. به عبارت دیگر واکنش تصمیم‌گیرنده سطح پایین به وسیله بردار x_2 به‌گونه‌ای خواهد بود که قیود:

$$B_1x_1 + B_2x_2 \leq b_1 \tag{6.1}$$

برقرار باشند و تابع هدف $f_1(x_1, x_2(x_1))$ می‌نیمم شود. یعنی:

$$\begin{aligned} \min_{x_1 \in X_1} \quad & f_1(x_1, x_2(x_1)) \\ s.t & \begin{cases} B_1x_1 + B_2x_2(x_1) \leq b_1 \\ x_2(x_1) \in \psi(x_1) \end{cases} \end{aligned} \tag{7.1}$$

این مسأله، مسأله سطح بالا یا مسأله رهبر[10] نامیده می‌شود. ناحیه شدنی مسأله سطح بالا را ناحیه القایی[11] می‌نامیم و آن‌را با IR نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر:

$$\mathrm{IR} = \{(x_1, x_2) \in T : x_1 \in T_1, x_2 \in M(x_1)\} \tag{8.1}$$

[7] Rational Reaction
[8] Point To Point Map
[9] Reaction Function
[10] Leader's Problem
[11] Inducible regoin

واضح است که هر نقطه IR، یک جواب شدنی مسأله دوسطحی است، بنابراین مسأله دوسطحی فرموله شده (۳.۱) را می‌توانیم به شکل زیر بازنویسی کنیم.

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & f_1(x_1,x_2) \\ s.t \quad & (x_1,x_2) \in \mathrm{IR} \end{aligned} \tag{۹.۱}$$

توجه شود که تعاریف مذکور در مورد مسائل دوسطحی، فقط زمانی معتبر است که جواب مسأله سطح پایین به‌ازای هر پارامتر $x_1 \in T_1$، به‌طور یکتا تعیین شود. اکنون برای درک بهتر ساختار مسائل دوسطحی خطی-خطی، مثال‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۱.۱. *مسأله LBLP زیر را در نظر بگیرید که در آن $x_1 \in R^1$ و $x_2 \in R^1$ و $X_1 = \{x_1 \in R^1 : x_1 \geq 0\}$ و $X_2 = \{x_2 \in R^1 : x_2 \geq 0\}$ و x_1 متغیر تحت کنترل تصمیم‌گیرنده سطح اول و x_2 متغیر تحت کنترل تصمیم‌گیرنده سطح دوم است.*

$$\begin{aligned} \min_{x_1 \geq 0} \quad & f_1(x_1,x_2) = x_1 - 4x_2 \\ \min_{x_2 \geq 0} \quad & f_2(x_2) = x_2 \\ s.t & \begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -3 \\ -2x_1 + x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq -4 \end{cases} \end{aligned}$$

بنابر آنچه پیش‌تر گفته شد واضح است که در این مثال $S = T$ است، در نتیجه $S_1 = T_1$. با ترسیم قیود مسأله در دستگاه مختصات، چندوجهی محدب و کراندار S، همانند شکل (۱.۱) به دست می‌آید. همان‌گونه که در شکل قابل مشاهده است تصویر S در $X_1 = R^1$ مجموعه $S_1 = [1,4]$ می‌باشد. لذا برای هر $\tilde{x}_1 \in [1,4]$، تصمیم‌گیرنده سطح دوم مسأله زیر را حل می‌کند.

$$\min_{x_2 \geq 0} \quad x_2$$
$$s.t \begin{cases} -x_2 \leq -3 + \widetilde{x}_1 \\ x_2 \leq 2\widetilde{x}_1 \\ x_2 \leq 12 - 2\widetilde{x}_1 \\ -2x_2 \leq 4 - 3\widetilde{x}_1 \end{cases}$$

به عنوان مثال برای $\widetilde{x}_1 = 2$ که در شکل (۱.۱)مشخص گردیده است، مسأله زیر توسط تصمیم‌گیرنده سطح دوم حل می‌شود.

$$\min_{x_2 \geq 0} \quad x_2$$
$$s.t \begin{cases} x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 4 \\ x_2 \leq 8 \\ 2x_2 \geq 2 \end{cases}$$

