دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

بررسی روشهای محاسبه ماتریس معکوس مور- پن رز

استاد راهنما:

دکتر پرویز سرگلزایی

استاد مشاور:

دکتر فائزه توتونیان

تحقیق و نگارش:

وجاهت داور

۱۳۹۰

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱—۱ مقدمه

در ابتدای این فصل مروری بر مفاهیم اولیهٔ جبرخطی خواهیم داشت و سپس تعریف معکوس مور- پن رز[۱] وخواص آن را بیان می‌کنیم. مفهوم معکوس تعمیم یافته در دههٔ ۱۹۲۰—۱۹۱۰ توسط مور [۱۱—۱۰] و به طور جداگانه توسط پن رز [۱۴] ارائه گردید. به همین دلیل معکوس مور- پن رز نامیده می‌شود. این معکوس در چهار معادلهٔ معروف به نام معادلات مور- پن رز صدق می‌کند. معکوس مور- پن رز کاربرد های زیادی در مسائل آماری، نظریهٔ تصفیه و تقریب، دینامیک تحلیلی، تئوری زنجیر های مارکف و غیره دارد.

۲—۱ مروری بر مفاهیم جبرخطی

تعریف ۱.۲.۱ (رتبه ماتریس) رتبه یک ماتریس $A \in R^{m\times n}$ بعد فضای ستونی A می‌باشد و به $rank(A)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱ (رتبه ستونی کامل) یک ماتریس $A \in R^{m\times n}$ دارای رتبه ستونی کامل است اگر ستون های آن مستقل خطی باشند.

تعریف ۳.۲.۱ (رتبه سطری کامل) یک ماتریس $A \in R^{m\times n}$ دارای رتبه سطری کامل است اگر سطر های آن مستقل خطی باشند.

تعریف ۴.۲.۱ گفته می‌شود ماتریس $A \in R^{m\times n}$ دارای رتبهٔ کامل است اگر دارای رتبه کامل سطری یا ستونی باشد و اگر A دارای رتبه کامل نباشد، رتبه ناقص است.

تعریف ۵.۲.۱ (ماتریس خودتوان) ماتریس $A \in R^{m\times n}$ خودتوان است هرگاه

$$P^{۲} = P$$

تعریف ۶.۲.۱ (ماتریس قطری) یک ماتریس $A = (a_{ij})$ از مرتبهٔ $m \times n$ یک ماتریس قطری است اگر $a_{ij} = ۰$ به ازای $i \neq j$ و می‌نویسیم $A = diag(a_{۱۱}, ..., a_{ss})$ که در آن $s = min(m, n)$.

تعریف ۷.۲.۱ (ماتریس بالا مثلثی) یک ماتریس مربعی $A = (a_{ij})$ یک ماتریس بالا مثلثی است اگر

[۱] Moore-Penrose

$a_{ij} = 0$ به ازای $i > j$.

تعریف ۸.۲.۱ (ماتریس پائین مثلثی) یک ماتریس مربعی $A = (a_{ij})$ یک ماتریس پائین مثلثی است اگر $a_{ij} = 0$ به ازای $i < j$.

تعریف ۹.۲.۱ (ماتریس معین مثبت) یک ماتریس معین مثبت نامیده می‌شود اگر برای هر بردار مخالف صفر x داشته باشیم

$$x^T A x > 0$$

تعریف ۱۰.۲.۱ (ماتریس نیمه معین مثبت) یک ماتریس متقارن A نیمه معین مثبت نامیده می‌شود اگر برای هر بردار مخالف صفر x داشته باشیم

$$x^T A x \geq 0$$

تعریف ۱۱.۲.۱ (ماتریس جایگشت) یک ماتریس مربعی مخالف صفر مانند P یک ماتریس جایگشت نامیده می‌شود اگر تنها یک عنصر مخالف صفر که ۱ است در هر سطر و هر ستون یافت شود و بقیه همگی برابر صفر باشند.

