بسم الله الرحمن الرحیم

۴۷۰۱۵

دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان
کتابخانه مرکزی ۱۳۷۰

دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

۱۳۸۱ /۱۱/ ۲۰

دانشکده علوم، گروه ریاضی

پایان نامه:

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

بستاریک زیرمدول و دنباله های با پایان از ایده الهای اول وابسته و متصل

استاد راهنما:

آقای دکتر فرهاد رحمتی

مؤلف:

پگاه مشتاقی

۴۷۰۱۵

فروردین ۱۳۸۱

بسمه تعالی

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

گروه ریاضی

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور

شناخته نمی شود .

داور ۱ : دکتر محمد مهدی زاهدی

داور ۲ : دکتر محمد ابراهیمی

استاد راهنمای پایان نامه : دکتر فرهاد رحمتی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکتر حسن رنجبر عسگری

دانشجو : پگاه مشتاقی

حق چاپ محفوظ و مخصوص به مولف است .

تقدیم به:

پدر و مادرم، عزیزانی که پیشرفت‌های علمی‌ام را مدیون رهنمودهای گرانمایهٔ ایشان هستم

و

تقدیم به:

همسرم، که همواره یار و یاور من بوده است.

اِقْرَاْ بِاسْمِ رَبِّکَ الّذی خَلَق. خَلَقَ الْاِنسانَ مِنْ عَلَق. اِقرَا و رَبُّکَ الأَکْرَمُ الذّی عَلَّمَ بالْقَلَم

سپاس خدای رحمان را که با کمک و لطف بی پایان او توانستم، گامی دیگر در حیطهٔ ریاضیات بردارم. در رابطه با تهیه این پایان نامه، لازم می‌دانم از استاد گرامی جناب آقای دکتر فرهاد رحمتی، که با راهنمایی‌های مفید و راهگشای خود، کمک‌های فراوانی به من نمودند، قدردانی نمایم.

همچنین از جناب آقای دکتر محمّد ابراهیمی و جناب آقای دکتر محمّدمهدی زاهدی که بر بنده منت نهادند و به عنوان داور اوقات شریف خود را صرف مطالعهٔ این پایان نامه نمودند، کمال تشکر را دارم.

در ضمن از همیاری اساتید محترم بخش ریاضی دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان، که با مساعدت‌های فکری و علمی خود باعث پیشرفت بنده در دوران تحصیلم شده‌اند، سپاسگزارم وتوفیق روزافزون همگی آنها را از ایزدمنان خواهانم.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا خواص توابع Ass(-) و Att(-) را مورد بررسی قرار می‌دهیم به طوری که برای مدولهای نوتری مفهوم Ass(-) و برای مدولهای آرتینی مفهوم Att(-) بکار گرفته می‌شود. در ادامه برای مجموعه بستهٔ ضربی Δ از ایده‌الهای حلقه، Δ ـ بستار ایده‌ال‌ها را معرفی نموده و به Δ ـ بستار زیر مدولهای یک مدول توسعه می‌دهیم و به عنوان دوگان Δ ـ بستار، مفهوم Δ ـ هسته را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که برای هر ایده‌ال $H \in \Delta$ ، هر مقسوم علیه اول $\frac{M}{N_\Delta}$ ، یک مقسوم علیه اول $\frac{M}{(HN)_\Delta}$ و $\frac{M}{HN_\Delta}$ خواهد بود ودر حالت خاص نتیجه می‌گیریم که برحسب n ، مجموعه‌های $\left\{Ass_R\left(\frac{M}{(I^nM)_\Delta}\right)\right\}_n$ و $\left\{Att_R\left(0 :_M I^n\right)_\delta\right\}_n$ غیر کاهشی‌اند. که در آن به ترتیب M ، نوتری و آرتینی است و $I \in \Delta$.

در نهایت به کمک ابزارهای فوق نشان می‌دهیم که اگر I ایده‌آلی از حلقه R و N زیر مدولی از R‌ـ مدول نوتری M باشد، آنگاه مجموعه‌های $Ass_R\left(\frac{I^nM}{I^nN}\right)$ و $Ass_R\left(\frac{M}{I^nN}\right)$ برای n های بزرگ ثابت‌اند. همچنین به عنوان دو گان این مطلب نشان می‌دهیم که اگر M یک R ـ مدول آرتینی باشد و $N' \subseteq N$ دو زیر مدول از آن باشند آنگاه مجموعه‌های $Att_R((N :_M I^n)/(N' :_M I^n))$ و $Att_R(N :_M I^n)$ برای n های بزرگ ثابت‌اند.