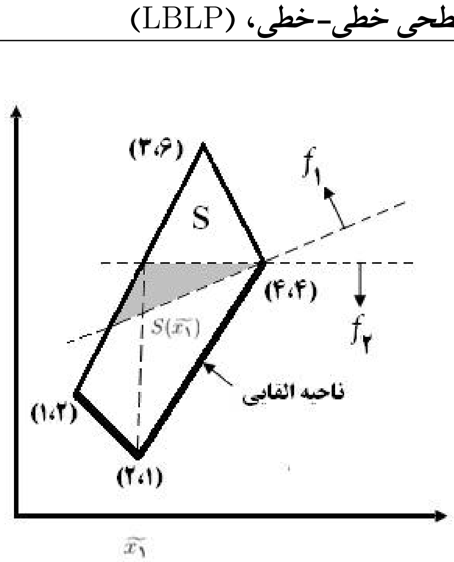
با حل این مسأله به روشی هندسی متوجه می‌شویم که ناحیه شدنی مسأله سطح دوم به‌ازای هر پارامتر $\widetilde{x}_1 \in [1, 4]$ یعنی $S(\widetilde{x}_1)$، قطعه خطی است که درون چندوجهی محدب و کراندار S قرار داشته و بر محور x_1ها در نقطه $\widetilde{x}_1$ عمود می‌باشد. بنابراین با توجه به این‌که هدف مسأله سطح پایین می‌نیمم کردن متغیر x_2 است، نتیجه می‌شود مجموعه جواب‌های بهینه مسأله سطح پایین به‌ازای مقدار ارسالی $\widetilde{x}_1$ از تصمیم‌گیرنده سطح بالا، پایین‌ترین نقطه روی خط عمودی $S(\widetilde{x}_1)$ است که توسط رابطه

$$M(\widetilde{x}_1) = \max\left\{-\widetilde{x}_1 + 3,\ \frac{3\widetilde{x}_1 - 4}{2}\right\}$$

به دست آورده می‌شود. لذا با توجه به تعریف ناحیه القایی داریم:

$$\mathrm{IR} = \{(x_1, x_2) : 1 \leq x_1 \leq 2, x_2 = 3 - x_1\} \cup \left\{(x_1, x_2) : 2 \leq x_1 \leq 4, x_2 = \frac{3x_1 - 4}{2}\right\}$$

ناحیه IR در شکل (۱.۱) با خطوط تیره نشان داده شده است.



شکل (۱.۱)

اکنون که ناحیه شدنی مسأله سطح بالا یا همان ناحیه IR مشخص گردید، تصمیم‌گیرنده سطح بالا تابع هدف خود را روی این ناحیه بهینه می‌سازد. به عبارت دیگر، تصمیم‌گیرنده سطح بالا مسأله زیر را حل می‌کند.

$$\min_{x_۱, x_۲} \quad x_۱ - ۴x_۲$$
$$s.t \quad (x_۱, x_۲) \in \mathrm{IR}$$

گرادیان[۱۲] یا بردار مشتق جزیی تابع خطی $x_۱ - ۴x_۲$، بردار $[۱, -۴]^T$ است بنابراین خط $x_۱ - ۴x_۲$ بیشترین کاهش را در جهت بردار $[-۱, ۴]^T$ دارد، لذا با توجه به شکل (۱.۱)، جواب بهینه مثال فوق در نقطه $(x_۱^*, x_۲^*) = (۴, ۴)$ رخ می‌دهد. مقدار تابع هدف سطح اول به‌ازای این نقطه برابر ۱۲− و مقدار تابع هدف سطح دوم ۴ می‌باشد.

لازم به ذکر است که تابع هدف مسأله سطح اول به‌ازای نقطه $(۳, ۶)$ مقدار بهتری دارد اما از آن‌جایی که این نقطه درون ناحیه القایی نیست، نمی‌تواند به عنوان نقطه بهینه مسأله مذکور انتخاب شود. بعلاوه توجه شود که اگر تصمیم‌گیرنده سطح اول نقطه $x_۱ = ۳$ را انتخاب کند، آن‌گاه جواب بهین مسأله سطح دوم به ازای $x_۱$ مذکور برابر $x_۲ = ۲/۵$ خواهد بود. همچنین توجه داریم که $f_۱(۳) = -۷$ و $f_۲(۲/۵) = ۲/۵$. درنتیجه بوضوح مسأله سطح دوم در نقطه $(۳, ۲/۵)$ نسبت به نقطه $(۴, ۴)$ مقدار بهتری دارد اما چون مقدار تابع هدف سطح اول در این نقطه نسبت به نقطه بهینه بیشتر است، نتیجه می‌شود که نقطه $(۳, ۲/۵)$ بهینه نیست.

