دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

آمار ریاضی، گرایش احتمال

عنوان

قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموع وزنی متغیرهای تصادفی همبسته منفی

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی

استاد مشاور

دکتر الهام دسترنج

پژوهشگر

مریم عباسی علی کمر

۲۸آبان۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: عباسی علی‌کمر نام: مریم

عنوان: قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموع وزنی متغیرهای تصادفی همبسته منفی

استاد راهنما: دکتر احمد نزاکتی
استاد مشاور: دکتر الهام دسترنج

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: آمار ریاضی گرایش: احتمال

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۲۸آبان۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۷۵

واژگان کلیدی: همگرایی کامل- متغیرهای تصادفی پیوندی منفی- قانون قوی اعداد بزرگ- دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و پیوندی منفی- متغیرهای تصادفی m پیوندی منفی

چکیده

از قضایای مهم در نظریه احتمال، قضایای حدی می‌باشند. در میان آن‌ها قانون اعداد بزرگ از اهمیت خاصی برخوردار است. در این قانون تحت شرایطی خاص، میانگین متغیرهای تصادفی به امید ریاضی خود همگرا می‌شود. این قانون اولین بار درسال ۱۷۱۳ میلادی مطرح شد. سال‌ها بعد با معرفی مفهوم پیوند منفی برای متغیرهای تصادفی، دانشمندان بسیاری به بررسی همگرایی کامل برای متغیرهای تصادفی پیوندی منفی پرداختند. هدفی که در این پایان‌نامه دنبال می‌کنیم بررسی قضایای حدی (قانون قوی اعداد بزرگ) و سرعت همگرایی برای مجموع‌های موزون متغیرهای تصادفی پیوندی منفی است. باتوجه به اهمیت قانون قوی اعداد بزرگ، با در نظر گرفتن شرایط مختلف برای متغیرهای تصادفی پیوندی منفی، همگرایی کامل را برای مجموع‌های موزون بررسی خواهیم کرد.

تقدیم به خداوندی که

در دانایی بی‌مانند است...

تقدیم به پدر بزرگوار و مادر مهربانم

خدای را بسی سپاس گزارم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آن ها شاخ و برگ گیرم و در سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش کنم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چراکه این دو وجود، پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند. دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر فراز و نشیب به من آموختند. عزیزانی که برایم زندگی کردن و انسان بودن را معنا کردند. همچنین از محبت سرشار خواهران عزیزم که همواره گرمای وجودشان آرامش بخش لحظات زندگیم بوده سپاس گزارم. برایشان آرزوی بهترین ها را دارم...

حال این برگ سبزی است تحفه درویش، تقدیم به خانواده ام که تمام هستی من، هستند...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر نزاکتی صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که به‌طور قطع بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از خانم دکتر دسترنج که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را تقبل نمودند، سپاس‌گزارم.
از تمامی اساتید گروه آمار که در دو سال گذشته علم سرشار خود را به من آموختیند قدردانی می‌کنم. امیدوارم توانسته باشم با این پایان‌نامه پاسخگوی زحمات آنان باشم.
همچنین از عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش دوستان و هم‌کلاسی‌های مهربانم که در سردترین روزگار همراهم بودند سپاس‌گزارم و آرزومندم روزگاری پر از موفقیت و خوشبختی و شادکامی درانتظارشان باشد.

مریم عباسی علی کمر
۲۸ آبان ۱۳۹۲

پیش‌گفتار:

از مهم‌ترین نتایج نظری در نظریه احتمال، قضایای حدی می‌باشند. در میان این قضایا، قانون اعداد بزرگ از اهمیت خاصی برخوردار است. در قانون اعداد بزرگ تحت شرایطی، میانگین یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم توزیع به امید ریاضی مشترکشان همگرا می‌شود. قانون قوی اعداد بزرگ برای انواع متغیرهای تصادفی وابسته توسط افراد بسیاری از جمله نزاکتی[۱]، می هاو کو[۲]و جونگ بییک و همکاران[۳] مورد بررسی قرار گرفته است. در این پایان‌نامه پس از معرفی متغیرهای تصادفی پیوندی منفی و بررسی ویژگی‌های آن‌ها، قانون قوی اعداد بزرگ و سرعت همگرایی را تحت شرایط مختلف برای این متغیرها مورد بررسی می‌دهیم.

پایان‌نامه پیش رو در چهار فصل گردآوری شده است. مطالب هر یک از فصل‌ها به شرح زیر هستند:

- در فصل ۱، گذری بر تاریخچه موضوع مورد بحث داریم، سپس به معرفی قانون قوی اعداد بزرگ و متغیرهای تصادفی پیوندی منفی، دیگر تعاریف مقدماتی و ویژگی‌های متغیرهای تصادفی پیوندی منفی پرداخته‌ایم. همچنین لم‌ها و قضایای کاربردی که در اثبات برخی روابط مورد استفاده قرار می‌گیرند را بررسی می‌کنیم.

