دانشگاه پیام نور
پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
دررشته ریاضی

دانشکده علوم پایه

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:

دررابطه با ابردوری و سوپردوری بر بعضی از فضاهای برداری

استاد راهنما:
دکتر بهمن یوسفی

استاد مشاور:
دکتر غلامعلی میرزا کریمی

نگارش:
مرضیه عزیزی

ماه و سال
تیر 1387

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

دانشکده علوم پایه

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:

در رابطه با ابردوری وسوپردوری بر بعضی ازفضاهای برداری

استاد راهنما:

دکتر بهمن یوسفی

استاد مشاور:

دکتر غلامعلی میرزا کریمی

نگارش:

مرضیه عزیزی

ماه و سال

تیر 1387

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه /رساله

پایان نامه تحت عنوان : در رابطه با ابردوری وسوپردوری بر بعضی از فضاهای برداری

که توسط مرضیه عزیزي در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد. تاریخ دفاع: ۲۵/۴/۸۷ نمره: ۱۸/ ۵ درجه ارزشیابی : عالي

اعضای هیأت داوران:

<u>نام و نام خانوادگی</u> <u>هیأت</u>

<u>داوران</u> <u>مرتبه علمی</u> <u>امضاء</u>

۱-دکتر بهمن یوسفي استاد راهنما

استاد

۲- دکتر غلامعلي میرزاکریمي استاد مشاور

استادیار

۳-دکتر احمد خاکساري استاد داور

استادیار

۴- دکتر حسین تولّلي نماینده تحصیلات تکمیلی

استادیار

چکیده

این رساله در سه فصل تدوین یافته است .در فصل اول مقدمات تحقیق را فراهم نموده وبه معرفی عملگرهای هیلبرت اشمیت می پردازیم.

در فصل دوم عملگرهای ابردوری را معرفی کرده ،سپس چند قضیه که ابزار مهمی برای تشخیص ابردوری بودن یک عملگر هستند را بیان می کنیم و نشان می دهیم که عملگر T در محک ابردوری

صدق می کند اگر وفقط اگر عملگر L_T با ضابطه $L_T(A) = TA$ بر جبر عملگر های هیلبرت اشمیت ابردوری باشد وهمچنین به بیان شرایط لازم وکافی برای برقراری یک عملگر بر فضای باناخ تفکیک پذیر در محک ابر دوری می پردازیم.

فصل سوم را با معرفی عملگرهای سوپردوری آغاز کرده و سپس به بیان شرایط لازم وکافی برای برقراری عملگر T در محک سوپردوری می پردازیم. از جمله ثابت می کنیم کهT در محک سوپردوری بر قرار است اگر وتنهااگر L_T با توپولوژی عملگر قوی در$B(H)$ سوپردوری باشد .

فهرست

Abstract:

This thesis contains three sections .In the first section , we discuss some elementary facts and introduce Hilbert–Schmidt operator.

In the second section , we introduce hypercyclicity operators ,then discuss some results that are the main tools we use to show when an operator is hypercyclic .we prove that the Hypercyclicity Criterion for any operator T on a Hilbert space is equivalent to the hypercyclicity of the left multiplication operator induced by T on the algebra of Hilbert –Schmidt operators, then we give necessary and sufficient conditions for an operator on a separable Hilbert space to satisfy the Hypercyclicity Criterion.

In the third section, we start to introduce supercyclicity operators, then we prove the Supercyclicity Criterion for any T on a Hilbert space is

equivalent to the supercyclicity of the left multiplication operator induced by T in the strong operator topology.

Payame Noor University

Submitted Partial Fulfillment of the requirements for the Degree of M.Sc

In Mathematics

Department of Basic Science

Title:

On the Hypercyclicity and Supercyclicity on Some Vector Spaces

Supervisor:

DR . B . YOUSEFI

Advisor:

DR.GH.MIRZA KARIMI

By:

MARZIEH AZIZI

Month,year

July 2008

Payame Noor University

Submitted Partial Fulfillment of the requirements for the Degree of M.Sc
In Mathematics

Department of Basic Science

Title:

On the Hypercyclicity and Supercyclicity on Some Vector Spaces

Supervisor:

DR . B . YOUSEFI

Advisor:

DR.GH.MIRZA KARIMI

By:

MARZIEH AZIZI

Month,year

July 2008

1- مقدمه

این فصل شامل دو بخش است . در بخش اول به ارائه تعاریف مقدماتی و بعضی از قضایای مورد نیاز در فصلهای بعدی می پردازیم .در بخش دوم به عملگرهای هیلبرت- اشمیت وعملگرهای اثر رده می پردازیم و برخی از خواص آنها را موردبررسی قرار می دهیم.