[۱۲] Gradiaents

همان‌طور که در شکل (۱.۱) قابل مشاهده است، مجموعه واکنش‌های منطقی تصمیم‌گیرنده سطح دوم یا همان ناحیه IR، نامحدب[۱۳] است، لذا تصمیم‌گیرنده سطح اول تابع هدف خود را بر یک مجموعه نامحدب بهینه می سازد. بنابراین حتی در ساده‌ترین حالت یعنی مسائل دوسطحی خطی-خطی که تمام توابع خطی هستند، مسأله برنامه‌ریزی دوسطحی نامحدب است. در واقع می‌توان نشان داد ناحیه القایی متناظر با هر مسأله دوسطحی خطی-خطی، از اجتماع تعدادی از وجه‌های متصل به‌هم مجموعه S تشکیل شده است.[۲،۶،۹] از این‌رو مسائل LBLP دسته مهمی از مسائل بهینه‌سازی نامحدب به‌شمار می‌روند. به‌ویژه، می‌توان ثابت کرد که جواب بهینه این نوع مسائل همواره در یک نقطه رأسی IR رخ می‌دهد که یک نقطه رأسی S نیز است (اثبات این نتایج را تا بخش بعدی به تعویق می‌اندازیم).

مثال ۲.۱.۱. *در مسأله زیر متغیر $x_۱$ تحت کنترل تصمیم‌گیرنده سطح اول و متغیر $x_۲$ تحت کنترل تصمیم‌گیرنده سطح دوم می‌باشد.*

$$\min_{۱\leq x_۱\leq ۶} \quad f_۱(x_۱,x_۲)=x_۱+۳x_۲$$

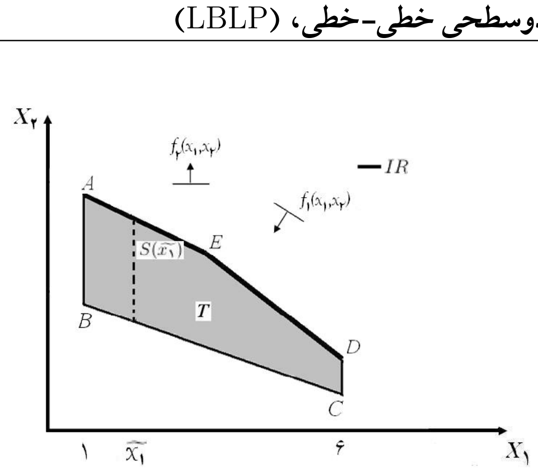
$$\min_{x_۲\geq ۰} \quad f_۲(x_۱,x_۲)=-x_۲$$

$$s.t\begin{cases} x_۱+x_۲\leq ۸ \\ x_۱+۴x_۲\geq ۸ \\ x_۱+۲x_۲\leq ۱۳ \end{cases}$$

حل: چندوجهی تشکیل شده توسط تمام قیود مسأله که آن را با T نمایش می‌دهیم در شکل (۲.۱) نشان داده شده است. در واقع چون مسأله بهینه‌سازی سطح اول فاقد هر گونه قیدی است که به متغیرهای تحت کنترل تصمیم‌گیرنده سطح دوم وابسته باشد، داریم $T=S$. با توجه به شکل (۲.۱) واضح است که $T_۱=[۱,۶]$. همچنین، جهات می‌نیمم‌سازی توابع هدف سطح اول و سطح دوم به وسیله پیکان‌های جهت‌نما در شکل مذکور قابل مشاهده هستند.

از آن‌جایی که ناحیه شدنی مسأله سطح دوم به ازای هر پارامتر ارسالی $\widetilde{x}_۱\in T_۱$، دقیقاً از اشتراک مجموعه S با خط $x_۱=\widetilde{x}_۱$ به دست آورده می‌شود، لذا اگر به‌ازای پارامتر $\widetilde{x}_۱\in T_۱$ روی مجموعه $S(\widetilde{x}_۱)$ در جهت می‌نیمم‌سازی تابع $f_۲(x_۱,x_۲)=-x_۲$ حرکت کنیم، آن‌گاه به‌طور حتم می‌بینیم که جواب بهینه مسأله سطح پایین در نقطه‌ای روی خطوط تیره نشان داده شده در شکل

[۱۳] Nonconvex



شکل (۲.۱)