- در فصل ۲، نخست قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموع موزون دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی آورده شده است. در این خصوص روابط بدست آمده توسط بای و چنگ[۴]در سال ۲۰۰۰ را مورد بررسی قرار داده‌ایم و سپس به جزییات قضیه‌ای کلی که اولین بار در سال ۲۰۰۸ توسط بینگ-یی جینگ و هان-یینگ لیانگ بیان شد پرداختیم. در بخش دوم به قضیه‌ای از این مقاله می‌پردازیم که در آن قانون قوی اعداد بزرگ مارسینکوویچ و زیگموند به متغیرهای تصادفی پیوندی منفی تعمیم داده شده است.

- در فصل ۳، در بخش اول روابطی از همگرایی کامل برای مجموع موزون آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی پرداخته‌ایم و در بخش دوم برخی نتایج به‌دست آمده در زمینه سرعت همگرایی آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

- در فصل ۴، نوع دیگری از پیوند با عنوان m-پیوندی منفی را معرفی کرده‌ایم و به تحقیق و بررسی همگرایی کامل برای آرایه‌هایی از این متغیرهای تصادفی پرداخته‌ایم. قضیه اصلی در این فصل مربوط به مطالعات هو و همکاران [۵]در سال ۲۰۰۹ است که نه تنها نتایج قبلی را گسترش دادند، بلکه اثباتی ساده‌تر برای آن ارایه دادند.

---

[۱] Nezakati(2005)
[۲] Mi-Hwa Ko(2011)
[۳] Jong-Baek et al (2008)
[۴] Bai & Cheng
[۵] Hu et al(2009)

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ تاریخچه

علم نظریه احتمال در آغاز برای بررسی بازی‌های شانس ابداع شد، با گسترش آن، به تدریج به نظام گسترده‌ای تبدیل شد که با بسیاری از شاخه‌های ریاضی مرتبط بود. در خلال این گسترش، این علم نقش اساسی در قالب‌سازی ریاضی برای علوم کاربردی گوناگون، مانند آمار، تحقیق در عملیات، زیست‌شناسی، اقتصاد، روانشناسی و ... داشت. بازتاب این پیشرفت‌ها، تغییر متون بسیاری از کتب احتمال مربوط به بازی‌های تصادفی و نظریه خطاها بود، که به بخش‌های احتمالی مربوط می‌شد. این دوره با ظهور رساله کلاسیک فلر در سال ۱۹۵۰ میلادی به پایان رسید و این نظریه به نظام ریاضی مهمی برای مطالعه در بسیاری از زمینه‌های علمی تبدیل شد. قانون اعداد بزرگ اولین بار توسط ریاضیدان سوئیسی یاکوب برنولی[۱](۱۷۱۳) برای محاسبه احتمال در تئوری بازی‌ها ارائه شد و سال‌ها بعد یعنی در سال ۱۸۳۵ مورد توجه ریاضی‌دانان دیگر از جمله پاسکال [۲] و پواسن [۳] قرار گرفت. پس از آن‌ها نیز ریاضی‌دانان دیگری همچون چبیشف[۴] ، کانتلی [۵] ، مارکوف [۶]، بورل[۷]، کولموگروف[۸]و خین چین[۹]، تلاش‌های زیادی در جهت بهبود قانون اعداد بزرگ انجام دادند و سرانجام این مطالعات به تقسیم‌بندی قانون اعداد بزرگ به دو "قانون قوی " و " قانون

---

[۱]Bernoulli
[۲]Pascal
[۳]Poisson
[۴]Chebyshev
[۵]Cantelli
[۶]Markove
[۷]Borel
[۸]Kolmogoroff
[۹]Khinchin

ضعیف" منتهی شد.

مفهوم همبستگی (مثبت) متغیرهای تصادفی اولین بار در سال ۱۹۶۷ توسط ایساری[۱۰] و پروسچن[۱۱] و واکاآپ[۱۲] معرفی شد. از آن پس بسیاری از دانشمندان موضوعات مربوط به آن را گسترش دادند.

مارسینکوویچ و زیگموند[۱۳] قانونی به نام خودشان در سال ۱۹۳۷ برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع به‌دست آوردند. پس از آن همین نتیجه توسط فلر[۱۴](۱۹۴۶)به‌دست آمد. بعدها محققان زیادی از جمله چنترجی[۱۵](۱۹۷۰) و رسالسکس[۱۶] و استویکا[۱۷](۲۰۱۰) قانون قوی را در حالتی که متغیرهای تصادفی هم‌توزیع هستند و بدون شرط استقلال، به‌دست آوردند.