تعریف ۱۲.۲.۱ (برد ماتریس) برای هر ماتریس $A \in R^{m\times n}$ برد A توسط $R(A)$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌گردد

$$R(A) = \{b \in R^m \mid b = Ax,\ \forall x \in R^n\}$$

تعریف ۱۳.۲.۱ (فضای پوچ ماتریس) فضای پوچ ماتریس $A \in R^{m\times n}$ را با $N(A)$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌گردد

$$N(A) = \{x \in R^n \mid Ax = 0\}$$

تعریف ۱۴.۲.۱ (یکا متعامد) مجموعه بردارهای $\{v_1, ..., v_m\}$ در R^n یکا متعامد است اگر به ازای هر i

$$v_i^T v_i = 1$$

تعریف ۱۵.۲.۱ (ماتریس تصویر) فرض کنید S یک زیر فضا از R^n باشد. آنگاه یک ماتریس P از مرتبهٔ $n \times n$ و دارای خواص

۱. $R(P) = S$

۲. $P^T = P$

۳. $P^۲ = P$

تصویر قائم بر روی S یا، به‌طور ساده، ماتریس تصویر نامیده می‌شود. تصویر قائم P را بر روی S توسط P_S نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۲.۱ ماتریس A را در نظر بگیرید. نرم های ماتریسی را بدین صورت تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \| A \|_۱ &= \max_{۱\leq j\leq n} \sum_{i=۱}^{m} | a_{ij} | \\ \| A \|_\infty &= \max_{۱\leq j\leq m} \sum_{j=۱}^{n} | a_{ij} | \\ \| A \|_۲ &= \max \{\sqrt{\lambda} :\ \text{یک مقدار ویژه } A^TA \text{ است } \lambda\} \end{aligned}$$

تعریف ۱۷.۲.۱ (ماتریس متعامد) ماتریس $P \in R^{n\times n}$ یک ماتریس متعامد نامیده می‌شود هرگاه ترانهادهٔ P معکوسش نیز باشد. یعنی:

$$PP^T = P^TP = I_n$$

تعریف ۱۸.۲.۱ (مقدار تکین) فرض کنید $A \in R^{m\times n}$، و مقادیر ویژهٔ A^TA به‌صورت زیر مرتب شده باشند:

$$\lambda_۱(A^TA) \geq \ldots \geq \lambda_r(A^TA) > \lambda_{r+۱}(A^TA) = \ldots = \lambda_n(A^TA) = ۰ \qquad (۱-۱)$$

مقادیر تکین A را با $\sigma_j(A)$ یا σ_j، $۱ \leq j \leq r$ نشان می‌دهیم و با رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_j(A) = +\sqrt{\lambda_j(A^TA)}, \qquad ۱ \leq j \leq r$$

و با توجه به رابطهٔ (۱−۱) به فرم زیر مرتب می‌شوند:

$$\sigma_۱ \geq \sigma_۲ \geq \ldots \geq \sigma_r > ۰$$

۱—۳ معکوس تعمیم یافته

می‌دانیم معکوس یک ماتریس برای انواع ماتریسهای مربعی و نامنفرد تعریف می‌شود. به این معنا که اگر $det(A) \neq ۰$ آنگاه ماتریس منحصر به فرد $A^{-۱}$ موجود است، به‌طوری که

$$AA^{-۱} = A^{-۱}A = I$$

موقعیت ها و شرایطی به‌وجود آمده که احتیاج به تعریف معکوس برای ماتریسهای مربعی منفرد و همچنین ماتریسهای مستطیلی احساس شده است. به عنوان مثال در آمار همانند چند حوزهٔ کاربردی دیگر نیاز به یافتن راه حل هایی برای یک دستگاه معادلات خطی می‌باشد. این دستگاه می‌تواند در شکل ماتریسی به‌صورت

$$Ax = c$$

نوشته شود. A یک ماتریس $m \times n$ با مقادیر ثابت و c یک بردار از مقدارهای ثابت، $m \times ۱$ و x یک بردار $n \times ۱$ از متغیر هایی است که ما باید آنها را پیدا کنیم. حال اگر $m = n$ باشد و A نامنفرد باشد، پس $A^{-۱}$ موجود است و دستگاه یک جواب منحصر به فرد $x = A^{-۱}c$ دارد. امااگر $m \neq n$ و یا A منفرد باشد چگونه جواب دستگاه را بیابیم؟ جواب دادن به سوالاتی از این دسته به گسترش تئوری معکوس تعمیم یافته یک ماتریس منجر گردیده است.