(۲.۱)، رخ می‌دهد. به بیان دیگر، اگر فرض کنیم $x_2(x_1)$ جواب بهینه مسأله سطح پایین به‌ازای پارامتر ارسالی $x_1 \in T_1$ باشد آن‌گاه نتیجه می‌گیریم:

$$x_2(x_1) = \begin{cases} ۶/۵ - ۰/۵x_1 & ۱ \leq x_1 \leq ۳ \\ ۸ - x_1 & ۳ \leq x_1 \leq ۶ \end{cases}$$

بنابراین خطوط تیره‌ای که در شکل مشخص گردیده است، ناحیه شدنی مسأله سطح اول یا همان ناحیه IR را نمایش می‌دهد. اکنون با جایگزینی x_2 با $x_2(x_1)$ در تابع $f_1(x_1, x_2)$ به دست می‌آوریم:

$$f_1(x_1, x_2(x_1)) = \begin{cases} ۱۹/۵ - ۰/۵x_1 & ۱ \leq x_1 \leq ۳ \\ ۲۴ - ۲x_1 & ۳ \leq x_1 \leq ۶ \end{cases}$$

به آسانی می‌توان دید که بهترین مقدار f_1 به عنوان تابعی از x_1، ۱۲ است که به‌ازای $x_1^* = ۶$ به دست می‌آید و چون $x_2(x_1^*) = ۲$، نتیجه می‌گیریم که نقطه $D = (۲, ۶)$، نقطه بهینه مسأله فوق است. این مطلب همچنین از روی شکل (۲.۱) با توجه به جهت می‌نیمم‌سازی f_1، قابل مشاهده است.

یک وجه تمایز مسائل دوسطحی از سایر مسائل برنامه‌ریزی ریاضی معمولی این است که پیوستگی توابع هدف f_1 و f_2 و فشرده بودن ناحیه شدنی S، دلیلی بر وجود جواب بهینه برای مسأله نیست. مشکل وقتی رخ می‌دهد که مجموعه جواب‌های بهینه تصمیم‌گیرنده سطح دوم به‌ازای x_1های ارسالی از تصمیم‌گیرنده سطح اول، که آن‌را با $M(x_1)$ نشان دادیم، تک مقداری نباشد.[۲،۹] به منظور توضیح بیشتر این مطلب، مجدداً مسأله (۳.۱) را در نظر می‌گیریم.

فرض کنید تصمیم‌گیرنده سطح اول نقطه $x_۱ = \widehat{x}_۱$ را به عنوان پارامتر ارسالی انتخاب کند آن‌گاه تصمیم‌گیرنده سطح دوم با یک مسأله بهینه‌سازی پارامتری شده توسط بردار $\widehat{x}_۱$، مواجه می‌شود. در مثال‌های خاص ممکن است مجموعه جواب‌های بهینه این مسأله چندگانه باشد. به عنوان نمونه، هرگاه تمام توابع قیدی مسأله دوسطحی، خطی باشند این امکان وجود دارد که مجموعه جواب‌های بهینه مسأله سطح دوم به‌ازای مقدار ارسالی $x_۱ = \widehat{x}_۱$ از تصمیم‌گیرنده سطح اول، شامل بخشی از یک ابرصفحه باشد. در این صورت تصمیم‌گیرنده سطح دوم نسبت به هر نقطه آن ابرصفحه بی‌اثر است یعنی مقدار بهینه تابع هدف نظیرش در هر نقطه‌این مجموعه یکسان می‌باشد. با این وجود امکان دارد اثر تصمیم‌گیرنده سطح اول روی هر یک از نقاط این ابرصفحه متفاوت باشد؛ یعنی مقدار بهینه تابع هدف سطح اول فقط در یک نقطه معین از مجموعه $M(\widehat{x}_۱)$ اتفاق بیفتد اما هیچ راهی وجود نداشته باشد تا تصمیم‌گیرنده سطح دوم را به پیدا کردن آن نقطه وادار کند. از طرفی اگر تصمیم‌گیرنده سطح اول هر نقطه‌ای غیر از $\widehat{x}_۱$ انتخاب کند، هرگز می‌نیمم مقدارش به دست آورده نمی‌شود. این موقعیت در مثال زیر بررسی شده است.