1-1 مطالب مقدماتی

در این بخش می خواهیم تعاریف مقدماتی و بعضی از قضایای مورد نیاز در فصلهای بعدی را ارائه دهیم .

تعریف 1.1-1 : اگر X یک فضای برداری روی میدان F باشد آنگاه نیم –ضرب داخلی روی X تابعی است مانند $u: X\times X \longrightarrow F$ به طوریکه برای هر α وβ در F وهر x وy وz در X در موارد زیر صدق می کند :

الف) $u(\alpha x+\beta y,z) = \alpha u(x,z)+\beta(y,z)$

ب) $u(x,\alpha y+\beta z) = \overline{\alpha}\, u(x,y)+\overline{\beta} u(x,z)$

پ) $u(x,x) \geq 0$

ت) $u(x,y) = u(y,x)$

یک ضرب داخلی روی X در واقع یک نیم- ضرب داخلی است که شرط زیر نیز صدق می کند :

ج) اگر $u(x,x) = 0$ آنگاه $x=0$.

ضرب داخلی را با نماد $u(x,y) = \langle x,y \rangle$ نمایش می دهیم .

قضیه 2.1-1 : (نامساوی کوشی- بانیاکوسکی- شوارتز) . اگر $\langle 0,0 \rangle$ یک نیم- ضرب داخلی روی X باشد ، آنگاه :

$$|\langle x , y\rangle|^2 \leq \langle x , x\rangle \ \langle y , y\rangle$$

برای هر y,x در X . علاوه بر این تساوی برقرار است اگر و تنها اگر اسکالرهای β,α ، که هر دو مخالف صفر هستند ، وجود داشته باشند بطوریکه :

$$\langle \beta x+\alpha y,\beta x+\alpha y\rangle = 0.$$

اثبات : رجوع کنید به([4] ، صفحه 3، قضیه 4.1) .

نتیجه 3.1-1 : اگر $\langle 0,0 \rangle$ یک نیم ضرب داخلی روی X باشد و $\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ ، برای هر x در X ، آنگاه :

الف) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ، برای هر y وx در X .

ب) $\|\alpha x\| = |\alpha| \ \|x\|$ برای هر α در F و x در X .

اگر $\langle 0,0 \rangle$ یک ضرب داخلی باشد آنگاه :

پ) $\|x\| = 0$ نتیجه می دهد $x= 0$.

تعریف 4.1-1 : یک فضای هیلبرت یک فضای ضرب داخلی مانند H روی F همراه با یک ضرب داخلی مانند$\langle 0, 0\rangle$ است بطوریکه با توجه به متر $d(x,y) = \|x-y\|$ ، القا شده توسط ضرب داخلی، H یک فضای متریک تام باشد .

تعریف 5.1-1 : ℓ^2 فضای دنباله های مختلط $x = \{ x_n\}$ رویC است که مجموع مربع متناهی دارد ، یعنی در رابطه زیر صدق می کنند .

$$\sum_{n=1}^{\infty} | x_n | < \infty ,$$

در این فضا ، جمع به صورت مؤلفه به مؤلفه و ضرب داخلی به صورت زیر ، تعریف می شود .

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \, \bar{y}_n = \langle x,y \rangle$$

که در آن $X=\{x_n\}$ و $y=\{y_n\}$ است .

تعریف 1- 1. 6 :اگر X یک فضای برداری مختلط باشد.یک نیم نرم تابعی است مانند $P:X \to [0,\infty)$ که خواص زیر را دارا باشد:

الف) $P(x , y) \leq P(x)\, P(y) \quad , \quad (x,y\in X)$

ب) $P(\alpha\, x) = |\alpha|\, P(x) \quad , \quad (\alpha \in C , x \in X)$.

