بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و کامپیوتر
بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه دکتری
رشته ریاضی محض

سایه‌زنی حدی نمایی در سیستمهای دینامیکی هذلولوی

نگارش

سید علیرضا احمدی

استاد راهنما

پروفسور محمدرضا مولایی طاهرآبادی

آذر ماه ۱۳۹۱

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه دکتری به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و کامپیوتر
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: سید علیرضا احمدی	امضاء:
استاد راهنما: پروفسور محمدرضا مولایی طاهرآبادی	امضاء:
داور اول : پروفسور بهمن هنری	امضاء:
داور دوم: دکتر محمد ابراهیمی	امضاء:
داور سوم: دکتر ندا ابراهیمی	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی: دکترمریم احتشام زاده	امضاء:

تقدیم به

- اگر امروز دستانم یارای یاری رسانی یافته است، مرهون دستان پرمهر پدری هستم که بلندای دستانش همیشه سایبان مهربانی هاست. او که موهایش به سپیدی رفت تاسپیدرو بمانم.
- اگر امروز آرزوهایم را بر پهنه‌ی هستی تحقق یافته می بینم مدیون دعاهای آسمانی مادری هستم که نگاه نگرانش همیشه بدرقه‌ی راهم و محبت بی دریغش آرامش بخش زندگیم بوده وهست. او که وجودم برایش همه رنج بوده و وجودش برایم همه مهر.
- همسر عزیز و مهربانم که سایه مهربانیش سایه سار زندگیم می باشد، او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.
- و دختر عزیزم ...

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش سزاوار پروردگار مهربان است که هستی را در پاکی مطلق خویش و بر پایه‌ی دانش وعدالت آفرید و به بشر آموخت که نیل به خوشبختی درگرو اندیشیدن وپیمودن راه است. او را در برابر بی نهایت یاری ها وگره گشایی های مهربانانه اش سپاس بی کران می گویم.

سپاس بی پایان بر استاد ارجمندم جناب آقای پروفسور محمدرضا مولایی که دراین مدت از محضر علمی واخلاقی ایشان بهره بردم و همواره خود را مدیون زحمات ایشان می دانم و به خاطر راهنمایی واهتمام ارزشمندشان در مسیر رشد علمی ام، سپاسگزارم.

همچنین از اساتید داور جناب آقای پروفسور بهمن هنری، آقای دکتر محمد ابراهیمی و سرکار خانم دکتر ندا ابراهیمی که این پایان‌نامه را مورد مطالعه قرار داده و اینجانب را از راهنمایی‌های ارزنده خود بهره‌مند نمودند، کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

سید علیرضا احمدی

sa.ahmdi@gmail.com

مقدمه

«سیستم دینامیکی چیست؟ جواب خیلی ساده است، یک ماشین حساب را برداشته و یک عدد دلخواه را وارد کنید. سپس یکی از کلیدهای تابعی را به‌طور مکرر روی آن اعمال کنید. این روش تکرار یک مثال از سیستم‌های دینامیکی گسسته است. [۱۴] »

این نحوه آشنایی دانشجویان با مبحث سیستم‌های دینامیکی است. در این مطلب باید توجه داشته باشیم که فرض بر آن گرفته شده که ماشین حساب مورد نظر محاسبات را به صورت دقیق انجام دهد. به عنوان مثال اگر عدد ۱ را در ماشین حساب اختیار کنیم و کلید sin را مکرراً اعمال کنیم، خواهیم دید که بعد از مدتی ماشین حساب عدد صفر را نشان می‌دهد. آیا این بدان معناست که عدد صفر در مدار نقطه یک واقع است؟ می‌دانیم که جواب منفی است، پس چرا این اتفاق می‌افتد؟ دلیل این امر روشن است زیرا وقتی ماشین حساب شروع به محاسبه مقادیر می‌کند، جواب‌ها را گرد کرده و به‌صورت تقریبی ارائه می‌دهد. بنابراین ما در هر با مرحله فشار دکمه sin تقریبی از سینوس عدد قبلی را بدست می‌آوریم، به عبارت دیگر نقاطی که ما در این روش بدست می‌آوریم نقاط یک مدار واقعی نیست بلکه نقاطی از یک شبه مدار می‌باشد.

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا شبه مدارها می‌توانند دینامیک یک سیستم را تشریح کنند؟ جواب این سؤال را می‌توان در نظریه سایه‌زنی سیستم‌های دینامیکی یافت. این نظریه به بررسی آن دسته از سیستم‌های دینامیکی می‌پردازد که هر شبه مدار آن را بتوان با یک مدار واقعی تقریب زد و از آنجا که مفهوم تقریب دارای انواع مختلف است، طبیعتاً با انواع

مختلفی از تعاریف برای سایه‌زنی روبرو خواهیم شد.

