دانشکده علوم

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی محض- جبر

اصل ایده‌آل اول در جبر جابجایی

به وسیله‌ی

ایمان رضازاده

استاد راهنما

دکتر بابک امینی

تیرماه ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

اظهارنامه

اینجانب ایمان رضازاده دانشـجوی رشتـه‌ی ریاضـی گـرایـش جبر دانشکده‌ی علوم اظهار می‌کنم کـه این پایان‌نامه حاصل پژوهش خـودم بوده و در جاهایی کـه از منابع دیگران استفاده کرده‌ام، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته‌ام، همچنین اظهارمی‌کنـم کـه تحقیق و موضـوع پایان نامه‌ام تکـراری نیست و تعهد می‌نمایم کـه بـدون مجـوز دانشـگاه دستـاوردهای آن را منتشر ننموده و یـا در اختیار غیر قرار بدهم، کلیه حقوق این اثـر مطابق با آیین نامه مالکیت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام و نام خانوادگی: ایمان رضازاده

تاریخ و امضا: ۱۳۹۱/۴/۱۱

به نام خدا

اصل ایده‌آل اول در جبر جابجایی

به کوشش:

ایمان رضازاده

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه شیراز به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد

در رشته:

ریاضی محض

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی کمیته‌ی پایان نامه، با درجه: عالی

دکتر بابک امینی، استادیار بخش ریاضی (رئیس کمیته) ....

دکتر مجید ارشاد لنگرودی، استاد بخش ریاضی ....

دکتر افشین امینی، استادیار بخش ریاضی ....

تیر ماه ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر

عزیزم

سپاسگزاری

شکر خدا که هرچه طلب کردم از خدا   بر منتهای همت خود کامران شدم

سپاس از خداوند منان که با لطف و رحمت بیکرانش در طول تحصیل یاری‌ام نمود.

از جناب آقای دکتر بابک امینی که سمت استاد راهنما را بر عهده داشتند و همچنین اساتید مشاور جناب آقای دکتر ارشاد لنگرودی و دکتر افشین امینی تشکر می‌نمایم.

همچنین از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر میردهقان که نماینده تحصیلات تکمیلی اینجانب را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

همچنین فرصت را غنیمت شمرده و از بابت شکیبایی و محبت‌های بی‌شائبه‌ی خانواده بزرگوارم که با حمایت‌های همه جانبه خود یاری‌ام کردند تا تحصیلاتم را به پایان رسانم، کمال تشکر را دارم. هر چند این تشکر کلامی، گوشه‌ای از محبت‌های بی‌کران آن را جبران نخواهد کرد.

چکیده

اصل ایده‌آل اول در جبر جابجایی

به کوشش
ایمان رضازاده

در این پایان نامه، ما اصلی را تحت عنوان اصل ایده‌آل اول ارائه می‌دهیم، تا نشان دهیم ایده‌آل‌های معینی در حلقه جابجایی اول هستند. با ارائه این اصل ما به یک بیان یکدست و سرراست از بعضی نتایج استاندارد درباره ایده‌آل‌های اول در جبر جابجایی می‌رسیم که این نتایج به کرول، کوهن، کاپلانسکی، هرشتاین، آیساک، مک-آدام، د.د اندرسون و دیگران منتسب می‌شوند. به طور واضح‌تر، طبیعت ساده اصل ایده‌آل اول ما را قادر می-سازد تا نتایج تاکنون ناشناخته زیادی را از سری قضایای" ماکسیمال بودن، اول بودن را نتیجه می‌دهد" بدست آوریم. مفاهیم کلیدی لازم برای پرداختن به چنین مسائلی در مورد ایده‌آل‌های اول، عبارتند از خانواده‌های اوکا و خانواده‌های آکو از ایده‌آل‌ها در حلقه جابجایی. همچنین قسمت زیادی از این کار دارای تعبیری بر حسب رسته مدول‌های دوری می‌باشد.