از (الف) نتیجه می شود که P(٥)= ٥. یک نرم ، نیم نرم P است بطوریکه :

ج) اگر $P(x)=$ ٥ آنگاه ٥ $x=$.

معمولا نرم با نماد $\|\cdot\|$ نمایش داده میشود.

اگر فضای برداری X دارای نرم باشد آنگاه X را یک فضای نرم دارمی نامیم.توجه کنید اگرX یک فضای نرم دار باشد برای هرx وyعضو X قرار میدهیم $d(x,y)= \| x-y \|$ انگاه d یک متر روی X است ودرنتیجه هرفضای نرم دار یک فضای متریک بوده است ودراین حالت d را متریک تولید شده به وسیله نرم می نامیم.

تعریف 7.1-1: فضای نرمدارX رایک فضای باناخ گوییم ، اگر نسبت به متر تولید شده به وسیله نرم یک فضای متریک کامل باشد یعنی اینکه هر دنباله کوشی در آن همگراباشد .

تعریف 8.1-1 : زیر مجموعه A ازفضای X را یک مجموعهG_δ می خوانیم ،هر گاه برابربا اشتراک شمارش پذیر گردایه ای از زیر مجموعه های بازX باشند توجه کنید که هر زیر مجموعه باز،یک مجموعهG_δ است .

قضیه 1-9.1 : (قضیه بئر) اگر X یک فضای متریک باشد آنگاه اشتراک هر گردایه شمارش پذیراز مجموعه های چگال باز در X، خود نیز در X چگال است .

اثبات : ([9]).

تعریف 1-1 . 10: فرض کنید X یک فضای متریک باشد ، X را تفکیک پذیر نامیم . هر گاه یک زیر مجموعه شمارش پذیر از X مانند A وجود داشته باشد که در X چگال باشد یعنی $\overline{A}=X$.

از اینجا به بعد B(X,Y) را فضای تمام تبدیل های خطی کراندار از X بتوی Y در نظر می گیریم .

قضیه 1-1 . 11: اگر X و Y فضاهای نرمدار باشند و $A:X \to Y$ یک تبدیل خطی باشد ، عبارات زیر معادل خواهند بود:

الف) $A \in B(X,Y)$.

ب) A در نقطه 0 پیوسته است .

پ) A در نقطه ای پیوسته است .

ت) ثابتی مانند C وجود دارد بطوریکه $\|Ax\| \leq C \|x\|$ برای هر $x \in X$.

اگر $A\in B(X,Y)$ و $\|A\|=\sup\{\|Ax\|:\|x\|\leq 1\}$

آنگاه

$$\|A\|=\sup\{\|Ax\|:\|x\|=1\}$$
$$=\sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}: x\neq 0\right\}$$
$$=\inf\{c>0: \|Ax\| \leq c \|x\| , \forall x \in X\}$$

اثبات : ([4]) .

$\|A\|$ را نرم A می نامیم و B (X,Y) یک فضای نرمدار خواهد شد اگر ، جمع و ضرب اسکالر به صورت

نقطه ای تعریف شده باشد ، B (X,Y) یک فضای با ناخ است اگر ،Y یک فضای با ناخ باشد .

تعریف1-1 . 12 : اگر$A \in B(X,Y)$ باشد که در آن X و Y فضاهای هیلبرت هستند در این صورت

عملگر منحصر به فرد A^* در B (X,Y) وجود دارد بطوریکه به ازاء هر$x \in X$ و هر$y \in Y$ در شرط زیر صدق کند :

$$\langle A x , y \rangle = \langle x , A^* y \rangle$$

عملگر A^* را عملگر الحاقی A می نامیم .

تعریف1-1 . 13 : زیر فضای خطی M از X را که الزاما بسته نباشد منیفلد نامیده می شود .

قضیه1-1 . 14 : (هان – با ناخ[1]) . هر گاه Mیک زیر فضای خطی نرم دار X بوده و f یک تابعک خطی کراندار برM باشد ، آنگاه f را می توان به یک تابعک خطی کراندار مانند f بهX طوری توسیع داد که

$\|F\| = \|f\|$.