مثال ۳.۱.۱. *فرض کنید بردار $x = (x_۱, x_۲)$ تحت کنترل تصمیم‌گیرنده سطح اول و بردار $y = (y_۱, y_۲)$ تحت کنترل تصمیم‌گیرنده سطح دوم باشد.*

$$\min_{x_۱,x_۲} \quad f_۱(x_۱,x_۲) = (۲y_۱ + ۳y_۲)x_۱ + (۴y_۱ + y_۲)x_۲$$

$$s.t \begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۱ \\ x_۱ \geq ۰ \\ x_۲ \geq ۰ \end{cases} \tag{۱۰.۱a}$$

$$\min_{y_۱,y_۲} \quad f_۲(y_۱,y_۲) = -y_۱(x_۱ + ۳x_۲) - y_۲(۴x_۱ + ۲x_۲)$$

$$s.t \begin{cases} y_۱ + y_۲ = ۱ \\ y_۱ \geq ۰ \\ y_۲ \geq ۰ \end{cases} \tag{۱۰.۱b}$$

حل: فرض کنیم بردار $x = (x_۱, x_۲)$ پارامتر ارسالی از تصمیم‌گیرنده سطح اول باشد یعنی:

$$x \in \{(x_۱,x_۲) : x_۱ \geq ۰, x_۲ \geq ۰, x_۱ + x_۲ = ۱\}$$

آن‌گاه باجایگذاری $۱ - x_۱$ به جای $x_۲$ و به دست آوردن تابع $f_۲$ برحسب پارامتر $x_۱$ و متغیرهای

y_1 و y_2، نتیجه می‌شود که تصمیم‌گیرنده سطح دوم باید مسأله زیر را حل کند.

$$\min_{y_1,y_2} \quad f_2(y_1,y_2) = -y_1(-2x_1+3) - y_2(2x_1+2)$$
$$s.t\begin{cases} y_1+y_2=1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

برای حل این مسأله سه حالت در نظر گرفته می‌شود. در حالت اول فرض می‌شود متغیرهای x_1 و x_2 به‌گونه‌ای باشند که $x_1+3x_2 > 4x_1+2x_2$. آن‌گاه با جایگذاری $x_2 = 1 - x_1$ در نامساوی قبل به‌روشنی نتیجه می‌شود که $x_1 < \frac{1}{4}$، لذا $-\frac{5}{2} < (2x_1 - 3)-$. بنابراین با توجه به اینکه $y_1 \geq 0$ است متوجه می‌شویم که برای می‌نیمم‌سازی تابع f_1 لازم است y_1 حداکثر مقدار ممکن را داشته باشد. از طرف دیگر، چون هر بردار شدنی مسأله سطح دوم باید در معادله $y_1+y_2=1$ صدق کند، نتیجه می‌گیریم که $y_1=1$ و بنابراین $y_2=0$ می‌باشد. در حالت بعدی فرض می‌شود که $x_1+3x_2 < 4x_1+2x_2$ و با استدلالی مشابه بالا نتیجه می‌شود که جواب بهین تصمیم‌گیرنده سطح دوم، بردار $y=(0,1)$ است.

سرانجام در حالت سوم فرض می‌کنیم $x_1+3x_2 = 4x_1+3x_2$ و با جایگذاری $x_2 = 1-x_1$ برای x_2 در رابطه قبل، نتیجه می‌گیریم $x_1 = \frac{1}{4}$. آن‌گاه با جانشین کردن این مقدار در تابع f_2 یی که بر حسب x_1 تعریف شده، به دست می‌آوریم $f_2(y_1,y_2) = -\frac{5}{2}(y_1+y_2)$. واضح است که این تابع به‌ازای هر بردار (y_1,y_2) که $y_1+y_2=1$، تابعی ثابت بوده و لذا در هر یک از این نقاط می‌نیمم مقدار خود را اختیار می‌کند. به همین دلیل نتیجه می‌شود که به‌ازای پارامتر $x_1 = \frac{1}{4}$، مجموعه جواب‌های بهین مسأله سطح دوم برابر با $M(1/4) = \{(y_1,y_2) : y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1+y_2=1\}$ می‌باشد که چند مقداری است. با توجه به مطالب بالا، اگر مجموعه جواب‌های بهینه مسأله سطح دوم را به‌ازای مقدار ارسالی $x=(x_1,x_2)$ از تصمیم‌گیرنده سطح اول با $y(x)$ نمایش دهیم آن‌گاه داریم:

$$y(x) = \begin{cases} (1,0) & x_1 < \frac{1}{4} \\ M(1/4) & x_1 = \frac{1}{4} \\ (0,1) & x_1 > \frac{1}{4} \end{cases}$$