فهرست مطالب

.

فصل اول

مقدمه

این پایان نامه برگرفته از منبع[۱۶] می‌باشد.

یکی از اساسی‌ترین نتایج در جبر جابجایی، به عنوان اولین قضیه در کتاب کاپلانسکی[1][۱۰] آمده است، که در(۱-۱) ذکر شده است. این قضیه بیان می‌کند که انواع خاصی از ایده‌آل‌ها در حلقه جابجایی اول هستند.(در ادامه، همه حلقه‌ها جابجایی و یکدار فرض شده‌اند، مگر اینکه خلاف آن ذکر شده باشد.)

قضیه ۱-۱:(مرجع[۱۰، ص. ۱] را ببینید.) فرض می‌کنیم S یک مجموعه ضربی بسته در حلقه R باشد. هر ایده‌آل $I \subseteq R$ که نسبت به مجزا بودن از S ماکسیمال باشد، اول است.

کاپلانسکی این نتیجه را به کرول[2] نسبت می‌دهد. بلافاصله بعد از ارائه این نتیجه کاپلانسکی بیان می‌کند:" در دو قضیه بعدی ما دو روش برای ساختن ایده‌آل‌های اول بدون استفاده از مجموعه ضربی بسته، ارائه می‌دهیم. " این قضایا به ترتیب به کوهن[3] و هرشتاین [4]مربوط می‌شوند، که در زیر آمده‌اند.

قضیه ۱-۲:(مرجع[۱۰] را ببینید.) فرض می‌کنیم I ایده‌آلی در حلقه R بوده که نسبت به با تولید متناهی نبودن ماکسیمال باشد. آنگاه I اول است.

قضیه ۱-۳: برای $R-$مدول M فرض می‌کنیم I ایده‌آلی در حلقه R باشدکه بین تمام پوچ سازهای عناصر غیرصفر M ماکسیمال باشد. آنگاه I ایده‌آلی اول است.

---

[1] Kaplansky
[2] Krull
[3] Cohen
[4] Herstein

همانند بحثی که برای قضیه(۱-۲) ارائه شد، کاپلانسکی همچنین قضیه زیر را به عنوان تمرین در[۱۰، ص. ۸] آورده است، که آن را به آیساک[1] نسبت می‌دهد.

قضیه ۱-۴: فرض می‌کنیم I ایده‌آلی در حلقه R باشد که نسبت به اصلی نبودن ماکسیمال باشد. آنگاه I اول است.

اثبات‌هایی که در کتاب‌های معتبر جبر جابجایی(به عنوان نمونه[۵، ۱۰، ۱۸، ۲۰]) برای سری قضایای(۱-۱) تا(۱-۴) ارایه شده‌اند، به طور کلی مشابه هستند، اما هیچ اطلاعاتی در مورد اینکه این نتایج ممکن است به یکدیگر مرتبط باشند به ما نمی‌دهند. همچنین در متون دیگر نتایج گوناگونی از" ماکسیمال بودن، اول بودن را نتیجه می‌دهد"[2] ارائه شده است(که بعضی از آنها برای نمونه در تمرین‌های کتاب کاپلانسکی[۱۰] آمده است). اما باز هم به نظر می‌رسد هر یک از این نتایج نیاز به یک بازبینی در اثباتشان دارند، زیرا هیچ الگوی خاصی در چارچوب اثبات آنها مشاهده نمی‌شود.