سال‌ها بعد، یعنی در سال ۱۹۸۱ مفهوم همبستگی منفی برای اولین بار توسط آلام[۱۸] و سکسنا[۱۹] معرفی شد، پس از آن‌ها در سال ۱۹۸۳، جاج-دو[۲۰] و پروسچن[۲۱] در مقاله مشترکی به بررسی برخی ویژگی‌های مهم در همبستگی منفی برای متغیرهای تصادفی پرداختند و نشان دادند همبستگی منفی نوعی وابستگی منفی در میان متغیرهای تصادفی است، با این تفاوت که همبستگی منفی یک برتری نسبت به وابستگی منفی دارد که عبارتست از این " توابع صعودی از مجموعه‌های مجزا بر روی متغیرهای تصادفی پیوندی منفی، باز هم پیوندی منفی خواهند بود." که این ویژگی برای وابستگی منفی برقرار نیست.

ما در این پایان‌نامه به بررسی مفاهیم و قضایای پیرامون متغیرهای تصادفی پیوندی منفی می‌پردازیم. برای آشنایی با انواع وابستگی منفی، آن‌ها را در این فصل معرفی می‌کنیم.

۲.۱ تعاریف

تعریف ۱.۲.۱. سیگما میدان[۲۲]

فرض کنید $\mathcal{F}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های Ω باشد، اگر برای هر عضو$\mathcal{F}$ مانند A دو خاصیت زیر برقرار

[۱۰] Esary
[۱۱] Proschan
[۱۲] Walkup
[۱۳] Marcinkiewicz & Zygmund
[۱۴] Feller
[۱۵] Chatterji
[۱۶] Rosalsky
[۱۷] Stoica
[۱۸] Alam
[۱۹] Sexena
[۲۰] Joag-Dev
[۲۱] Proschan
[۲۲] Sigma Field

باشد، آنگاه $\mathcal{F}$ یک سیگما جبر روی مجموعه Ω خواهد بود.

i: $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F},$

ii: $A_n \in \mathcal{F}, n \geq ۱ \Longrightarrow \cup_{n=۱}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$

تعریف ۲.۲.۱. فضای احتمال[۲۳]

فرض کنید Ω مجموعه‌ای دلخواه و $\mathcal{F}$ سیگما میدانی شامل تمام زیر مجموعه‌های Ω باشد، اگر P تابعی با دامنه $\mathcal{F}$ و برد $[۰, ۱]$ باشد، سه تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال خواهد بود، وقتی سه اصل زیر برقرار باشد:

(i)

$$P(\Omega) = ۱,$$

(ii) برای هر عضو مانند A متعلق به سیگما میدان،

$$P(A) \geq ۰,$$

(iii) اگر دنباله $A_۱, A_۲, A_۳, \ldots$ دو به دو مجزا و متعلق به سیگما میدان $\mathcal{F}$ باشند، به طوری که $\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i$ نیز عضو سیگما میدان باشد، آن‌گاه

$$P\Big(\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=۱}^{\infty} P(A_i).$$

دقت داشته باشید تمام متغیرهای تصادفی در نظر گرفته شده در قضایا و لم‌های این پایان‌نامه متعلق به فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ می‌باشد و ما از تکرار این موضوع اجتناب می‌کنیم.

تعریف ۳.۲.۱. آزمایش تصادفی[۲۴]

یک مفهوم اساسی برای بررسی پدیده‌های تصادفی، آزمایش تصادفی است. از جنبه‌ی نظری، آزمایش تصادفی عملی است که اولا تحت شرایط یکسان قابل تکرار باشد، ثانیا قبل از انجام، نتیجه‌ی آن مشخص نبوده ولی مجموعه‌ی تمام نتایج ممکن آن قابل تعیین باشد.

[۲۳] Probability Space
[۲۴] Random Experience

درعمل بسیاری از آزمایش‌ها را به‌صورت " آزمایش تصادفی" در نظر می‌گیریم، هر چند تکرار آن‌ها در شرایط واقعا یکسان امکان‌پذیر نباشد.