در این بین نوع‌هایی از سایه‌زنی که در سیستمهای دینامیکی خاص‌تر مانند سیستم‌های دینامیکی هذلولوی و ... برقرار می‌باشد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

اولین نوع سایه‌زنی که به خاصیت اثرگذاری شبه مدار [۱] ، سایه‌زنی [۲] و یا سایه‌زنی استاندارد شهرت دارد، اولین بار توسط آنوسوف [۳] ریاضیدان روسی برای دسته خاصی از سیستم‌های دینامیکی دیفرانسیل‌پذیر به نام وابرریختی‌های آنوسوف مطرح شد. این مفهوم که نوعی پایداری را در سیستم معرفی می‌کند در شبیه‌سازی سیستم‌های دینامیکی می‌تواند مؤثر باشد، به این معنی که اگر مدار حرکت یک نقطه رابه‌وسیله یک دنباله از نقاط با خطای ثابت تخمین بزنیم و خطای ما در این تخمین به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه می‌توان یک مدار واقعی در سیستم مورد نظر یافت که به اندازه دلخواه به دنباله مذکور نزدیک باشد.

بعد از آن ریاضیدانان زیادی این نظریه را گسترش دادند و انواع دیگری از سایه‌زنی را ارائه دادند [۱۳، ۲۸، ۳۴، ۳۹، ۴۲، ۴۳، ۶۲] که از آن جمله می‌توان به سایه‌زنی لیپ‌شیتز اشاره کرد که توسط پیلیوگین [۴] معرفی شد و در آن خطاهای تقریب شبه‌مدار با مدار، ضریبی از خطای شبه مدار می‌باشد. پیلیوگین در [۳۶] نشان داد که این خاصیت برای سیستم‌های دینامیکی هذلولوی برقرار است و در [۴۵] به همراه تیخومیروف [۵] نشان دادند که این مفهوم هم‌ارز پایداری می‌باشد.

سایه‌زنی حدی یکی دیگر از انواع سایه‌زنی است که در آن خطاهای مورد بحث در طول زمان

[۱] pseudo orbit tracing property

[۲] shadowing

[۳] Anosov

[۴] Pilyugin

[۵] Tikhomirov

به صفر میل می‌کند. پیلیوگین، ایرولا [1] و نوانلیا [2] در [۱۵] ثابت کردند که این خاصیت نیز حول مجموعه‌های هذلولوی برقرار است.

تعاریف متنوع زیادی از سایه‌زنی مطرح شده است که ما در اینجا به آنها نمی‌پردازیم [۲۱، ۲۲، ۵۷، ۵۸، ۵۵]. در این پایان‌نامه نوعی از سایه‌زنی را ارائه می‌دهیم که در آن خطاها علاوه بر اینکه با سرعت نمایی به سمت صفر میل می‌کند، میزان آن نیز وابسته به زمان است. نشان خواهیم داد که این خاصیت برای سیستم‌های دینامیکی هذلولوی و نیم‌هذلولوی برقرار است و همچنین رابطه آنرا با بحث Ω -پایداری بررسی می‌کنیم و مثالی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد این نوع سایه‌زنی از سایر انواع سایه‌زنی‌ها متمایز است.

در ادامه شبه متری را معرفی خواهیم کرد که خواصی از دینامیک سیستم را در خود دارد به گونه‌ای که اگر این شبه متر متحد با صفر باشد، سیستم ، ترایای توپولوژیک خواهد بود.

در پایان خواص سایه‌زنی را روی فضاهای متریک فازی معرفی کرده و رابطه آنها را با خواص سایه‌زنی روی فضاهای متریک بررسی می‌کنیم.

---

[1] Eirola

[2] Nevanlinna

چکیده

در این پایان‌نامه مفهوم سایه‌زنی حدی نمایی را معرفی می‌کنیم. نشان خواهیم داد که این خاصیت در سیستمهای دینامیکی هذلولوی برقرار است . همچنین شبه متری را معرفی خواهیم کرد که خواص متعددی را روی سیستم القا می‌کند. در ادامه انواع سایه‌زنی را روی سیستمهایی با ساختار خاص بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: *سیستم دینامیکی، مجموعه هذلولوی، سایه‌زنی، مجموعه بازگشتی، سیستمهای فازی*

فهرست مطالب

۱ تعاریف و قضایای مقدماتی ۱

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ تعاریف کلی سیستمهای دینامیکی ۲