در این پایان‌نامه ما اصلی را تحت عنوان اصل ایده‌آل اول[3] معرفی می‌کنیم که بیان می‌کند، برای خانواده‌هایی مناسب از ایده‌آل‌ها در یک حلقه(جابجایی) هر ایده‌آل که نسبت به قرار نگرفتن در آنها ماکسیمال باشد، ایده‌آلی اول است. این اصل فقط نتایج (۱-۱) تا (۱-۴) را در بر نمی‌گیرد، بلکه برای تمام نتایج از این نوع که در نوشته‌های دیگر نویسندگان از آنها آگاهیم، کاربرد دارد. به طور واضح‌تر، طبیعت ساده این اصل ما را قادر می‌سازد تا با حداقل تلاش ممکن، نتایج تاکنون ناشناخته بسیاری را در مورد وجود ایده‌آل‌های اول(و ماکسیمال) به همراه کاربردشان بدست آوریم.

مفهوم کلیدی که این امر را برای ما ممکن می‌سازد، عبارت است از خانواده اوکا[4] از ایده‌آل‌ها در یک حلقه که در (۲-۱) معرفی شده است. ایده یک خانواده اوکا را می‌توان به نتیجه‌ای مهم در مقاله" شمارهVIII" از سری مقالات طولانی ک. اوکا[5] در مورد قضیه کارتان از توابع تحلیلی با متغیرهای مختلط چندگانه که حدودا در سال ۱۹۵۱ منتشر شده است، نسبت داد. نتیجه ۲ از اوکا در[۲۲، ص. ۲۰۹] به خوبی به عنوان نتیجه‌ای در مورد ایده‌آل‌های

[1] Isaacs
[2]. Maximal implies prime
[3]. Prime ideal principle
[4]. Oka
[5]. K. Oka

با تولید متناهی که فقط برای حلقه‌هایی از توابع مختلط چندگانه بیان شده است، مخفی شده بود. یک بیان روشن از نتیجه اوکا در حالت کلی برای حلقه‌های جایجایی، ظاهرا برای اولین بار در کتاب" حلقه‌های موضعی" ناگاتا[۲۰] آمده است. با استفاده از این نتیجه، ناگاتا اثباتی را برای قضیه کوهن[۳، قضیه۲] ارائه می‌دهد که یک حلقه جابجایی نوتری است اگر ایده‌آل‌های اول آن همگی با تولید متناهی باشند[۲۰، (۴.۳)]. تعریف ما از یک خانواده اوکا در (۲-۱) مستقیما از بیان ناگاتا الهام گرفته شده است. در (۲-۲) ما مفهومی را تحت عنوان خانواده آکو[1] از ایده‌آل‌ها معرفی می‌کنیم که بسیار مرتبط با خانواده اوکا می‌باشد. برای هر دو نوع از این خانواده‌ها در (۲-۴) اصل ایده‌آل اول بیان و اثبات شده است و یک متمم مفید برای این اصل در(۲-۷) ارائه شده است. این‌ها همراه با نتیجه بنیادی (۲-۸) ، وابستگی منطقی بین مفاهیم اوکا و آکو(و انواع قویتر آنها) را توضیح می‌دهد، که پایه و اساس این پایان‌نامه را تشکیل می-دهد.

در فصل ۳ ابتدا ما کاربردهایی از اصل ایده‌آل اول را برای بدست آوردن تمام نتایج شناخته شده که" ماکسیمال بودن، اول بودن را نتیجه می‌دهد" ارائه می‌دهیم. یک واقعیت نسبتا جالب که در اینجا مشاهده خواهیم کرد، این است که قضیه د.د. اندرسون[2] برای ایده‌آل‌های اول مینیمال در[۱] حالت خاصی از اصل ایده‌آل اول خواهد شد. موارد جدید دیگری از کاربردهای این اصل در قسمت دوم این فصل خواهد آمد. برای نمونه با کار کردن روی یک خانواده اوکا جدید مناسب، شرایط کافی زیر را برای ایده‌آل‌های ماکسیمال در یک حلقه جابجایی دلخواه بدست خواهیم آورد (بترتیب، (۳-۲۳) ،(۳-۲۲) و(۳-۲۱) را ببینید) :

(۱) ایده‌آلی که نسبت به جمعوند مستقیم نبودن ماکسیمال باشد، ایده‌آلی ماکسیمال است؛

(۲) ایده‌آلی که نسبت به خودتوان نبودن ماکسیمال باشد، ایده‌آلی ماکسیمال است؛

(۳) ایده‌آلی مانند M که نسبت به خاصیت $M \supset M^2 \supset \dots$ ماکسیمال باشد، ایده‌آلی ماکسیمال است.