منظور از معکوس تعمیم یافته یک ماتریس $m \times n$ مانند A، یک ماتریس $n \times m$ مانند X است که به طریقی به A وابسته باشد به‌قسمی که X،

(i) برای رده ای از ماتریسها، بزرگتر از ردهٔ ماتریسهای نامنفرد وجود داشته باشد.

(ii) دارای خواص معمولی معکوس باشد.

(iii) اگر A نا منفرد باشد به معکوس معمولی تبدیل شود.

تعریف ۱.۳.۱ معادلات ماتریسی زیر که به معادلات پن رز معروف اند برای تعریف انواع مختلف

ماتریس های تعمیم یافته A به کار می‌روند.

$$AXA = A \qquad (۱-۲)$$

$$XAX = X \qquad (۱-۳)$$

$$(AX)^T = AX \qquad (۱-۴)$$

$$(XA)^T = XA \qquad (۱-۵)$$

که A^T ترانهادهٔ ماتریس A است. ماتریس X

(الف) یک معکوس تعمیم یافته [۲] نامیده می‌شود و به $\bar{A}$ نمایش داده می‌شود اگر (۱—۲) برقرار باشد.

(ب) یک معکوس تعمیم یافته انعکاسی [۳] نامیده می‌شود و به $\bar{A}_r$ نمایش داده می‌شود اگر (۱—۲) و (۱—۳) برقرار باشند.

(ج) یک معکوس تعمیم یافته نرم می نیمم [۴] نامیده می‌شود و به $\bar{A}_m$ نمایش داده می‌شود اگر (۱—۲) و (۱—۵) برقرار باشند.

(د) یک معکوس تعمیم یافته کمترین توانهای دوم [۵] نامیده می‌شود و به $\bar{A}_t$ نمایش داده می‌شود اگر (۱—۲) و (۱—۴) برقرار باشند.

(ه) یک معکوس مور — پن رز [۶] نامیده می‌شود و به A^+ نمایش داده می‌شود اگر (۱—۲) تا (۱—۵) برقرار باشند.

معکوس های تعمیم یافته تعریف شده در بالا بجز معکوس مور- پن رز برای یک ماتریس داده شده منحصر به فرد نیستند. هنگامی که A نا منفرد باشد همهٔ این معکوس های تعمیم یافته به A^{-1} تبدیل می‌شوند.

قضیه ۱.۳.۲ **اگر $O \neq A \in R^{m\times n}$ و $rank(A) = r$ باشد، ماتریسهای متعامد $U \in R^{m\times m}$ و $V \in R^{n\times n}$ موجودند، به‌طوری که**

$$A = U\Sigma V^T$$

---

[۲] generalized inverse

[۳] Reflexive generalized inverse

[۴] minumum norm generalized inverse

[۵] Least squares inverse

[۶] Moore - penrose inverse

این تجزیه SVD ماتریس A نامیده می‌شود و به وضوح خواهیم داشت :

$$\Sigma = U^T A V = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \vdots & \\ & \ddots & & \vdots & 0 \\ & & \sigma_r & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

اثبات: [۱]

حال به بیان قضیه ای می‌پردازیم که منحصر به فردی و وجود معکوس مور - پن رز را اثبات می‌کند.

قضیه ۳.۳.۱ فرض کنید $A \in R^{m\times n}$، A^+ وجود دارد و منحصر به فرد است.

اثبات [۱۶]: ابتدا وجود A^+ را نشان می‌دهیم. اگر A، یک ماتریس صفر $m\times n$ باشد، نشان دادن چهار خاصیت تعریف ۱.۳.۱ با $A^+ = (0)$ آسان خواهد بود و A^+ ماتریس صفر $n \times m$ است.

اگر $A \neq (0)$، بنابراین $rank(A) = r > 0$. از طرفی با استفاده از تجزیهٔ SVD می دانیم که ماتریس های $P_{m\times r}$ و $Q_{n\times r}$ موجودند به‌طوری که $A = P\Sigma Q$. حال اگر P و Q را به شکل $P = [P_1 \quad P_2]$ و $Q = [Q_1 \quad Q_2]$ افراز کنیم که در آن $P_1 \in R^{m\times r}$ و $Q_1 \in R^{n\times r}$ است آنگاه $P_1'P_1 = Q_1'Q_1 = I_r$ و