۲ خواص سایه زنی و بازگشتی در سیستمهای دینامیکی توپولوژیک ۹

۱.۲ مقدمه ۹

۲.۲ خواص بازگشتی ۱۰

۳.۲ سایه زنی و انواع آن ۲۱

۴.۲ سایه‌زنی حدی نمایی ۲۶

۳ خواص سایه زنی در سیستمهای دینامیکی دیفرانسیل پذیر ۴۰

۱.۳ مقدمه ۴۰

۲.۳ سیستمهای دینامیکی هذلولوی ۴۱

۳.۳ سایه زنی در سیستمهای دینامیکی هذلولوی ۵۰

۴.۳ سیستمهای دینامیکی جزئاً هذلولوی ۵۹

۵.۳ سایه زنی در سیستمهای دینامیکی جزئاً هذلولوی ۶۲

۴ خواص سایه زنی در سیستمهای با ساختار خاص ۶۴

۱.۴ مقدمه ۶۴
۲.۴ سایه زنی در سیستمهای فازی ۶۴

آ مثال‌ها **۷۸**

آ.۱ فضای اسمیل ۷۸
آ.۲ StSh⇏LpSh ۸۰
آ.۳ LmSh⇏StSh ۸۲
آ.۴ HolSh(۱/۳)⇏SS ۸۵
آ.۵ سیستمهای فازی ۸۹

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۹۰**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۹۴**

فهرست تصاویر

۱.۱ یک نقطه غیر سرگردان ۴

۱.۲ یک نقطه بازگشتی زنجیری ۱۲

۲.۲ یک δ شبه مدار ۲۲

۳.۲ تقریب یک شبه مدار با یک مدار واقعی ۲۳

۴.۲ یک شبه مدار مجانبی که خطاها با سرعت نمایی کم می‌شود ۲۷

۵.۲ تقریب زدن نمایی ۲۷

۶.۲ نمودار نگاشت f ۳۰

۱.۳ سولنوئید یا جاذب اسمیل. ۴۶

۲.۳ خودریختی چنبره‌ای خطی ۴۷

۳.۳ شبه مدار مرکزی ۶۳

آ.۱ نمودار نگاشت f ۸۲

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ مقدمه

پدیده‌های طبیعی دنیای واقعی می‌تواند کاملاً پیچیده باشد، با این وجود مدل‌های ریاضی بسیار ساده اغلب پیش‌بینی‌های قابل ملاحظه و مفیدی در اختیار ما می‌گذارد.

به طور سنتی، مدل‌های ریاضی شامل هر دوی معادلات دیفرانسیل معمولی و پاره‌ای می‌باشد و از این‌رو سیستمهای دینامیکی زمان پیوسته را نشان می‌دهد. در مقابل قسمت اعظمی از نظریه مدرن سیستمهای دینامیکی روی سیستمهای دینامیکی زمان گسسته که با تکرار نگاشت f روی فضای حالت X تولید می‌شود متمرکز شده است.

اگر چه با صورت ظاهراً ساده‌تر، رفتار دینامیکی می‌تواند اغلب بدون محدودیت پیوسته بودن زمان، غنی‌تر باشد، اما در هر حالت نتایج زیادی را می‌توان با استفاده از نگاشت بازگشتی پوانکاره و نگاشت‌های مشابه با استفاده از مفهوم تعلیق [۱] ، از حالت زمان‌گسسته به حالت زمان‌پیوسته و بالعکس منتقل کرد.

---

[۱] suspension

۲.۱ تعاریف کلی سیستمهای دینامیکی

تعریف ۱.۲.۱. منظور از عمل یک گروه G روی یک مجموعه X عبارت است از نگاشت $\theta : G \times X \to X$ که در خواص زیر صدق می‌کند

۱. برای هر $g_۱, g_۲ \in G$ و هر $x \in X$ ، $\theta(g_۱g_۲, x) = \theta(g_۱, \theta(g_۲, x))$.

۲. برای عضو همانی e از G و هر $x \in X$ ، $\theta(e, x) = x$.

تعریف ۲.۲.۱. ۱. یک سیستم دینامیکی از عمل یک گروه G روی یک مجموعه X حاصل می‌شود.

۲. یک نیم سیستم دینامیکی از عمل یک نیم‌گروه G روی یک مجموعه X حاصل می‌شود.

۳. چنانچه X یک فضای توپولوژیک و به ازای هر $g \in G$ نگاشت

$$\theta_g = \theta(g, .) : X \to X$$

پیوسته باشد، سیستم دینامیکی حاصل را سیستم دینامیکی توپولوژیک می‌نامند.