اثبات : رجوع کنید به ([9]، صفحه 104 ، قضیه 5 . 16) .

حال دو نتیجه مهم از قضیه هان – با ناخ را ذکر می کنیم :

نتیجه1-1 . 15 : فرض کنیم Mیک زیر فضای خطی نرمدار X بوده و$x_0 \in X$. در این صورت x_0 دربست $\overline{M}$ از M است اگرو فقط اگر یک تابعک خطی کراندار مانند f بر X موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in M$ ، $f(x) = o$ ولی $f(x_0) \neq o$.

نتیجه1-1 . 16: اگر Xیک فضای خطی نرم دار بوده و$x_0 \in X$ و $x_0 \neq o$ ، یک تابعک خطی کراندار مانند f برX با نرم 1 وجود دارد بطوریکه $f(x_0) = \|x_0\|$.

قضیه1-1 . 17: اگر Xیک فضای نرمدار بوده وM یک منیفلد خطی از X باشد ، آنگاه

$$\text{cl}\, M \equiv \cap \{kel\, f : f \in X^*, M \subseteq \ker f \}$$

اثبات : رجوع کنید به ([4] ، صفحه 81 ، قضیه 6-13) .

نتیجه1-1 . 18 : اگر X یک فضای نرمدار و M یک منیفلد خطی در X باشد ، آنگاه M در X چگال است اگر وتنها اگر تنها تابعک خطی کراندار روی X که M را صفر می کند تابعک خطی صفر باشد .

تعریف1-1 . 19 : جبر X روی C را یک جبر با ناخ می نامیم هر گاه این جبر دارای یک نرم باشد که این نرم یک فضای با ناخ به وجود می آورد و در شرایط زیر صدق می کند

$$\|xy\| \leq \|x\| \ \|y\| \qquad \forall\, x , y \in X_{\circ}.$$

تعریف1-1 . 20: فرض کنید $T \in B(X)$ طیف T مجموعه ای از اسکالر های λ است بطوریکه $T - \lambda I$ معکوس پذیر نیست . طیف T را با نماد $\sigma(T)$ نمایش می دهیم .

توجه کنید که :

$\lambda \in \sigma(T)$ اگر و فقط اگر در یکی از شرایط زیر برقرار باشد :

الف) برد $T - \lambda I$ تمام X نباشد .

ب) $T - \lambda I$ یک به یک نباشد .

توجه کنید که اگر شرط (ب) برقرار باشد ، λ را یک مشخصه برای T می نامیم و متناظر با آن $\ker(T-\lambda I)$ را یک فضای مقدار مشخصه وابسته به λ می نامیم .بردار مخالف صفر $\ker(T-\lambda I)$ یک بردار مشخصه از T نامیده می شود .

تعریف1-1 . 21 : منظوراز توپولوژی عملگرهای قوی (SoT) ، توپولوژی تعریف شده روی $B(X)$ است ، که توسط خانواده ای از نیم نرم های $\{ P_h : h \in X \}$ که در آن $P_h(T)=Th$ است به وجود می آیند . مجموعه های باز مانند U در این توپولوژی به صورت زیر تعریف می شود :

$$U = U(V_{\circ}, \varepsilon ; f_1, f_2, \dots , f_N) = \{ V \in B(X) : \| (V - V_{\circ}) f_i \| < \varepsilon, \forall i = 1,2, \dots , N\}$$

جاییکه $\varepsilon > o$ و V_o یک عملگر در B (X) است و f_Nو . . .و f_2و f_1 ، N بردار در X هستند .

تعریف1-1 . 22 : فرض کنید H یک فضای هیلبرت تفکیک پذیر و$\{e_n\}$یک پایه متعامد برای H باشد . عملگر T را یک عملگر انتقال وزندار روی H می نامیم هر گاه T هر بردار e_n را به مضربی از بردار e_{n+1} ببرد و به عبارت دیگر برای هر n یک مقدار مختلط w_n موجود باشد که

$$Te_n = w_n\, e_{n+1} \ .$$

اگر اندیس n روی اعداد صحیح و نا منفی باشد T را یک عملگر انتقال وزندار یک جانبه می نامیم اما اگر n هر عدد صحیح باشد در این صورت T را یک عملگر انتقالی وزندار دو جانبه می نامیم .