$$A = P_1 \triangle Q_1'$$

که $\triangle$ ماتریس قطری با عناصر نامنفی روی قطر می‌باشد. توجه کنید که اگر تعریف کنیم $A^+ = Q_1 \triangle^{-1} P_1'$ ، آنگاه:

$$\begin{aligned} AA^+A &= P_1 \triangle Q_1' Q_1 \triangle^{-1} P_1' P_1 \triangle Q_1' = P_1 \triangle \triangle^{-1} Q_1' \\ &= P_1 \triangle Q_1' = A. \\ A^+AA^+ &= Q_1 \triangle^{-1} P_1' P_1 \triangle Q_1' Q_1 \triangle^{-1} P_1' = Q_1 \triangle^{-1} \triangle \triangle^{-1} P_1' \\ &= Q_1 \triangle^{-1} P_1' = A^+. \\ AA^+ &= P_1 \triangle Q_1' Q_1 \triangle^{-1} P_1' = P_1 P_1'. \\ A^+A &= Q_1 \triangle^{-1} P_1' P_1 \triangle Q' - 1 = Q_1 Q_1'. \end{aligned}$$

می‌دانیم P_1P_1' و Q_1Q_1' متقارن هستند لذا روابط (۱—۴) و (۱—۵) نیز برقرارند. بنابراین $A^+ = Q \triangle^{-1} P'$ معکوس مور — پن رز A است، و ما ثابت کردیم که معکوس مور— پن رز A موجود است.

حال نشان می‌دهیم که این معکوس منحصر به فرد است. بدین منظور فرض می‌کنیم که B و C دو ماتریس باشند که در شرایط (۱—۵)—(۱—۲) برای A^+ صدق می‌کند. پس با استفاده از چهار شرط داریم:

$$\begin{aligned} AB &= (AB)' = B'A' = B'(ACA)' = B'A'(AC)' \\ &= (AB)'AC = ABAC = AC. \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} BA &= (BA)' = A'B' = (ACA)'B' = (CA)'A'B' \\ &= CA(BA)' = CABA = CA. \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از دو رابطهٔ اخیر و (۱—۳) داریم:

$$B = BAB = BAC = CAC = C.$$

بنابراین C و B برابرند. لذا معکوس مور — پن رز منحصر بفرد است.

۱—۴ برخی خواص اساسی معکوس مور — پن رز

در این بخش برخی خواص اساسی معکوس مور — پن رز را تحت چند قضیه بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۴.۱ فرض کنید A یک ماتریس از مرتبهٔ $m \times n$ باشد، آنگاه

(الف) $(\alpha A)^+ = \alpha^{-1} A^+$ **اگر** $\alpha \neq 0$ **یک اسکالر باشد،**

(ب) $(A^+)^+ = A$ ،

(پ) $(A^+)^T = (A^T)^+$ ،

(ت) $A^+ = A^{-1}$ ، **اگر** A **مربعی و نا منفرد باشد،**

(ث) $(A^TA)^+ = A^+(A^+)^T$ و $(AA^T)^+ = (A^+)^TA^+$،

(ج) $(A^+A)^+ = A^+A$ و $(AA^+)^+ = AA^+$،

(چ) $A^+ = (A^TA)^+A^T = A^T(AA^T)^+$،

(ح) **اگر** $\mathrm{rank(A)} = \mathrm{n}$ **باشد، آنگاه** $A^+ = (A^TA)^{-۱}A^T$،

(خ) **اگر** $\mathrm{rank(A)} = \mathrm{m}$ **باشد، آنگاه** $A^+ = A^T(AA^T)^{-۱}$،

(د) **اگر ستون های** A **یکا متعامد باشند یعنی** $A^TA = I_n$ **آنگاه** $A^+ = A^T$.

اثبات: [۱]

خواص (ح) و (خ) قضیه ۱.۴.۱ روش های مفیدی را برای محاسبهٔ معکوس مور- پن رز ماتریسهایی با رتبهٔ ستونی کامل و رتبهٔ سطری کامل، ارائه می‌دهند.