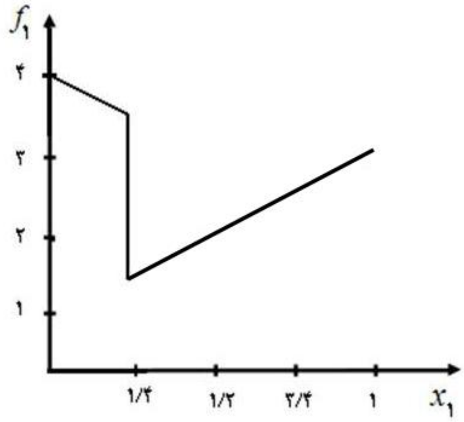
اکنون با جانشین کردن $y(x)$ در رابطه (10.1a)، مسأله سطح اول را به‌صورت زیر بازنویسی

می‌کنیم:

$$\min_{x} f_{۱} = \begin{cases} ۲x_{۱} + ۴x_{۲} & x_{۱} < \frac{۱}{۴} \\ ۲y_{۱} + \frac{۳}{۲} & ۰ \leq y_{۱} \leq ۱, x_{۱} = \frac{۱}{۴} \\ ۳x_{۱} + x_{۲} & x_{۱} > \frac{۱}{۴} \end{cases} \tag{۱۱.۱}$$

$$s.t \begin{cases} x_{۱} + x_{۲} = ۱ \\ x_{۱} \geq ۰ \\ x_{۲} \geq ۰ \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که $f_{۱}$ در نقطه $x_{۱} = \frac{۱}{۴}$، خوش‌تعریف نیست که این امر در تلاش برای حل (۱۱.۱) منجر به مشکلاتی می‌شود. شکل (۳.۱) گراف متناظر با این مسأله را نمایش می‌دهد.



شکل (۳.۱)

با توجه به شکل (۳.۱) به‌وضوح مشاهده می‌شود که بهترین مقدار تابع هدف سطح اول روی IR، برابر ۱/۵ است که به ازای نقطه $(\frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۴}, ۰, ۱)$ به‌دست می‌آید اما از آن‌جایی که تصمیم‌گیرنده سطح دوم نسبت به هر نقطه روی خط $y_{۱} + y_{۲} = ۱$ بی‌اثر است، هیچ تضمینی وجود ندارد که او نقطه $y = (۰, ۱)$ را به ازای پارامتر ارسالی $x = (\frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۴})$ به عنوان جواب بهین انتخاب کند. از سوی دیگر، برای محاسبه مقدار تابع هدف سطح اول لازم است راهی برای انتخاب $(y_{۱}, y_{۲}) \in M(\frac{۱}{۴})$ بیابیم اما به این علت که تصمیم‌گیرنده سطح اول فقط کنترل بخشی از متغیرها یعنی متغیرهای سطح اول را برعهده دارد و نمی‌تواند روی انتخاب‌های تصمیم‌گیرنده سطح دوم تأثیر بگذارد، او نمی‌تواند این مقدار را به تصمیم‌گیرنده سطح دوم تحمیل کند. با توجه به شکل (۳.۱)، برای اطمینان داشتن

از بهترین انتخاب تصمیم‌گیرنده سطح اول، تنها راه این است که او نقطه‌ای را انتخاب کند که در آن $x_۱ > \frac{۱}{۴}$. فرض می‌کنیم او نقطه $x^* = (\frac{۱}{۴} + \varepsilon, \frac{۳}{۴} - \varepsilon)$ را انتخاب کند که در آن $\varepsilon > ۰$ یک مقدار کوچک دلخواه است. آن‌گاه مقدار تابع هدف سطح اول در این نقطه برابر $f_۱^* = ۱/۵ + ۲\varepsilon$ است که بهترین مقدار قابل دسترس برای آن می‌باشد. بنابراین هرگاه مجموعه جواب‌های بهینه مسأله سطح دوم به‌ازای یک پارامتر ارسالی از تصمیم‌گیرنده سطح اول تک مقداری نباشد، این امکان وجود دارد که تصمیم‌گیرنده سطح اول به هیچ طریقی نتواند می‌نیمم نظیرش را بدست آورد.