تعریف ۴.۲.۱. فضای نمونه[۲۵]

اولین قدم در بررسی یک آزمایش تصادفی، تعیین نتایج ممکن آزمایش است. از نظر ریاضی این عمل به معنی در نظر گرفتن یک مجموعه‌ی Ω است، به‌طوری‌که این مجموعه نمایان‌گر کلیه‌ی حالات و نتایج ممکن آزمایش باشد. این مجموعه را اصطلاحا فضای نمونه آزمایش و هر عضو آن را یک برآمد آزمایش می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۱. متغیر تصادفی[۲۶]

فرض کنید سه تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال باشد، تابع $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک متغیر تصادفی گوییم اگر و تنها اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$\{\omega : \omega \in \Omega \quad \& \quad X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}.$$

تعریف ۶.۲.۱. همگرایی کامل[۲۷]

دنباله $\{X_n, n \geq ۱\}$ از متغیرهای تصادفی همگرای کامل به ثابت θ است، اگر برای هر $\varepsilon > ۰$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P\{|X_n - \theta| > \varepsilon\} < \infty.$$

تعریف ۷.۲.۱. همگرایی قریب به یقین[۲۸]

دنباله $\{X_n, n \geq ۱\}$ از متغیرهای تصادفی، به‌طور قریب به یقین $(a.s.)$ به متغیر تصادفی X همگراست، اگر و تنها اگر

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega) \quad as \quad n \to \infty\}) = ۱.$$

دقت نمایید که این همگرایی را به این صورت نمایش می‌دهیم که $X_n \overset{a.s.}{\to} X \quad as \quad n \to \infty$.

قضیه ۸.۲.۱. *قانون قوی اعداد بزرگ* [۲۹]

اگر $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای نامتناهی از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با امید ریاضی یکسان μ باشد

[۲۵] Sample Space
[۲۶] Random Variable
[۲۷] Complete Convergence
[۲۸] Almost Surely Convergence
[۲۹] Strong law of large numbers

و $E(|X_i|) < \infty$ و $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ، آن‌گاه

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \mu \quad n \longrightarrow \infty.$$

تعریف ۹.۲.۱. تابع نشانگر[۳۰]

تابعی از Ω به $\{0,1\}$، مشخص کننده‌ی زیرمجموعه‌ای مانند A از Ω است و با نماد $I_A : \Omega \to \{0,1\}$ نمایش داده می‌شود و به این صورت تعریف می‌شود

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

تعریف ۱۰.۲.۱. تابع O بزرگ[۳۱]

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی از اعداد حقیقی مثبت باشند، آن‌گاه برای $x \to \infty$

$$f(x) = O\Big(g(x)\Big),$$

اگر و تنها اگر مقدار ثابتی مانند C و عدد حقیقی x_0 وجود داشته باشد، به طوری که برای همه $x > x_0$ داشته باشیم

$$f(x) \leq Cg(x).$$

تعریف ۱۱.۲.۱. تابع o کوچک

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی از اعداد حقیقی مثبت باشند، آن‌گاه برای $x \to \infty$

$$f(x) = o\Big(g(x)\Big),$$

اگر و تنها اگر

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

تعریف ۱۲.۲.۱. متغیرهای تصادفی به طور تصادفی مغلوب[۳۲]

یک آرایه $\{X_{ni}, i \geq 1, n \geq 1\}$ از متغیرهای تصادفی را به طور تصادفی مغلوب با متغیر تصادفی X گویند، هرگاه ثابت مثبت D وجود داشته باشد و برای هر $x \geq 0$

$$P[|X_{ni}| > x] \leq DP[D|X| > x].$$

[۳۰] Indicator
[۳۱] Order Function
[۳۲] Stochastically dominated

تعریف ۱.۲.۱۳. آرایه تاپلیتس[۳۳]

آرایه دو بعدی $\{a_{ni}, i \geq ۱, n \geq ۱\}$ از اعداد حقیقی را آرایه‌ای تاپلیتس گوییم، هرگاه دوشرط زیر توام برقرار باشند

(i) برای هر $i \geq ۱$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} a_{ni} = ۰$.

(ii) برای هر $n \geq ۱$ و ثابت مثبت c داشته باشیم $\sum_{i=۱}^{\infty} |a_{ni}| \leq c$.

تعریف ۱.۲.۱۴. تابع محدب[۳۴]

تابع g با مقادیر حقیقی را محدب گوییم، اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in [۰, ۱]$ داشته باشیم

$$g(\alpha x + (۱-\alpha)y) \leq \alpha g(x) + (۱-\alpha)g(y).$$

۱.۳ انواع متغیرهای تصادفی وابسته منفی

تعریف ۱.۳.۱. متغیرهای تصادفی وابسته منفی[۳۵]

متغیرهای تصادفی $X_۱, \ldots, X_n, n \geq ۲$ وابسته منفی(ND) خواهند بود، اگر برای هر $x_۱, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$P\Big(\bigcap_{i=۱}^{n}\{X_i \leq x_i\}\Big) \leq \prod_{i=۱}^{n} P(X_i \leq x_i),$$

و

$$P\Big(\bigcap_{i=۱}^{n}\{X_i > x_i\}\Big) \leq \prod_{i=۱}^{n} P(X_i > x_i).$$

تعریف ۱.۳.۲. (لهمن.۱۹۶۶) متغیرهای تصادفی وابسته ربعی منفی [۳۶]