فهرست مطالب

مقدمه

برای روشن شدن هدفی که در این پایان نامه به دنبال آن هستیم، لازم است کمی با تاریخچهٔ این موضوع و مقالاتی که در جهت رسیدن به این هدف گام برداشته‌اند، آشنا گردیم.

در سال ۱۹۷۹ بُردمن (Brodman) در مقاله [2] نشان داد که اگر R حلقه‌ای نوتری، I ایده‌الی از R و M ، R مدولی با تولید متناهی باشد آنگاه مجموعه‌های $Ass_R(\frac{M}{I^n M})$ برای n های بزرگ مستقل از n می‌باشند. در سال ۱۹۸۶ شارپ (Sharp) در مقالهٔ [21] نشان داد که اگر A یک R ـ مدول آرتینی و R یک حلقهٔ کامل موضعی و نوتری باشد آنگاه مجموعه‌های $Att_R(0 :_A I^n)$ برای n های بزرگ مستقل از n هستند. این نتیجه را شاید بتوان به عنوان یک دوگان برای نتایج بردمن در نظر گرفت. ولی با این وجود این سوال مطرح می‌شود که آیا با اجتناب از حلقه‌های کامل موضعی و نوتری، می‌توان دوگان مناسبی برای نتایج بردمن، پیدا نمود؟

در سال ۱۹۸۷ راتلیف (Ratliff) ، در مقاله [18] ، Δ بستار یک ایده‌ال را تعریف نمود و یک عملگر بستاری تولید کرد.

در سال ۱۹۸۸ شارپ و دکتر طاهری زاده در مقاله [22] تئوری بستار صحیح یک ایده ال، نسبت به مدول آرتینی A را معرفی کردند و به کمک آن مطالبی را در مورد $Att(O :_A \overline{I^n})$ بیان نمودند تا راهی برای به دست آوردن یک دوگان مناسب برای نتایج بردمن ارائه دهند.

شارپ در سال ۱۹۸۹ در مقالهٔ جدیدتری [23] به این نتیجه رسید که اگر A ، آرتینی و انژکتیو باشد آنگاه دنبالهٔ مجموعه‌های $Att(O :_A \overline{I^n})$ که در مقالهٔ قبلی‌اش پیدا کرده بود،

برای nهای بزرگ با پایان است. با این وجود شاید هدف وی برآورده نمی‌شود زیــرا ایــن مسیر هیچ نتیجه‌ای برای مدولهای آرتینی که غیر انژکتیو باشند، ارائه نمی‌دهد و باز هم بیان کنندهٔ دوگان مناسبی برای نتایج بردمن در سال ۱۹۷۹ نیست.

در رسالهٔ حاضر که براساس مقاله [20] از دیوید راش (David Rush) ، تنظیــم شــده، هدف این است که دوگان مذکور پیدا گردد و در ضمن عملیات Δ ـ بستاری که پروفسور راتلیف در [18] برای ایده‌آلها معرفی کرده است به زیر مدولها توسعه دهیم و ارتباطی بین Δ ـ بستار زیر مدولها و این ایده‌الهای اول مجانبی بیابیم. به این گونه که ثــابت می‌کنیــم، دنبالهٔ مجموعه‌های $Ass(\frac{M}{(I^nM)_\Delta})$ و $Att(O \underset{M}{:} I^n)_\delta$، غــیر کاهشــی‌اند. همچنیــن ثــابت می‌کنیم که اگر N زیر مدولی از M باشد، دنبالهٔ مجموعه‌های $Ass_R(\frac{M}{I^nN})$ برای n هـــای بزرگ ثابت‌اند. که در واقع با قرار دادن N=M مشاهده می‌گردد که این تعمیمی برای نتیجهٔ بردمن اســـت ودر خاتمــه بــه عنــوان دوگــان آن، نشــان می‌دهیــم دنبالــهٔ مجموعــه‌های $Att_R(N \underset{M}{:} I^n)$ برای n های بزرگ ثابت‌اند. که در آن M ، R ـ مدولــی آرتینــی، N زیــر مدولی از M و I ایده الی از حلقهٔ R است.