تعریف1-1 . 23 : اگر g و h دو بردار در H باشند ، آنگاه $g \otimes h$ نشان دهنده رتبه یک عملگر روی H است که به صورت زیر تعریف می شود .

$$g \otimes h(f) = \langle f, h \rangle g \ .$$

بنابرین$ran(g \otimes h) = \vee \{g\}$ مگر اینکه h=0 باشد همچنین داریم :

$$\ker(g \otimes h) = \{h\}^{\perp}.$$

تعریف1-1 . 24 : فرض کنید E و F فضاهای نرم شده و$A : E \to F$ خطی باشد . گوییم A فشرده است ، اگر به ازای هر دنباله ی کراندار$\{x_n\}_1^{\infty}$ در E دنباله ی$\{Ax_n\}_1^{\infty}$ دارای یک زیر دنباله ی همگرا در F باشد .

عملگر فشرده A الزاما کراندار است ، زیرا اگر چنین نبود ، دنباله ی کراندار $\{x_n\}$در E موجود بود ، به گونه ای که$\|Ax_n\| \to \infty$ و در این صورت $\{Ax_n\}$ یک زیر دنباله همگرا داشته باشد . توجه کنید که مجموعه تمام عملگرهای فشرده روی H با $B_o\ (H) = B_o$ نمایش داده می شود .

تعریف 25.1-1: عملگر کراندار Tروی Bرا فرد هلم[1] می نامیم اگر بردT بسته ودارای بعد متناهی باشدوهسته نیز بعد متناهی داشته باشد.

1. Fredholm

تعریف 26.1-1: طیف اصلی[1] . $\lambda\in \not\mathbb{C}$ را طیف اصلی نامیم هرگاه ،$T-\lambda$ یک عملگر فردهلم نباشد.

تعریف1-1. 27 : فضای برداری توپولوژیکی X رافضای محدب موضعی می نامیم هرگاه توپولوژی تعرف شده روی آن توسط خانواده ای از شبه نرم های P باشد به قسمی که :

$$\cap\{x: P(x) = \circ\} = \circ.$$

تعریف 28.1-1 : فضای برداری توپولوژیکX یک فضای فرچت است اگرو تنها اگر در سه شرط زیر صدق کند.

1) کامل باشد .

2) موضعاً محدب باشد .

3) توپولوژی آن بتواند بوسیله یک انتقال پایای متریک القاء شده به وجود آید. یعنی یک متری$d: X \times X \to R$ به طوریکه :

$$d(x, y)=d(x+a, y+a) \quad , \quad \forall a, x, y \in X$$

به طور خلاصه فضای فرچت، فضای موضعاً محدبی است که نسبت به یک انتقال پایا متریک کامل باشد.

1.Essential Spectrum

2-1 عملگرهای هیلبرت – اشمیت

در این بخش به معرفی عملگرهای هیلبرت – اشمیت و عملگرهای اثر رده می پردازیم . و برخی از خواص آنها را مورد بررسی قرار می دهیم . ابتدا به قضیه زیر توجه کنید :

قضیه2-1 .1 : فرض کنید H یک فضای هیلبرت تفکیک پذیر و مختلط باشد اگر $\{e_n\}$ و $\{f_m\}$ پایه های متعامدیکه برای H بوده و $A \in B(H)$ باشد آنگاه

$$\sum_n \|Ae_n\|^2 = \sum_m \|A^* f_m\|^2 = \sum_n \sum_m |\langle Ae_n \ , \ f_m \rangle|^2 .$$

(توجه کنید که حکم مطرح شده در این قضیه به این معنی است که هر کدام از این مجموع های نامتناهی همگراست اگر و تنها اگر تمام آنها همگرا باشد ، در چنین حالتی هر سه مجموع با هم برابر خواهند بود .)

اثبات : با استفاده از تساوی پارسوال ، برای هر n داریم :

$$\|Ae_n\|^2 = \sum_m |\langle Ae_n \text{و} f_m \rangle|^2$$

از طرفی برای هر m ،

$$\|A^* f_m\|^2 = \sum_n |\langle e_n \text{ و } A^* f_m \rangle|^2$$

بنابراین حکم ثا بت شده است .