دو متغیر X, Y را وابسته ربعی منفی (NQD) گوییم هرگاه به ازای هر x, y

$$P[X \leq x, Y \leq y] \leq P[X \leq x]P[Y \leq y]. \qquad (۱.۱)$$

[۳۳] Toeplitz
[۳۴] Convex Function
[۳۵] Negative Dependent
[۳۶] Negative Quadrant Dependent

به این نکته دقت نمایید که از تعریف ۲.۳.۱ می‌توان نتیجه گرفت که بازای هر x و y

$$P[X > x, Y > y] \leq P[X > x]P[Y > y]. \tag{۲.۱}$$

زیرا

$$\begin{aligned} P[X > x, Y > y] &= ۱ - P[X \leq x \quad \text{یا} \quad Y \leq y] \\ &= ۱ - P[X \leq x] - P[Y \leq y] + P[X \leq x, Y \leq y] \\ &\leq ۱ - P[X \leq x] - P[Y \leq y] + P[X \leq x]P[Y \leq y] \\ &= (۱ - P[X \leq x])(۱ - P[Y \leq y]) = P[X > x]P[Y > y]. \end{aligned}$$

به طور مشابه رابطه (۱.۱) را می‌توان (۲.۱) از به دست آورد. بنابراین این دو رابطه معادل هستند.

تعریف ۳.۳.۱. (جاج دو و پروسچن.۱۹۸۳) **متغیرهای تصادفی وابسته متعامد منفی** [۳۷]

متغیرهای تصادفی $X_۱, \ldots, X_n$ را از بالا وابسته متعامد منفی [۳۸] ($NUOD$) گوییم، اگر برای اعداد حقیقی $x_۱, \ldots, x_n$ داشته باشیم

$$P(X_۱ > x_۱, \ldots, X_n > x_n) \leq \prod_{i=۱}^{n} P(X_i > x_i),$$

و از پایین وابسته متعامد منفی[۳۹] ($NLOD$) خواهند بود، اگر

$$P(X_۱ \leq x_۱, \ldots, X_n \leq x_n) \leq \prod_{i=۱}^{n} P(X_i \leq x_i).$$

در نهایت متغیرهای تصادفی $X_۱, \ldots, X_n$ را وابسته متعامد منفی (NOD) گوییم، اگر هم $NLOD$ و هم $NUOD$ باشند.

برای آشنایی با انواع دیگری از متغیرهای تصادفی وابسته با عنوان متغیرهای تصادفی وابسته معکوس منظم از درجه دو [۴۰] ($RR۲$) و متغیرهای تصادفی وابسته منفی در دنباله که شامل متغیرهای بطور شرطی

[۳۷] Negative Orthant Dependent
[۳۸] Negative Upper Orthant Dependent
[۳۹] Negative Lower Orthant Dependent
[۴۰] Reverse Regular Of Order Two

نزولی در دنباله[۴۱] (CDS) و متغیرهای وابسته منفی در دنباله[۴۲] (NDS) هستند، به مقاله جاج-دو و پرسچن (۱۹۸۱) مراجعه کنید. در پایان این بخش به تعریف متغیرهای تصادفی پیوندی منفیمیپردازیم و در بخش بعد ویژگی‌های آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۴.۳.۱. (آلام و سکسنا.۱۹۸۱) [۴۳]**متغیرهای تصادفی پیوندی منفی**

متغیرهای تصادفی $X_1, \cdots, X_k$ را پیوندی منفی(NA) گوییم، اگر برای هر جفت زیرمجموعه مجزای A_1, A_2 از $\{1, \cdots, k\}$ و توابع نانزولی f, g در هر بعدی

$$cov(f(X_i, i \in A_1), g(X_j, j \in A_2)) \leq 0.$$

در صورتی که کوواریانس برای متغیرهای تصادفی وجود داشته باشد.

تعریف ۵.۳.۱. **دنباله پیوندی منفی**

دنباله $\{X_n, n \geq 1\}$ از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی خواهد بود، اگر هر زیر دنباله متناهی آن پیوندی منفی باشد.

تعریف ۶.۳.۱. **دو متغیر تصادفی پیوندی منفی**[۴۴]

متغیرهای تصادفی X و Y پیوندی منفی هستند اگر و تنها اگر یکی از نامساوی‌های زیر برقرار باشد، وقتی $x, y \in \mathbb{R}$

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} \leq P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}, \quad P\{X \leq x, Y < y\} \leq P\{X \leq x\}P\{Y < y\},$$

و یا

$$P\{X < x, Y \leq y\} \leq P\{X < x\}P\{Y \leq y\}, \quad P\{X < x, Y < y\} \leq P\{X < x\}P\{Y < y\}.$$

۴.۱ ویژگی‌های متغیرهای تصادفی پیوندی منفی

- **ویژگی اول**

برای هر دو متغیر تصادفی، خاصیت NQD با NA معادل است.