---

[1] Ako
[2] D.D. Anderson

فرض می‌کنیم $\mathfrak{M}_c(R)$ نماد رسته[1] مدولهای دوری روی حلقه R باشد. در فصل های ۴ و ۵، بعد از قرار دادن یک تناظر بین خانواده‌هایی از ایده‌آل‌ها در حلقه R و زیر رسته‌هایی از $\mathfrak{M}_c(R)$ ، بسیاری از انواع خانواده‌هایی از ایده‌آل‌ها که در فصل ۲ معرفی کردیم را بازبینی می‌کنیم و تعبیری رسته‌ای برای شرایط تعریف شده برای این خانواده‌ها ارائه می‌دهیم. نکته قابل توجه این است که یک خانواده اوکا از ایده‌آل‌ها در R با زیر رسته‌ای از $\mathfrak{M}_c(R)$ که "تحت توسیع بسته است"[2] متناظر می‌باشد. با این دید رسته‌ای از خانواده‌های اوکا، نمونه‌های زیادی از این خانواده‌ها که در فصل ۳ بررسی می‌کنیم، متناظر با زیررسته‌هایی از $\mathfrak{M}_c(R)$ می‌باشند که از دیدگاه نظریه مدول‌ها به وضوح تحت توسیع بسته هستند. برای نمونه خانواده اوکا از ایده‌آل‌های با تولید متناهی در R با رسته مدول‌های دوری با نمایش متناهی متناظر است و خانواده اوکا از جمعوندهای مستقیم در R با رسته مدول‌های دوری پروژکتیو متناظر است و به همین ترتیب مثال‌های دیگری نیز می‌توان ارائه داد. از طرف دیگر، مثال‌های دیگری از زیررسته‌های $\mathfrak{M}_c(R)$ که (از قبل) به خوبی می‌دانیم تحت توسیع بسته هستند، ما را به مثال‌های جالب بیشتری از خانواده‌های اوکا در R هدایت می‌کنند!

در سراسر این پایان‌نامه، ما نماد $I \lhd R$ را برای نشان دادن اینکه I ایده‌آلی از حلقه(جابجایی) R است، به کار می‌بریم. همچنین $I \subset J$، یعنی ایده‌آل I به طور محض در ایده‌آل J قرار دارد. برای زیرمجموعه‌های $I, J, \ldots \subseteq R$ ایده‌آل تولید شده توسط اجتماع آنها را با $(I, J, \ldots)$ نمایش می‌دهیم. برای نمونه اگر $a \in R$ و $I, J \lhd R$ ، داریم $(I,J) = I + J$ و $(I,a) = I + \langle a \rangle$. برای $I \lhd R$ و $A \subseteq R$، ما $(I : A)$ را به صورت $\{r \in R : rA \subseteq I\}$ تعریف می‌کنیم. نماد $Spec(R)$ و $Max(R)$ به طور معمول به ترتیب نمایانگر طیف ایده‌آل اول و طیف ایده‌آل ماکسیمال از حلقه R می‌باشد.

فرض می‌کنیم F یک خانواده از ایده‌آل‌ها در R باشد که $R \in F$ باشد. گوییم

(۱) F یک نیم فیلتر[3] است اگر برای هر $I, J \lhd R$، که $I \supseteq J$ و $J \in F$ ، نتیجه دهد $I \in F$؛

---
[1] Category
[2] Closed under extension
[3] Semifilter

(۲) F یک فیلتر است اگر یک نیم فیلتر باشد و اگر $A,B \in F$ آنگاه $A \bigcap B \in F$؛ و

(۳) F یک مونوییدال[1] است، اگر $A,B \in F$ نتیجه دهد $AB \in F$؛ یعنی F یک زیرمونویید از مونویید تمام ایده‌آل‌های R، تحت ضرب است.