مثال ۲.۴.۱ اگر $a = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$ و $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$ آنگاه از آنجا که $a \neq ۰$ با استفاده از خاصیت (ح) داریم:

$$a^+ = (a^Ta)^{-۱}a^T = [۰/۵ \quad ۰/۵]$$

همچنین چون $rank(A) = ۲$ با استفاده از خاصیت (خ) داریم:

$$A^+ = A^T(AA^T)^{-۱} = \frac{۱}{۱۴}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۶ & -۴ \\ -۴ & ۵ \end{pmatrix} = \frac{۱}{۱۴}\begin{pmatrix} ۶ & -۴ \\ ۸ & -۳ \\ ۲ & ۶ \end{pmatrix}$$

قضایای زیر را نیز در مورد معکوس مور- پن رز می‌توان بیان کرد.

قضیه ۳.۴.۱ **فرض کنید** $A \in R^{m\times n}$ **و ماتریسهای** $P \in R^{h\times m}$ **و** $Q \in R^{n\times p}$ **وجود داشته باشند به‌طوری که** $P^TP = I_m$ **و** $Q^TQ = I_n$ **آنگاه**

$$(PAQ)^+ = Q^+A^+P^+ = Q^TA^+P^T$$

اثبات: [۱]

قضیه ۴.۴.۱ **به ازای هر ماتریس** $A \in R^{m\times n}$ **داریم:**

$$rank(A) = rank(A^+) = rank(AA^+) = rank(A^+A).$$

اثبات: [۱]

قضیه ۵.۴.۱ اگر A ماتریس $m \times m$ متقارن باشد. آنگاه:

(الف) A^+ متقارن است.

(ب) $AA^+ = A^+A$.

(ج) $A = A^+$ اگر A خود توان باشد.

اثبات: [۱]

قضیه ۶.۴.۱ اگر $A = BC$ که در آن $A \in R^{m\times n}$ و $B \in R^{m\times r}$ و $C \in R^{r\times n}$ و

$$r = rank(A) = rank(B) = rank(C)$$

آنگاه

$$A^+ = C^T(CC^T)^{-۱}(B^TB)^{-۱}B$$

اثبات: [۱]

قضیه ۷.۴.۱ فرض کنید $A \in R^{m\times p}$ و $B \in R^{p\times n}$. اگر $rank(A) = rank(B) = p$ آنگاه

$$(AB)^+ = B^+A^+$$

اثبات: [۱]

تبصره **۸.۴.۱** بعضی از خواص معکوس نا منفرد را معکوس مور – پن رز ندارد. مثلا در حالت کلی برای هر دو ماتریس A و B،

$$(AB)^+ \neq B^+A^+$$

.

مثال **۹.۴.۱** اگر $A = [۱ \quad ۰]^T$ و $B = [۱ \quad ۱]^T$ آنگاه

$$\begin{aligned} A^+ &= (A^TA)^{-۱}A^T = [۱ \quad ۰] \\ B^+ &= (B^TB)^{-۱}B^T = [۰/۵ \quad ۰/۵] \end{aligned}$$

بنابراین

$$(A^T B)^+ = (۱)^+ = ۱ \neq B^+ (A^+)^T = ۰/۵$$

این مثال در سال ۱۹۹۶ توسط گرویل [۷] بیان شده است.

همچنین $(A^+)^۲$ الزاما با $(A^۲)^+$ برابر نیست.

مثال ۱۰.۴.۱ فرض کنید $A = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ آنگاه $A^+ = \frac{۱}{۲} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}$. حال $A^۲ = A$ و

$$(A^+)^۲ = \frac{۱}{۲} A^+ = \frac{۱}{۴} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} \neq A^+.$$

تعریف ۱۱.۴.۱ اگر $A \in R^{m \times p}$ و A^+ معکوس مور ـ پن رز ماتریس مفروض باشد آنگاه دو رابطهٔ زیر برقرار ند:

(الف) $AA^+ = P_{R(A)}$.

(ب) $A^+ A = P_{R(A^T)}$.

که در آن $P_{R(A)}$ و $P_{R(A^+)}$ به ترتیب ماتریسهای تصویر برد A و A^+ هستند.

۱ــ۵ معکوس مور ـ پن رز ماتریسهای افراز شده

عمل تقسیم یک ماتریس به زیر ماتریسها را افراز ماتریس گویند. این زیر ماتریسها ممکن است مربعی یا مستطیلی باشند. افراز ماتریسها، معکوس کردن ماتریسهایی را که برای ذخیره کردن در حافظهٔ کامپیوتر بسیار بزرگ می‌باشند را امکان پذیر می‌سازد.