۴. چنانچه X یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر و به ازای هر $g \in G$ نگاشت

$$\theta_g = \theta(g, .) : X \to X$$

دیفرانسیل‌پذیر باشد، سیستم دینامیکی حاصل را سیستم دینامیکی دیفرانسیل‌پذیر می‌نامند.

۵. اگر $G = \mathbb{Z}$ گروه جمعی اعداد صحیح باشد، سیستم دینامیکی حاصل را سیستم دینامیکی گسسته می‌نامند. معمول‌ترین سیستم دینامیکی گسسته در حالتی است که f

یک نگاشت روی X باشد و برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $\theta_n = f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$.
در این حالت گوییم (X, f) یک سیستم دینامیکی است.

۶. اگر $G = \mathbb{R}$ گروه جمعی اعداد حقیقی باشد، سیستم دینامیکی حاصل را سیستم دینامیکی پیوسته می‌نامند.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید (X, f) یک سیستم دینامیکی باشد. در این‌صورت مدار نقطه $x \in X$ تحت سیستم f را با $\mathcal{O}_f(x)$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) \ : \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید (X, f) یک سیستم دینامیکی توپولوژیک باشد، در این‌صورت

۱. مجموعه نقاط ثابت f را با $\mathrm{Fix}(f)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in X \ : \ f(x) = x\}$$

۲. مجموعه نقاط متناوب f را با $\mathrm{Per}(f)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{Per}(f) = \cup_{n \geq ۱}\{x \in X \ : \ f^n(x) = x\}$$

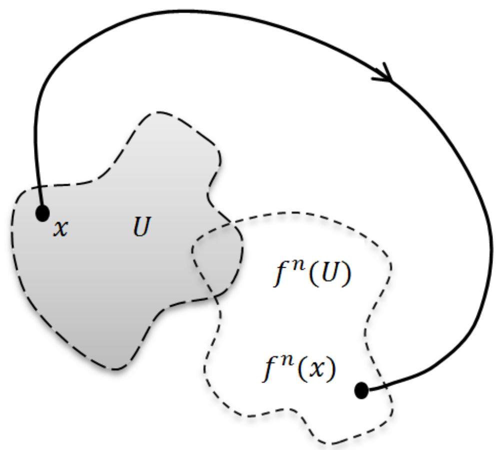
۳. نقطه $y \in X$ را یک نقطه ω -حدی برای $x \in X$ می‌نامند اگر دنباله n_k از اعداد طبیعی موجود باشد به‌طوری‌که اگر $k \to \infty$ آنگاه داشته باشیم $n_k \to \infty$ و $f^{n_k}(x) \to y$.
مجموعه تمام نقاط ω -حدی نقطه x را با $\omega(x)$ نشان می‌دهیم. به‌راحتی می‌توان دید که

$$\omega(x) = \cap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\cup_{i \geq n} f^i(x)}.$$

مجموعه نقاط α -حدی x به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\alpha(x) = \cap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\cup_{i\geq n} f^{-i}(x)}.$$

۴. نقطه $x \in X$ را غیر سرگردان [۱] می‌نامند اگر برای هر همسایگی U از x عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد که $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. مجموعه تمام نقاط غیر سرگردان سیستم دینامیکی f را با $\Omega(f)$ نشان می‌دهند که مجموعه‌ای بسته و پایا تحت f است.



شکل ۱.۱: یک نقطه غیر سرگردان

تعریف ۵.۲.۱. سیستم دینامیکی (X, f) را ترایای توپولوژیک [۲] می‌نامند اگر به ازای هر دو مجموعه باز ناتهی مانند U و V بتوان عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ را چنان یافت که $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

قضیه ۶.۲.۱. [۶] *اگر X یک فضای متریک فشرده باشد، آنگاه سیستم دینامیکی (X, f) ترایای توپولوژیک است اگر و فقط اگر نقطه $x \in X$ موجود باشد که $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$.*

تعریف ۷.۲.۱. سیستم دینامیکی (X, f) را آمیخته توپولوژیک [۳] می‌نامند اگر به ازای هر

---

[۱] nonwandering

[۲] topologically transitive

[۳] topologically mixing

دو مجموعه باز ناتهی مانند U و V بتوان عدد طبیعی $N \in \mathbb{N}$ را چنان یافت که برای هر $n \geq N$ داشته باشیم $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