ما F' را برای نمایش متمم F در نظر می‌گیریم(که شامل تمامی ایده‌آل‌هایی از R است که به F تعلق ندارند) و $Max(F')$ را برای مجموعه عناصر ماکسیمال F' به کار می‌بریم(نسبت به رابطه ترتیب جزئی شمول ایده‌آل‌ها). گوییم F' یک $MP-$خانواده[2] است اگر $Max(F') \subseteq Spec(R)$. با این نمادگذاری، اصل ایده‌آل اول به سادگی بیان می‌دارد که، برای هر خانواده اوکا یا آکو مانند F(در هر حلقه)، F' یک $MP-$خانواده است.

[1] Monoidal
[2] Maximal implies prime

فصل دوم

خانواده‌هایی از ایده‌آل‌ها و اصل ایده‌آل اول

این فصل را با دو تعریف مهم که در این پایان‌نامه به آنها نیاز داریم، شروع می‌کنیم.

تعریف ۲-۱: خانواده ایده‌آل F در حلقه R همراه با $R \in F$ را،

الف) یک خانواده اوکا گوییم، هرگاه برای هر $a \in R$ و $I \lhd R$ اگر $(I : a) \in F$ و $(I, a) \in F$، آنگاه داشته باشیم $I \in F$.

ب) یک خانواده به طور قوی اوکا گوییم، هرگاه برای هر $I, A \lhd R$ اگر $(I : A) \in F$ و $(I, A) \in F$، آنگاه داشته باشیم $I \in F$.

تعریف ۲-۲: خانواده ایده‌آل F در حلقه R همراه با $R \in F$ را،

الف) یک خانواده آکو گوییم، هرگاه برای هر $a, b \in R$ و $I \lhd R$ اگر $(I, a) \in F$ و $(I, b) \in F$، آنگاه داشته باشیم $(I, ab) \in F$.

ب) یک خانواده به طور قوی آکو گوییم، هرگاه برای $a \in R$ و $I, B \lhd R$ اگر $(I, a) \in F$ و $(I, B) \in F$، آنگاه داشته باشیم $(I, aB) \in F$.

روابط زیر بین تعاریف ارائه شده در(۲-۱) و(۲-۲) واضح و بدیهی می‌باشند.

گزاره ۲-۳:

۱) یک خانواده به طور قوی اوکا، خانواده‌ای اوکا است، و اگر R حلقه ایده‌آل اصلی باشد عکس آن نیز برقرار است.

۲) یک خانواده به طور قوی آکو، خانواده‌ای آکو است، و اگر R حلقه ایده‌آل اصلی باشد، عکس آن نیز برقرار است.

برهان. برای برهان قسمت عکس در موارد بالا کافیست، ایده‌آل A ذکر شده در تعاریف بالا را به صورت $A=<a>$ و $B=<b>$ در نظر بگیریم، آنگاه داریم، $(I:A)=(I:a)$, $(I,aB)=(I,ab)$ و $(I,A)=(I,a)$. □

با استفاده از مفاهیم خانواده اوکا و آکو در اینجا ما نتیجه کلی زیر را بیان می‌کنیم.

اصل ایده‌آل اول ۲-۴: اگر F یک خانواده اوکا یا یک خانواده آکو باشد، آنگاه F' یک $MP-$خانواده است؛ یعنی $Max(F')\subseteq Spec(R)$.

برهان. فرض می‌کنیم $I\in Max(F')$ و I اول نباشد. چون $I\neq R$، پس وجود دارد $a,b\notin I$ بقسمی‌که $ab\in I$.