۱.۱.۱ اهمیت ترتیب سطوح در یک مسأله برنامه‌ریزی دوسطحی

به منظور شرح اهمیت ترتیب سطوح در یک مسأله LBLP، ساختار مسأله (۱۰.۱) را وارون می‌کنیم. مسأله حاصل عبارت است از:

$$\min_y f_۲(y_۱, y_۲) = -(x_۱ + ۳x_۲)y_۱ - (۴x_۱ + ۲x_۲)y_۲$$

$$s.t \begin{cases} y_۱ + y_۲ = ۱ \\ y_۱ \geq ۰ \\ y_۲ \geq ۰ \end{cases} \tag{۱۲.۱a}$$

$$\min_x f_۱(x_۱, x_۲) = (۲y_۱ + ۳y_۲)x_۱ + (۴y_۱ + y_۲)x_۲$$

$$s.t \begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۱ \\ x_۱ \geq ۰ \\ x_۲ \geq ۰ \end{cases} \tag{۱۲.۱b}$$

جواب بهینه مسأله سطح دوم (۱۲.۱b)، به‌ازای پارامتر ارسالی y از مسأله سطح اول عبارت است از:

$$x(y) = \begin{cases} (۱, ۰) & y_۱ > \frac{۱}{۲} \text{ یعنی } ; ۲y_۱ + ۳y_۲ < ۴y_۱ + y_۲ \text{ برای} \\ M(۱/۲) & y_۱ = \frac{۱}{۲} \\ (۰, ۱) & y_۱ < \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

که در آن $M(۱/۲) = \{(x_۱, x_۲) : x_۱ \geq ۰, x_۲ \geq ۰, x_۱ + x_۲ = ۱\}$ است. بنابراین به‌ازای مقدار ارسالی $y_۱ = \frac{۱}{۲}$ از تصمیم‌گیرنده‌ی سطح اول، مسأله سطح دوم (۱۲.۱b)، جواب بهینه

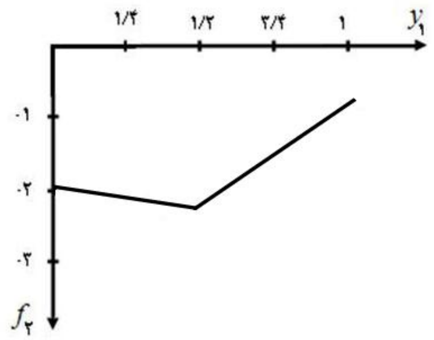
چندگانه دارد. اکنون با جانشین کردن $x(y)$ به جای $x = (x_۱, x_۲)$ در (۱۲.۱a)، مسأله سطح اول را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\min_y f_۲(y_۱, y_۲) = \begin{cases} -y_۱ - ۴y_۲ & y_۱ > \frac{۱}{۲} \\ -(۳ - ۲x_۱)(\frac{۱}{۲}) - ۲(x_۱ + ۱)(\frac{۱}{۲}) & y_۱ = \frac{۱}{۲} \\ -۳y_۱ - ۲y_۲ & y_۱ < \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$s.t \quad y_۱ + y_۲ = ۱, y_۱ \geq ۰, y_۲ \geq ۰$$

$$= \min_{۰ \leq y_۱ \leq ۱} \begin{cases} -۴ + ۳y_۱ & y_۱ > \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۵}{۲} & y_۱ = \frac{۱}{۲} \\ -۲ - y_۱ & y_۱ < \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

با ترسیم $f_۲$ برای $۰ \leq y_۱ \leq ۱$ به‌وضوح نتیجه می‌شود که بردار $y^* = (\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ نقطه بهینه مسأله (۱۲.۱) است. این نتیجه در شکل (۴.۱) قابل مشاهده است.



شکل (۴.۱)

نکته قابل توجه این است که هرچند در این حالت همانند مسأله (۱۰.۱) تصمیم‌گیرنده سطح دوم برای یک محدوده از نقاط بی‌اثر است اما اکنون تصمیم‌گیرنده سطح اول صرف‌نظر از انتخاب تصمیم‌گیرنده سطح دوم، بهترین مقدار تابع هدف خود را در یک نقطه معین از IR یعنی نقطه $y^* = (\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ به‌دست می‌آورد که این امر اهمیت ترتیب سطوح در یک مسأله LBLP را نتیجه می‌دهد.

۲.۱.۱ مسأله دوسطحی خوش‌حالت[۱۴]

تمامی تعاریف و مفاهیم ذکر شده در باب مسائل دوسطحی بر این فرض استوار هستند که به‌ازای هر $x_1 \in T_1$، مجموعه جواب‌های بهینه تصمیم‌گیرنده سطح دوم یعنی $M(x_1)$، تک مقداری باشد. در مواردی که چنین نیست، گفته می‌شود مسأله بهینه‌سازی سطح اول خوش‌حالت نیست. همان‌طور که در مثال (۳.۱.۱) نشان داده شد، در این‌گونه موارد مقدار تابع هدف سطح دوم یعنی $f_2(x_1, x_2)$ به‌ازای مجموعه‌ای از جواب‌ها یکسان است، با این وجود این جواب‌ها می‌توانند اثرات گوناگونی بر تابع هدف سطح اول داشته باشند. برای اجتناب از این وضعیت ممکن است مجبور باشیم کنترل روی انتخاب در بین جواب‌های بهینه چندگانه در سطح دوم را به سطح اول واگذار کنیم. این کار منجر به انتخاب نقطه معین $x_2 \in M(x_1)$ توسط تصمیم‌گیرنده سطح دوم می‌شود تا امکان محاسبه مقدار تابع هدف سطح اول را به‌ازای آن نقطه فراهم آورد.