تعریف ۸.۲.۱. سیستم دینامیکی توپولوژیکی (X, f) را مینیمال می‌نامند اگر به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید (X, f) و (Y, g) دو سیستم دینامیکی توپولوژیک باشد. دراین‌صورت همسانریختی $\phi : X \to Y$ را یک تزویج توپولوژیک از f به g می‌نامند هرگاه $g \circ \phi = \phi \circ f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید f یک همسانریختی روی فضای متریک (X, d) باشد، دراین‌صورت مجموعه‌های

$$W^s(x) = \{y \in X \ : \ d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \ , \ n \to \infty\}$$

و

$$W^u(x) = \{y \in X \ : \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0 \ , \ n \to \infty\}$$

را به ترتیب مجموعه‌ی پایدار و مجموعه‌ی ناپایدار نقطه x می‌نامند. همچنین برای هر $\epsilon > 0$ مجموعه‌های

$$W^s_\epsilon(x) = \{y \in X \ : \ d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon \quad \forall n \geq 0\}$$

و

$$W^u_\epsilon(x) = \{y \in X \ : \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \epsilon \quad \forall n \geq 0\}$$

را به ترتیب مجموعه پایدار موضعی و مجموعه ناپایدار موضعی نقطه x می‌نامند.

تعریف ۱۱.۲.۱. سیستم دینامیکی توپولوژیک (X, f) را انبساطی نامند هرگاه یک عدد $e > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که اگر برای هر $i \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $d(f^i(x), f^i(y)) \leq e$ ، آنگاه $x = y$.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنید f یک همسانریختی [۱] روی فضای متریک (X, d) باشد، در این‌صورت f را $\mathcal{L}$ -هذلولوی [۲] می‌نامند اگر متریک سازگار D (متریکی که توپولوژی القایی یکسان با توپولوژی القایی d دارد)روی X موجود باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار باشد:

۱. f لیپ‌شیتز [۳] باشد.

۲. اعداد $A, \epsilon_0 > 0$ موجود باشد به گونه‌ای که برای هر $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ ، عدد $\delta > 0$ را بتوان یافت که اگر $D(x, y) < \delta$ ، آنگاه $W^u_\epsilon(x, D) \cap W^s_\epsilon(y, D)$ شامل یک نقطه $\alpha(x, y)$ باشد به‌طوری‌که

$$D(\alpha(x,y), x) \leq AD(x, y)\ ,\ \ D(\alpha(x,y), y) \leq D(x, y).$$

۳. اعداد $\mu, \nu \in (0, 1)$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in X$ و هر $n \geq 0$ داشته باشیم

$$D(f^n(x), f^n(y)) \leq \mu^n D(x, y)\ ;\ \ y \in W^s_\nu(x, D);$$

$$D(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \mu^n D(x, y)\ ;\ \ y \in W^u_\nu(x, D).$$

[۱] homeomorphism

[۲] $\mathcal{L}$-hyperbolic

[۳] Lipschitz

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید f یک همسانریختی روی یک فضای متریک فشرده (X,d) باشد. در این‌صورت (X,f) را یک فضای اسمیل [۱] می‌نامیم اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱. عدد مثبت η و نگاشت پیوسته

$$[,] : \{(x,y) \in X \times X \ : \ d(x,y) < \eta\} \to X$$

موجود باشد که $[x,x] = x$ و بعلاوه

$$[[x,y],z] = [x,z], \quad [x,[y,z]] = [x,z],$$

$$f([x,y]) = [f(x),f(y)].$$

۲. اعداد $\delta > ۰$ و $\nu \in (۰,۱)$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$d(f^n(y),f^n(z)) \leq \nu^n d(x,y) \quad ; \quad y,z \in V_\delta^s(x), n > ۰,$$

$$d(f^{-n}(y),f^{-n}(z)) \leq \nu^n d(x,y) \quad ; \quad y,z \in V_\delta^u(x), n > ۰.$$

که در آن

$$V_\delta^s(x) = \{u \ : \ u = [u,x], \ d(x,u) < \delta\},$$

$$V_\delta^s(x) = \{v \ : \ v = [x,v], \ d(x,v) < \delta\}.$$

توجه می‌کنیم که مجموعه‌های $V_\delta^s(x)$ و $V_\delta^u(x)$ مشابه $W_\delta^s(x)$ و $W_\delta^u(x)$ می‌باشد و نیز $[x,y]$ متناظر نقطه منحصربفرد تلاقی $W_\delta^s(x)$ و $W_\delta^u(x)$ می‌باشد.

[۱] Smale space

مثال ۱.۲.۱۴. $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}},\sigma)$ (فضای شیفت کامل [1])، یک فضای اسمیل است. برای جزئیات بیشتر مثال آ.۱.۱ در پیوست را ببینید.

[1] full shift space