قضیهٔ زیر چگونگی محاسبهٔ معکوس تعمیم یافتهٔ یک ماتریس $m \times n$، مانند A وافراز شده به صورت

$$A = [U \quad V]$$

---

[۷] Greville

را ارائه می‌دهد، که در آن U از مرتبهٔ $m \times n_1$ و V از مرتبهٔ $m \times n_2$ می‌باشند.

قضیه ۱.۵.۱ **فرض کنید A به صورت $A = [U \quad V]$ افراز شده باشد که در آن $U \in R^{m\times n_1}$ و $V \in R^{m\times n_2}$ و $n = n_1 + n_2$. آنگاه**

$$A^+ = \begin{pmatrix} U^+ - U^+V(C^+ + W) \\ C^+ - W \end{pmatrix}$$

که در آن

$$\begin{aligned} C &= (I_m - UU^+)V, \\ M &= I_{n_2} + (I_{n_2} - C^+C)V^T(U^+)^TU^+V(I_{n_2} - C^+C)^{-1} \end{aligned}$$

و

$$W = (I_{n_2} - C^+C)MV^T(U^+)^TU^+(I_m - VC^+).$$

اثبات: [۱۶]

نتیجه **۲.۵.۱** **فرض کنید A و C ماتریسهای تعریف شده در قضیه ۱.۴.۱ باشند و**

$$K = (I_{n2} + V^T(U^+)^TU^+V)^{-1}$$

آنگاه

(الف) $C^+CV^T(U^+)^TU^+V = (0)$ **اگر و فقط اگر**

$$A^+ = \begin{pmatrix} U^+ - U^+VKV^T(U^+)^TU^+ \\ C^+ + KV^T(U^+)^TU^+ \end{pmatrix}$$

(ب) $C = (0)$ **اگر وفقط اگر**

$$A^+ = \begin{pmatrix} U^+ - U^+VKV^T(U^+)^TU^+ \\ KV^T(U^+)^TU^T \end{pmatrix}$$

(ج) $C^+CV^T(U^+)^TU^+V = V^T(U^+)^TU^+V$ **اگر و فقط اگر**

$$A^+ = \begin{pmatrix} U^+ - U^+VC^+ \\ C^+ \end{pmatrix}$$

(د) $U^TV = (\circ)$ اگر و فقط اگر

$$A^+ = \begin{pmatrix} U^+ \\ V^+ \end{pmatrix}$$

اثبات: [۱۶]

۱—۶ محاسبهٔ تجزیه معکوس

برای به‌دست آوردن معکوس یک ماتریس نا منفرد مانند A می‌توان از الگوریتم تجزیه معکوس که در سال ۱۹۹۵ توسط بنزی[۸] و توما[۹] [۲] ارائه شد، استفاده کرد. این دو با استفاده از این الگوریتم، پیش شرط صریح $AINV$ را به صورت $A^{-۱} = ZD^{-۱}Z^T$، برای ماتریسهای معین مثبت متقارن ارائه کردند.

فرض کنید $A \in R^{m\times n}$ با $m \geq n$ و A دارای رتبهٔ کامل ستونی باشد، ماتریس $C = A^TA$ یک ماتریس معین مثبت متقارن از رتبهٔ $n \times n$ است. حال اگر

$$Z = [z_۱, z_۲, \dots, z_n]$$

ماتریسی باشد که ستون i ام آن $z_i = z_i^{(i-۱)}$ است،آنگاه خواهیم داشت :

$$Z^TCZ = D = \begin{pmatrix} d_۱ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & d_۲ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & d_n \end{pmatrix} \qquad (۱-۶)$$

که در آن Z ماتریس بالا مثلثی واحد و D قطری است. در نتیجه

$$\begin{aligned} C^{-۱} &= ZD^{-۱}Z^T \\ (A^TA)^{-۱} &= ZD^{-۱}Z^T \end{aligned} \qquad (۱-۷)$$

---

[۸] Benzi

[۹] Tuma

یک تجزیه از C^{-1} را به‌دست می‌دهد. اگر i امین سطر C را با c_i^T نشان دهیم، الگوریتم تجزیه معکوس را به صورت زیر می‌توان ارائه داد.