[۴۱] Conditionally Decreasing In Sequence
[۴۲] Negatively Dependeny In Sequence
[۴۳] Negatively Associated
[۴۴] M.Gerasimov & V.Kruglov & A.Volodin

امینی در سال ۱۹۹۹ ثابت کرد "دو متغیر تصادفی Xو Y، NQD هستند اگر و تنها اگر به ازای هر دو تابع نانزولی دلخواه fو g، $cov(f(X), g(Y)) \leq ۰$ برقرار باشد." شرط این قضیه همان خاصیت پیوندی منفی برای دو متغیر تصادفی است. پس برای هر دو متغیر تصادفی، خاصیت NQD با NA معادل خواهد بود.

- **ویژگی دوم**

توابع نانزولی تعریف شده بر روی زیرمجموعه‌های مجزا از مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی، پیوندی منفی خواهند بود.

برهان: فرض کنید $f_r(x_{r,۱}, \dots, x_{r,m_r})$ توابع حقیقی مقدار نانزولی در هر بعد باشد که $x_{r,۱}, \dots, x_{r,m_r}$ مقادیر حقیقی هستند و $m_۱, \dots, m_n \in \mathbb{N}$، همچنین فرض کنید $X_{r,۱}, \dots, X_{r,m_r}$ برای $r = ۱, \dots, n$ زیرمجموعه‌های مجزا از یک مجموعه از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی باشند. به علاوه fو g توابعی نانزولی باشند.

توابع مرکب f' و g' را درنظر بگیرید

$$f'(x_{۱,۱}, \dots, x_{k,m_k}) = f\Big(f_۱(x_{۱,۱}, \dots, x_{۱,r_۱}), \dots f_k(x_{k,۱}, \dots, x_{k,r_k})\Big)$$

و

$$g'(x_{k+۱,۱}, \dots, x_{n,m_n}) = g\Big(f_{k+۱}(x_{k+۱,۱}, \dots, x_{k+۱,m_{k+۱}}), \dots f_n(x_{n,۱}, \dots, x_{n,m_n})\Big)$$

که توابعی کراندار هستند. به علاوه می‌دانیم که ترکیب توابع صعودی، صعودی است. پس اگر

$$Y_r = f_r(X_{r,۱}, \dots, X_{r,m_r}), \quad r = ۱, \dots, n.$$

از آن‌جا که متغیرهای تصادفی $X_{۱,۱}, \dots, X_{n,m_n}$ پیوندی منفی هستند، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &cov\Big(f(Y_۱, \dots, Y_k), g(Y_{k+۱}, \dots, Y_n)\Big) \\ &= cov\Big(f'(X_{۱,۱}, \dots, X_{k,m_k}), g'(X_{k+۱}, \dots, X_{n,m_n})\Big) \leq ۰, \end{aligned}$$

به این معنا که $Y_۱, \dots, Y_n$ پیوندی منفی هستند.

- **ویژگی سوم**

برای زیر مجموعه‌های مجزای $A_۱$ و$A_۲$ از مجموعه $\{۱,\dots,k\}$ و مقادیر حقیقی $x_۱,\dots,x_k$ خواهیم داشت

$$P\big(X_i \le x_i, i=۱,\dots,k\big) \le P\big(X_i \le x_i, i\in A_۱\big)P\big(X_j \le x_j, j\in A_۲\big),$$

و

$$P\big(X_i > x_i, i=۱,\dots,k\big) \le P\big(X_i > x_i, i\in A_۱\big)P\big(X_j > x_j, j\in A_۲\big).$$

در نتیجه به طور خاص $X_۱,\dots,X_k$ دارای خاصیت NODخواهند بود. پس با توجه به این که $A_۱$ و $A_۲$ دو زیرمجموعه‌ی مجزا هستند و با توجه به تعریف NOD، این ویژگی به راحتی اثبات می‌گردد.

- **ویژگی چهارم**

اگر دنباله‌ای پیوندی منفی باشد، آن‌گاه هر زیردنباله آن نیز پیوندی منفی خواهد بود.

- **ویژگی پنجم**

یک مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل، پیوندی منفی خواهد بود.

جزییات اثبات ویژگی چهارم و پنجم را در مقاله‌ی مشترک جاج-دو و پروسچن (۱۹۸۳) ملاحظه نمایید.