در تدوین این پایان نامه سعی شده است که مطالب در شش فصل متمرکز گردد. که در زیر توضیحات کوتاهی در مورد این فصلها می‌آوریم.

در فصل اول، با فرض اینکه خوانندهٔ پایان نامه، با مفاهیم جبر پیشــرفته آشــنایی دارد، تعاریف، پیش نیازها و یادآوریهایی ا زجبر پیشرفته و جبر جابجایی آورده شده است. کــه امید است، برای خواننده مفید واقع شود. در این فصــل از مراجــع [1]، [6] ، [3] ، [11] و [10] استفاده شده است.

در فصل دوم، برخی از خواص و قضایای کلیدی توابــع (-) Ass و Att(-) را بررســی می‌کنیم به گونه‌ای که مفهوم دوگان بین مدولــهای نوتــری و آرتینــی بــه Ass(-) و Att(-) منتقل می‌شود. که در آن از مراجع [6]، [8] ، [9] ، [10] ، [4] و [12] استفاده شده است.

در فصل سوم، مفهوم Δ ـ بستار یک زیر مدول بیــان و خــواص گونــاگــون آن گفتــه می‌شود. همچنین نشان می‌دهیم عملگر بستاری $N \to N_{\Delta}$ برای زیر مدولها، یک عملگر نیمه اول است که در قانون Δ ـ حذف صدق می‌کنــد. درایــن فصــل از مراجــع [18] ، [19] و [22] استفاده شده است.

در فصل چهارم دو گان نتایج به دست آمده در فصل سوم را، برای مدولــهای آرتینــی می‌آوریم. در این فصل از مراجع [7] ، [8] ، [15] و [16] استفاده شده است.

در فصل پنجم، ابتدا نشــان می‌دهیــم کــه اگــر N زیــر مدولــی از R ـ مــدول M و Δ مجموعه‌ای بستهٔ ضربی، شامل ایده‌الهای R باشد، آنگاه به ازاء هر $H \in \Delta$ ، ایده‌الــهای اول وابستهٔ $\frac{M}{N\Delta}$ ، ایده‌الهای اول وابستهٔ $\frac{M}{(HN)_{\Delta}}$ و خواهند بود. و به وسیلهٔ آن رابطه‌ای بیــن ایده‌الهای اول مجانبی و Δ ـ بستار پیدا خواهیم کرد. سپس دوگان آن را بــرای ایده‌الــهای اول متصل و Δ- هسته می‌آوریم. در این فصــل از منــابع [2] ،[5] ، [17] و [18] اســتفاده شده است.

درفصل ششم نشان می‌دهیم که اگر I ایده‌الی از حلقه R و N زیر مدولی از R- مــدول نوتری M باشد، آنگاه مجموعه‌های $Ass_R(\frac{I^nM}{I^nN})$ و $Ass_R(\frac{M}{I^nN})$ بــرای n هــای بــزرگ ثابت‌اند. همچنین به عنوان دوگان مطلب فوق نشان می‌دهیم کــه اگــر M یــک R- مــدول آرتینی و $N' \subseteq N$ دو زیر مدول آن باشند آنگاه مجموعه‌های $Att_R\left(\frac{(N \underset{M}{:} I^n)}{(N' \underset{M}{:} I^n)}\right)$ و

$Att_R(N \underset{M}{:} I^n)$ برای n های بزرگ ثابت‌اند. دراین فصل از منــابع [2]، [8] ، [11] ، [14] ، [13] ، [21]، [12] ، [23] ، [25] و [24] استفاده شده است.

در سراسر پایان نامه R، حلقه‌ای جابجایی و یکدار فرض شده است.

فصل اول

تعاریف و پیش نیازها

در این فصل، تعاریف و قضایای پیش نیازبرای تهیهٔ این پایان نامه، آورده شده است. اکثر این مطالب، در دروس جبر پیشرفته و جبر جابجایی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند لذا از آوردن اثبات قضایا خودداری شده است.

۱ـ۱ تعریف

فرض کنیم T یک مجموعهٔ ناتهی و $\leq$ یک رابطه در T باشد. گوییم T توسط رابطهٔ $\leq$ به طور جزئی مرتب[1] شده است هر گاه $\leq$ منعکس، متعدی و پادمتقارن باشد.