الف) فرض کنید F یک خانواده اوکا باشد. چون $a\in(I,a)$ پس $I\subset(I,a)$ و چون $b\in(I:a)$ داریم $I\subset(I:a)$. حال از طرفی چون $I\in Max(F')$ پس $(I,a),(I:a)\in F$ در صورتی که $I\notin F$، که این تناقض با فرض اوکا بودن F است.

ب) فرض کنید F یک خانواده آکو باشد. چون $b\in(I,b)$ پس $I\subset(I,b)$، همچنین از قسمت قبل داشتیم $I\subset(I,a)$. حال از طرفی چون $I\in Max(F')$ پس $(I,a),(I,b)\in F$. اما از آنجا که $ab\in I$ داریم $(I,ab)=I\notin F$، که این با فرض آکو بودن F در تناقض است. □

نکته ۲-۵: عکس قضیه(۲-۴) در حالت کلی برقرار نیست. برای نمونه، فرض می‌کنیم $(R,(\pi))$ یک حلقه ارزیاب مجزا باشد[1]و $F=\{(\pi)^i : i\neq 1,4\}$. آنگاه $F'=\{(0),(\pi),(\pi)^4\}$ یک $MP-$خانواده است، زیرا $Max(F')=\{(\pi)\}\subseteq Spec(R)$. اما F یک خانواده اوکا نیست، چون $I:=(\pi)^4\notin F$ در صورتی که $(I:\pi^2)=(I,\pi^2)=(\pi)^2\in F$.

همچنین F یک خانواده آکو هم نیست، زیرا $(I:\pi^2.\pi^2)=(I,\pi^4)=(\pi)^4\notin F$ در صورتی‌که $(I,\pi^2)=(\pi)^2\in F$.

لم زیر در ادامه این بحث مورد نیاز است.

---

[1] Discrete valuation ring

لم ۲-۶: فرض کنید F خانواده‌ای از ایده‌آل‌ها در R بوده بقسمی‌که هر ایده‌آل در F با تولید متناهی باشد. آنگاه هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌ها در F' دارای کران بالایی در F' است.

برهان. فرض می‌کنیم $S=\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ یک زنجیر دلخواه از ایده‌آل‌ها در F' باشد. نشان می‌دهیم $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}T_\alpha$ یک کران بالا در F' برای S می‌باشد. ابتدا نشان می‌دهیم $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}T_\alpha$ یک ایده‌آل است. فرض می‌کنیم $x,y\in\bigcup_{\alpha\in\Lambda}T_\alpha$، پس $\alpha_1,\alpha_2\in\Lambda$ وجود دارد بقسمیکه $x\in T_{\alpha_1}$ و $y\in T_{\alpha_2}$. چون S یک زنجیر است پس یا $T_{\alpha_1}\subseteq T_{\alpha_2}$ یا $T_{\alpha_2}\subseteq T_{\alpha_1}$. بدون اینکه از کلیت برهان کاسته شود فرض می‌کنیم $T_{\alpha_2}\subseteq T_{\alpha_1}$، پس $x,y\in T_{\alpha_1}$ و از آنجاکه T_{α_1} یک ایده‌آل است داریم $x+y\in T_{\alpha_1}$ و در نتیجه $x+y\in\bigcup_{\alpha\in\Lambda}T_\alpha$. از طرفی برای هر $r\in R$ داریم $rx\in T_{\alpha_1}\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}T_\alpha$. حال کافیست نشان دهیم $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}T_\alpha$ عضوی از F' است. فرض می‌کنیم $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}T_\alpha$ عضوی از F باشد، پس $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}T_\alpha=<x_1,\dots,x_n>$ که $x_i\in T_{\alpha_i}$ برای برخی $\alpha_i\in\Lambda$. چون S یک زنجیر است $k\in\{1,2,\dots,n\}$ وجود دارد بقسمیکه $T_{\alpha_i}\subseteq T_{\alpha_k}$ برای تمام i ها. پس $x_1,\dots,x_n\in T_{\alpha_k}$ و در نتیجه $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}T_\alpha=<x_1,\dots,x_n>\subseteq T_{\alpha_k}\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}T_\alpha$، و از آن داریم $T_{\alpha_k}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}T_\alpha$، که این تناقض است، زیرا $T_{\alpha_k}\in F'$ در صورتی‌که $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}T_\alpha\in F$. □