- **ویژگی ششم**

فرض کنید $A_۱,\dots,A_m$ زیرمجموعه‌های مجزا از $\{۱,\dots,k\}$ هستند، $f_۱,\dots,f_m$ توابع صعودی مثبت و $X_۱,\dots,X_k$ پیوندی منفی باشند، داریم

$$E\prod_{i=۱}^{m} f_i(X_j, j\in A_i) \le \prod_{i=۱}^{m} Ef_i(X_j, j\in A_i)$$

برای بررسی این ویژگی می‌توان از استقرا استفاده کرد. درستی رابطه را برای $m=۲$ بررسی می‌کنیم. سپس فرض می‌کنیم برای $m=l$ حکم برقرار است و در نهایت نشان می‌دهیم برای $m=l+۱$ رابطه برقرار می‌شود. پس بنابر خاصیت پیوندی منفی داریم

$$cov(f_۱(X_۱), f_۲(X_۲)) \le ۰,$$

$$E(f_۱(X_۱).f_۲(X_۲)) - Ef_۱(X_۱)Ef_۲(X_۲) \leq ۰,$$

$$m = ۲ \quad : \quad E[f_۱(X_۱)f_۲(X_۲)] \leq Ef_۱(X_۱)Ef_۲(X_۲).$$

بنا بر ویژگی دوم، توابع نانزولی تعریف شده بر روی مجموعه‌های مجزا از متغیرهای تصادفی $X_۱$ و $X_۲$ دارای خاصیت پیوندی منفی خواهند بود، پس برای $m = ۲$ درستی حکم برقرار است.

بنا به استقرا فرض کنید حکم برای $m = l$ برقرار است.

$$m = k \quad : \quad E\prod_{i=۱}^{l} f_i(X_j, j \in A_i) \leq \prod_{i=۱}^{k} Ef_i(X_j, j \in A_i),$$

پس برای $m = l + ۱$

$$\begin{aligned} E\prod_{i=۱}^{l+۱} f_i(X_j, j \in A_i) &= E(\prod_{i=۱}^{l} f_i(X_j, j \in A_i)f_{l+۱}) \leq E\prod_{i=۱}^{l} f_i(X_j, j \in A_i)Ef_{l+۱} \\ &\leq \prod_{i=۱}^{l} Ef_i(X_j, j \in A_i)Ef_{l+۱} = \prod_{i=۱}^{l+۱} Ef_i(X_j, j \in A_i). \end{aligned}$$

- **ویژگی هفتم**(جاج-دو و پروسچن.۱۹۸۳) اجتماع مجموعه‌های مستقل از متغیرهای تصادفی پیوندی منفی، پیوندی منفی هستند.

برهان. فرض کنید X و Y بردارهایی مستقل می‌باشند که هر کدام دارای خاصیت NA هستند. برای اثبات این ویژگی باید نشان دهیم (X, Y) دارای خاصیت NA می‌باشد. فرض کنید $(X_۱, X_۲)$ و $(Y_۱, Y_۲)$ به ترتیب افرازهای دلخواهی از X و Y هستند و f و g توابع صعودی دلخواه باشند. اگر $E\{f(X_۱, Y_۱)|Y_۱\}$ تابعی اندازه‌پذیر از $Y_۱$ باشد، خواهیم داشت

$$E\{f(X_۱, Y_۱)|Y_۱, Y_۲\} = E\{f(X_۱, Y_۱)|Y_۱\},$$

به همین ترتیب رابطه مشابهی برای $E\{g(X_۲, Y_۲)|Y_۲\}$ برقرار است. امیدهای ریاضی شرطی را به

ترتیب با $h_۱(Y_۱)$ و $h_۲(Y_۲)$ نشان می‌دهیم که صعودی هستند. بنابراین

$$\begin{aligned} E\{f(X_۱,Y_۱)g(X_۲,Y_۲)\} &= E[E\{f(X_۱,Y_۱)g(X_۲,Y_۲)|Y_۱,Y_۲\}], \\ &\leq E\{h_۱(Y_۱),h_۲(Y_۲)\} \leq E\{h_۱(Y_۱)\}E\{h_۲(Y_۲)\}, \qquad (۳.۱) \\ &= E\{f(X_۱,Y_۱)\}E\{g(X_۲,Y_۲)\}, \\ &\Rightarrow cov(f(X_۱,Y_۱),g(X_۲,Y_۲)) \leq ۰. \end{aligned}$$

نامساوی اول در رابطه (۳.۱) از آنجا برقرار است که $(X_۱,X_۲)$ مستقل از $(Y_۱,Y_۲)$ می‌باشند و نامساوی دوم به این دلیل برقرار است که $(Y_۱,Y_۲)$ دارای خاصیت NA هستند. در نتیجه افزارهای دلخواهی از دنباله‌های X و Y دارای خاصیت پیوندی منفی هستند و در نهایت اجتماع آن‌ها نیز پیوندی منفی خواهند بود. □

توجه نمایید که ویژگی دوم و هفتم در گستره کابردهای پیوندی منفی هستند.[۴۵]

۵.۱ قضایای کاربردی

دقت داشته باشید در صورتی که متغیرهای تصادفی پیوندی منفی را برش دهیم، ممکن است این ویژگی را از دست بدهند. به این دلیل در قضیه بعدی تکنیکی مهم برای برش یکنوا را بررسی می‌کنیم که ویژگی پیوندی منفی بودن متغیرهای تصادفی را حفظ می‌کند.