۱ـ۲ تعریف

مجموعهٔمرتب جزئی $(X,\subseteq)$ را جهت دار[2] نامیم هر گاه به ازای هر $A,B\in X$ ، $C\in X$ ای موجود باشد به طوری که، $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$.

۱ـ۳ تعریف

مجموعهٔ مرتب جزئی $(X,\subseteq)$ را جهت دار پایین[3] نامیم هر گاه به ازاء هر $A,B\in X$ ، $C\in X$ موجود باشد به طوری که $C\subseteq A$ و $C\subseteq B$.

۱ـ۴ تعریف

فرض کنیم M یک R – مدول بوده و T مجموعهٔ زیر مدولهای M باشد. اگر هر دنبالهٔ صعودی مانند $N_1\subseteq N_2\subseteq\ldots$ از عناصر T از مرحله‌ای به بعد متوقف شود گوئیم M در شرط زنجیرهای افزایشی (ACC) روی زیر مدولهایش صدق می‌کند. به عنوان دوگان این مطلب اگر هر دنبالهٔ نزولی مانند $N_1\supseteq N_2\supseteq\ldots$ از عناصر T از مرحله‌ای به بعد متوقف شود گوییم M در شرط زنجیرهای کاهشی (DCC) صدق می‌کند.

1- Partially ordered set

2- Directed set

3- Downward directed set

۱ـ۵ تعریف

فرض کنید M یک Rـ مدول باشد. گوییم M مدولی نوتری[1] است هر گاه در یکی از دو شرط معادل زیر صدق کند:

الف. هر خانواده ناتهی از زیر مدولهای M با نسبت جزئیت عضو ماکزیمال داشته باشد.

ب. مجموعهٔ زیر مدولهای M در (ACC) صدق کند.

۱ـ۶ تعریف

فرض کنید M یک Rـ مدول باشد. گوییم M مدولی آرتینی[2] است هر گاه در یکی از دو شرط معادل زیر صدق کند:

الف. هر خانواده ناتهی از زیر مدولهای M با نسبت جزئیت دارای عضو مینیمال باشد.

ب. مجموعهٔ زیر مدولهای M در (DCC) صدق کند.

۱ـ۷ قضیهٔ پایهٔ هیلبرت[3]

اگر M یک Rـ مدول نوتری باشد، آنگاه $M[x_1,\ldots,x_n]$ یک $R[x_1,\ldots,x_n]$ ـ مدول نوتری است.

برهان: اثبات این قضیه، مانند اثبات قضیهٔ پایه هیلبرت درمورد حلقهٔ چند جمله‌ایهاست. به قضیهٔ (۵ـ۷) از مرجع [1] مراجعه شود.

۱ـ۸ تعریف

رشتهٔ $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ از Rـ مدولها و R- هومومورفیسم ها را یک رشته دقیق[1] گوییم هر گاه f منومورفیسم و g اپی مورفیسم باشدو Imf=Kerg .

1- Notherian Module

2- Artinian Module

3- Hilbert theorem

۱ـ۹ قضیه

فـرض کنیـد $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ رشـــته‌ای دقیـــق از R – مدولـــهاو R –

همومورفیسم‌ها باشد در این صورت:

الف. M نوتری است اگر و تنها اگر M′ و M″ نوتری باشند.

ب. M آرتینی است اگر و تنها اگر M′ و M″ آرتینی باشند.

۱ـ۱۰ قضیه

فرض کنید N و L زیر مدولهایی از R – مدول M باشند به طـوری کـه $L \subset N$ در ایـن

صورت:

$$\frac{M/L}{N/L} \cong M/N$$

برهان: به گزارهٔ (۱ـ۲) از مرجع [1] مراجعه شود.

۱ـ۱۱ قضیه

فرض کنید N_1 و N_2 زیر مدولهایی از R – مدول M باشند. در این صورت:

$$\frac{N_1 + N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1 \cap N_2}$$

برهان: به گزاره (۱ـ۲) ازمرجع [1] رجوع شود.

۱-۱۲ قضیه

فرض کنیم $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ، ایده‌الهای اول حلقه R باشند و فـرض کنیـم I ایده‌الـی از R

باشد به طوری که $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ دراین صورت i ی هست که $1 \leq i \leq n$ و $I \subseteq P_i$

برهان: به مرجع [1] رجوع شود.

1- Exact sequence