روش‌های متفاوتی برای اطمینان از خوش‌حالت بودن مسأله دوسطحی ارائه شده است که به چند مورد از آن‌ها اشاره می‌کنیم.[۵،۷]

۱- روش خوش بینانه[۱۵] یا روش ضعیف[۱۶]: در این‌روش فرض می‌شود تصمیم‌گیرنده سطح اول حق تأثیرگذاری روی تصمیم‌گیرنده سطح دوم را دارد و لذا می‌تواند تصمیم‌گیرنده سطح دوم را به انتخاب بردار x_2ی وادار کند که بهترین مقدار f_1 را به دست می‌دهد، بنابراین تصمیم‌گیرنده سطح اول مسأله زیر را حل می‌کند.

$$\min_{x_1 \in T_1} \phi_\circ\{x_1\}$$

$$\phi_\circ\{x_1\} = \min_{x_2 \in M(x_1)} f_1(x_1, x_2)$$

۲- روش بدبینانه[۱۷] یا روش قوی[۱۸]: در این‌روش فرض می‌کنیم که تصمیم‌گیرنده سطح دوم همواره بردار x_2ی را انتخاب می‌کند که بدترین مقدار تابع هدف سطح اول یعنی f_1 را به دست می‌دهد،

---

[۱۴] Well Posed
[۱۵] Optimistic
[۱۶] Weak Approach
[۱۷] Pessimitstic
[۱۸] Strong Approach

لذا تصمیم‌گیرنده سطح اول با اطمینان به این موضوع، مسأله زیر را حل می‌کند.

$$\min_{x_1 \in T_1} \phi_\rho\{x_1\}$$
$$\phi_\rho\{x_1\} = \max_{x_2 \in M(x_1)} f_1(x_1, x_2)$$

لازم به ذکر است که در مسائل دوسطحی خطی-خطی همواره تحت روش خوش بینانه حداقل یک نقطه رأسی چندوجهی T وجود دارد که جواب بهینه مسأله است. [۱۸]

۳.۱.۱ کاربردهای برنامه‌ریزی دوسطحی

کاربردهای مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی در شاخه‌های مختلف علوم وجود داشته و بسیار مورد توجه است. در زیر یکی از کاربردهای مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی را در شیمی مطرح می‌کنیم. برای مشاهده کاربردهای متنوع‌تر از مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی به مرجع [۲] رجوع شود.

معادله شیمیایی بهینه

برای تهیه مواد به وسیله واکنش‌های شیمیایی اغلب باید به این پرسش پاسخ داد که چگونه مخلوطی از مواد شیمیایی را ترکیب کنیم تا مطمئن باشیم:

- ماده‌ای که قصد تهیه‌آن را داریم واقعاً محصول واکنش شیمیایی در راکتور (واکنشگاه) است و در عین حال

- مقدار برخی از مواد مورد نظر موجود در محصول واکنش، به اندازه ممکن زیاد یا کم باشد.

مسأله بالا را می‌توان به شکل یک مسأله بهینه‌سازی دوسطحی مدل‌بندی کرد که در آن هدف اول، مسأله سطح دوم را شرح می‌دهد و هدف دوم برای مشخص کردن تابع هدف سطح اول مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اگرچه شیمیدان‌ها از نظر فنی قادر نیستند نتیجه یک واکنش شیمیایی را در دماهای بسیار بالا مشاهده کنند، اما آنها می‌توانند به وسیله یک مسأله برنامه‌ریزی محدب نتیجه نهایی را شرح دهند. این مسأله، در مدل‌بندی مسأله بهینه‌سازی دوسطحی فوق به عنوان مسأله سطح دوم در نظر گرفته می‌شود. فرض کنید G تعداد مواد گازی و N تعداد کل موادی است که در واکنش مورد نظر شرکت می‌کنند و داریم $G \leq N$. همچنین فرض کنید A ماتریسی باشد که درایه موجود در سطر iام و