قضیه ۱.۵.۱. (*گراسیموف و همکاران.۲۰۱۲*) *فرض کنید* $X_n, n \geq \mathbb{N}$ *متغیرهای تصادفی پیوندی منفی باشند، آن‌گاه برای هر* $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ *و* $a_n \leq b_n$ *وقتی* f_n *به این صورت تعریف شود*

$$f_n(x) = a_n I_{(-\infty,a_n)}(x) + xI_{[a_n.b_n]}(x) + b_n I_{(b_n,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

متغیرهای تصادفی $Y_n = f_n(X_n)$ *همبسته منفی خواهند بود.*

برهان. تابع $f_n(x), x \in \mathbb{R}$ نانزولی است و بنا بر ویژگی دوم متغیرهای تصادفی پیوندی منفی، متغیرهای تصادفی $Y_n = f_n(x_n), n \in \mathbb{N}$ پیوندی منفی خواهند بود. □

[۴۵] Joag-Dev & Frank-Proschan(1983)

قضیه بعدی یکی از قضایای مهم در مبحث متغیرهای تصادفی پیوندی منفی است که با استفاده از آن می‌توان قوانینی همچون قانون قوی اعداد بزرگ را برای متغیرهای تصادفی پیوندی منفی تعمیم داد.

قضیه ۲.۵.۱. (گراسیموف و همکاران.۲۰۱۲) *فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی پیوندی منفی باشند. برای هر مجموعه $A \subset \{1, \ldots, n\}$ و هر $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ نامساوی‌های زیر برقرار هستند.*

$$P\Big(\bigcap_{k\in A}\{X_k \le x_k\} \cap \bigcap_{k\notin A}\{X_k < x_k\}\Big) \le \prod_{k\in A} P\{X_k \le x_k\} \prod_{k\notin A} P\{X_k < x_k\},$$
$$P\Big(\bigcap_{k\in A}\{X_k \ge x_k\} \cap \bigcap_{k\notin A}\{X_k > x_k\}\Big) \le \prod_{k\in A} P\{X_k \ge x_k\} \prod_{k\notin A} P\{X_k > x_k\}.$$

قضیه‌ای که در ادامه بررسی می‌کنیم اثبات دیگری برای ویژگی دوم متغیرهای تصادفی پیوندی منفی را ارایه می‌دهد.

قضیه ۳.۵.۱. (گراسیموف و همکاران.۲۰۱۲) *برای متغیرهای تصادفی پیوندی منفی $X_1, \ldots, X_n$ و توابع نامنفی و نانزولی $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ نامساوی زیر برقرار خواهد بود.*

$$E\big(f_1(X_1)\ldots f_n(X_n)\big) \le Ef_1(X_1)\ldots Ef_n(X_n). \qquad (۴.۱)$$

به طور خاص اگر متغیرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ نامنفی و $p_1, \ldots, p_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند آن‌گاه

$$E({X_1}^{p_1}\ldots {X_n}^{p_n}) \le E{X_1}^{p_1}\ldots E{X_n}^{p_n}. \qquad (۵.۱)$$

برهان. برای اثبات فرض می‌کنیم امید ریاضی سمت راست در عبارات (۴.۱) و (۵.۱) متناهی هستند، زیرا در غیر این صورت اثبات نامساوی معنی‌دار نخواهد بود. برای هر $m \in \mathbb{N}$ توابع $g_{k,m} = f_k \wedge m$ وقتی $k = 1, \ldots, n$، کران‌دار و نانزولی است. بنا بر تعریف متغیرهای پیوندی منفی، نامساوی زیر برقرار خواهد بود.

$$\begin{aligned} E\Big(g_{1,m}(X_1)\ldots g_{n,m}(X_n)\Big) &\le E\Big(g_{1,m}(X_1)\ldots g_{n-1,m}(X_{n-1})\Big)Eg_{n,m}(X_n) \\ &\le \ldots \le Eg_{1,m}(X_1)\ldots Eg_{n,m}(X_n). \end{aligned}$$

حال نامساوی (۴.۱) بنا به قضیه همگرایی یکنوا، وقتی $m \longrightarrow \infty$ ، برقرار خواهد بود. برای به دست آوردن نامساوی (۵.۱) کافی است در نامساوی (۴.۱)، برای $k = 1, \ldots, n$، $f_k(x) = I_{[0,\infty]}(x)|x|^{p_k}$ در نظر بگیریم و به راحتی نامساوی را به دست آوریم. □