تعریف2-1 . 2 : اگر $A \in B(H)$ و $\{e_n\}$ یک پایه متعامد برای H باشد ، تعریف می کنیم :

$$\|A\|_2 = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

از قضیه (1-2 . 1) نتیجه می شود که $\| \cdot \|_2$ مستقل از پایه انتخابی است . بنابراین خوش تعریف است . در صورتی که $\|A\|_2 < \infty$ باشد ، A را عملگر هیلبرت – اشمیت می نامیم . مجموعه تشکیل شده از همه عملگرهای هیلبرت – اشمیت را با $B_2 = B_2(H)$ نشان می دهیم.

گزاره1-2 .3 :

الف) اگر $A \in B(H)$ ، آنگاه $\|A\| \le \|A\|_2$.

ب) $\| \cdot \|_2$ یک نرم بر B_2 است .

ج) $B_2(H)$ یک ایده آل در $B(H)$ است .

اثبات : (الف) اگر $e \in H$ و $\|e\| = 1$ ، فرض می کنیم $\{e_n\}$ یک پایه متعامد برای H و $e_1 = e$ باشد . پس خواهیم داشت

$$\|Ae\|^2 \le \sum \|Ae_n\|^2 = \|A\|_2^2$$

در نتیجه داریم :

$$\|Ae\| \le \|A\|_2$$

حال با گرفتن سو پریمم بر تمام e ها (الف) نتیجه می شود .

(ب) فرض کنید $B \in B_2$ و A باشند و $\{e_n\}$ یک پایه متعامد برای H . آنگاه$\{\|Ae_n\|\}$ و $\{\|Be_n\|\}$ متعلق به ℓ^2 هستند . حال با استفاده از نامساوی مثلثی برای نرم ℓ^2 و نامساوی شوارتز خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \| A + B \|_2^2 &= \sum \| Ae_n + Be_n \|^2 \\ &\le \sum (\| Ae_n \| + \| Be_n \|)^2 \\ &= \| A \|_2^2 + 2 \sum \| Ae_n \| \| Be_n \| + \| B \|_2^2 \\ &\le \| A \|_2 + 2 \left(\sum \| Ae_n \|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum \| Be_n \|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \| B \|_2^2 \end{aligned}$$

$$=\| A \|_2^2 + 2 \| A \|_2 \| B \|_2 + \| B \|_2^2$$

$$=(\| A \|_2 + \| B \|_2)^2 < \infty$$

بنابرین $A + B \in B_2$ وداریم :

$$\| A + B \|_2 \leq \| A \|_2 + \| B \|_2$$

بقیه شرایط برای نرم بودن $\| \cdot \|_2$ بدیهی است .

ج) فرض کنید $T \in B(H)$ ، $A \in B_2(H)$ و $\{e_n\}$ یک پایه متعامدیکه برای H باشد آنگاه داریم :

$$\|TAe_n\|^2 \leq \|T\|^2 \|Ae_n\|^2$$

بنابراین ،

$$\|TA\|_2 \leq \|T\| \|A\|_2 < \infty$$

در نتیجه $TA \in B_2(H)$. از طرف دیگر اگر $A \in B_2(H)$ باشد با توجه به قضیه (1-2 . 1) ، $A^* \in B_2(H)$ می باشد . بنابراین $T^* A^* \in B_2$ و در نتیجه $AT = (T^*A^*)^*$ در B_2 است و این اثبات را تمام می کند .

قضیه1-2 . 4 : عملگرهای هیلبرت – اشمیت فشرده اند .

اثبات : فرض کنید که A و دنباله ی $\{e_n\}$ همان ها باشند که در تعریف (2-1 . 2) ارائه شده ثابت می کنیم که A فشرده است ، به این ترتیب که آن را به صورت یک حد نرم عملگرهای با رتبه متناهی بیان می کنیم . $A_k : E \to F$ را به صورت زیر تعریف می کنیم $(k \in \mathbb{N})$:

$$A_k\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{k} x_n A e_n$$

که در آن ،

$$X = \sum_n x_n e_n \qquad (1)$$