یک بیان کلی دیگر در مورد خانواده‌های اوکا و آکو در زیر آمده است که یک متمم برای(۲-۴) محسوب می‌شود. در حالت خاص، این متمم بیان می‌کند که تحت یک فرض زنجیری مناسب روی F'، اگر ایده‌آل‌های اول از یک حلقه دارای رفتار خاصی باشند، آنگاه تمام ایده‌آل‌های آن نیز همان رفتار را دارا می‌باشند.

متمم اصل ایده‌آل اول ۲-۷: فرض کنید F یک خانواده اوکا یا آکو در R باشد. فرض کنید هر زنجیر ناتهی از ایده‌آل‌ها در F'(نسبت به رابطه شمول) دارای یک کران بالا در F'

باشد.(به عنوان نمونه، این شرایط برای خانواده F که تمام ایده‌آل‌های آن با تولید متناهی است، صادق است.)

(۱) فرض کنید F_0 یک نیم فیلتر از ایده‌آل‌ها در R باشد. اگر هر ایده‌آل اول در F_0 متعلق به F باشد، آنگاه $F_0 \subseteq F$.

(۲) فرض کنید $J \lhd R$. اگر تمام ایده‌آل‌های اول که(به طور محض) شامل J هستند در F قرار داشته باشند، آنگاه تمام ایده‌آل‌هایی که(به طور محض) شامل J هستند در F قرار دارند.

(۳) اگر تمام ایده‌آل‌های اول R، متعلق به F باشند، آنگاه تمام ایده‌آل‌های R نیز در F قرار می‌گیرند.

برهان. (۱) فرض کنید $F_0 \not\subseteq F$. پس ایده‌آلی مانند I وجود دارد بقسمیکه $I \in F_0 \setminus F$ و این یعنی $I \in F'$. حال مجموعه $\Sigma = \{J \in F' : I \subseteq J\}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $S = \{J_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ یک زنجیر دلخواه در Σ باشد، که به وضوح زنجیری دلخواه در F' نیز می‌باشد. طبق فرض مسئله برای F'، زنجیر S دارای کرانی بالا مانند J_0 در F' می‌باشد. از آنجاکه به ازای هر $J_\alpha \in S$، داریم $I \subseteq J_\alpha \subseteq J_0$، پس $J_0 \in \Sigma$. پس بنابر آنچه گفته شد هر زنجیر دلخواه در Σ دارای کرانی بالا در آن می‌باشد. طبق لم زرن Σ دارای عضوی ماکسیمال مانند P می‌باشد که $I \subseteq P$. حال نشان می‌دهیم $P \in Max(F')$. فرض کنید $P \subset Q \in F'$. چون $I \subseteq P \subset Q$، پس $Q \in \Sigma$ که این با فرض ماکسیمال بودن P در Σ در تناقض است. تا اینجا داریم $I \subseteq P \in Max(F')$، حال چون F_0 یک نیم فیلتر است پس $P \in F_0$. اما از آنجا که F یک خانواده اوکا یا آکو است و $P \in Max(F')$ نتیجه می‌گیریم P، ایده‌آلی اول است. پس طبق فرض $P \in F$، که این تناقض با $P \in F'$ است.

(۲) F_0 را خانواده تمام ایده‌آل‌های(به طور محض) شامل J در نظر می‌گیریم. F_0 به وضوح یک نیم فیلتر است. حال با استفاده از قسمت(۱) بقیه اثبات بدیهی است.