الگوریتم ۱ــ۱: تجزیه معکوس ماتریس متقارن C

```
1.   Let z_i^(0) = e_i      (1 ≤ i ≤ n)
2.   For i = 1, 2, ..., n
3.      For j = i, i+1, ..., n
4.          d_j^(i-1) := c_i^T z_j^(i-1)
5.      End
6.      if i = n      go to (11)
7.      For j = i+1, ..., n
8.          z_j^(i) = z_j^(i-1) - (d_j^(i-1) / d_i^(i-1)) z_i^(i-1)
9.      End
10.  End
11.  Let z_i := z_i^(i-1)  and  d_i := d_i^(i-1) ,   for 1 ≤ i ≤ n
12.  Return Z = [z_1, z_2, ..., z_n]  and  D = diag(d_1, d_2, ..., d_n).
```

$$
\begin{aligned}
&1.\quad \text{Let } z_i^{(0)} = e_i \qquad (1 \le i \le n)\\
&2.\quad \text{For } i = 1, 2, \ldots, n\\
&3.\quad\quad \text{For } j = i, i+1, \ldots, n\\
&4.\quad\quad\quad d_j^{(i-1)} := c_i^T z_j^{(i-1)}\\
&5.\quad\quad \text{End}\\
&6.\quad\quad \text{if } i = n \qquad \text{go to (11)}\\
&7.\quad\quad \text{For } j = i+1, \ldots, n\\
&8.\quad\quad\quad z_j^{(i)} = z_j^{(i-1)} - \left(\frac{d_j^{(i-1)}}{d_i^{(i-1)}}\right) z_i^{(i-1)}\\
&9.\quad\quad \text{End}\\
&10.\quad \text{End}\\
&11.\quad \text{Let } z_i := z_i^{(i-1)} \quad \text{and} \quad d_i := d_i^{(i-1)}\,, \quad \text{for } 1 \le i \le n\\
&12.\quad \text{Return } Z = [z_1, z_2, \ldots, z_n] \quad \text{and} \quad \mathrm{D}= \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

حال با در نظر گرفتن رابطهٔ (۱ــ۷) و قضیهٔ ۱.۳.۱ قسمت (ح) معکوس مور ـ پن رز ماتریس A را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$A^+ = (ZD^{-1}Z^T)A^T$$

رابطهٔ (۱ــ۶) و $C = LDL^T$ نتیجه می‌دهد که عامل پایین مثلثی یکانی L و عامل معکوس Z در رابطهٔ $Z^T = L^{-1}$ صدق می‌کنند. و داریم :

$$CZ = LD \qquad (1-8)$$

یا

$$L = CZD^{-۱}$$

بنابراین عنصر (i, j) ماتریس L که $i \leq j$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} l_{ij} &= e_i^T CZD^{-۱} e_j \\ &= e_i^T CZe_j d_j^{-۱} \\ &= e_i^T Cz_j d_j^{-۱} \end{aligned}$$

از طرفی با استفاده از رابطهٔ (۱—۶) می‌دانیم

$$d_j = (z_j^{(j-۱)})^T Cz_j^{(j-۱)}$$

لذا

$$l_{ij} = \frac{e_i^T Cz_j^{(j-۱)}}{(z_j^{(j-۱)})^T Cz_j^{(j-۱)}}$$

اکنون قصد داریم نشان دهیم:

$$e_i^T Cz_j^{(j-۱)} = (z_i^{(j-۱)})^T Cz_j^{(j-۱)} \qquad (۱-۹)$$

با کمی دقت و ساختن تصویری از $(z_i^{(j-۱)})^T$ و $Cz_j^{(j-۱)}$ مشاهده می‌کنیم که دو طرف مساوی به عنصر i ام از ماتریس $Cz_j^{(j-۱)}$ منجر خواهند شد. لذا خواهیم داشت:

$$l_{ij} = \frac{(z_i^{(j-۱)})^T Cz_j^{(j-۱)}}{(z_j^{(j-۱)})^T Cz_j^{(j-۱)}}$$

فصل ۲

روشهای مستقیم برای محاسبهٔ ماتریس معکوس

مور- پن رز

۲—۱ مقدمه

معکوس مور- پن رز کاربرد های زیادی در دینامیک تحلیلی، آمار، بهینه سازی و کنترل و برازش منحنی دارد. در دهه ۱۹۲۰—۱۹۱۰ مور معکوس تعمیم یافته یک ماتریس را معرفی کرد و مورد مطالعه قرار داد. بعد از آن پن رز در سال ۱۹۵۵ مجددا این مفهوم را معرفی نمود، که امروزه به معکوس مور- پن رز معروف است. در سال ۱۹٦۰ گرویل یک الگوریتم بازگشتی را به عنوان یک روش مستقیم برای محاسبه معکوس مور- پن رز ارائه داد. در این فصل مروری بر پنج روش مستقیم برای محاسبه معکوس مور- پن رز یک ماتریس خواهیم داشت و در پایان نتایج عددی به‌دست آمده از این روش ها را با هم مقایسه می‌کنیم.

۲—۲ روش گرویل

گرویل یک فرمول برای محاسبهٔ معکوس مور- پن رز یک ماتریس به‌دست آورد که به شکل $[B \quad c]$ افراز شده است، که البته ماتریس B و بردار c یک تعداد سطر دارند. این الگوریتم می‌تواند به صورت بازگشتی برای محاسبهٔ معکوس مور- پن رز ماتریس $m \times n$، A استفاده شود.

فرض کنید

$$A = (a_1 \quad a_2 \ldots a_k \ldots a_n)$$

که در آن $A \in R^{m\times n}$ و a_k نشان دهندهٔ ستون k ام ماتریس مفروض A است و

$$A_k = (a_1 \quad a_2 \ldots a_k)$$

ماتریس ساخته شده با k ستون اول A باشد. گرویل نشان داد که اگر A_k را به‌صورت افراز شده $A_k = (A_{k-1} \quad a_k)$ در نظر بگیریم، به عنوان شرایط اولیه برای شروع الگوریتم خواهیم داشت:

$$A_1 = a_1 \qquad (۲ - ۱)$$

$$A_1^+ = \begin{cases} a_1^T(a_1^Ta_1)^{-1} & a_1 \neq 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (2-2)$$

در گام k ام بردار سطری p_k را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p_k = \begin{cases} \frac{(I-A_{k-1}A_{k-1}^+)a_k}{||(I-A_{k-1}A_{k-1}^+)a_k||^2}, & (I-A_{k-1}A_{k-1}^+)a_k \neq 0 \\ \frac{(A_{k-1}^+)^T A_{k-1}^+ a_k}{(1+||A_{k-1}^+ a_k||^2)}, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

آنگاه A_k^+ از رابطهٔ زیر به‌دست می آید:

$$\begin{pmatrix} A_{k-1}^+(I-a_kp_k^T) \\ p_k^T \end{pmatrix}$$

بنابراین $A^+ = A_n^+$ می‌تواند با محاسبات متوالی $A_2^+, A_3^+, \ldots, A_n^+$ محاسبه شود.

اثبات[12]: در ابتدای برهان فرض می‌کنیم ماتریس A_{k-1}^+ را ساخته ایم، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} A_{k-1}A_{k-1}^+A_{k-1} &= A_{k-1} \\ A_{k-1}^+A_{k-1}A_{k-1}^+ &= A_{k-1}^+ \\ (A_{k-1}^+A_{k-1})^T &= A_{k-1}^+A_{k-1} \\ (A_{k-1}A_{k-1}^+)^T &= A_{k-1}A_{k-1}^+ \end{aligned} \qquad (2-3)$$

ما بر آنیم A_k^+ را با استفاده از $A_kA_k^+A_k = A_k$ و $A_k = (A_{k-1} \quad a_k)$ به‌دست آوریم. بدین منظور A_k^+ را به شکل $\begin{pmatrix} B_{k-1} \\ b_k \end{pmatrix} = A^+$ با $B_{k-1} \in \mathbb{R}^{(k-1)\times n}$ و $b_k \in \mathbb{R}^{1\times n}$ افراز می‌کنیم. اکنون باید B_{k-1} و b_k را بیابیم.
با استفاده از فرض در نظر گرفته شده داریم:

$$\begin{aligned} A_kA_k^+A_k &= (A_{k-1} \quad a_k)\begin{pmatrix} B_{k-1} \\ b_k \end{pmatrix}(A_{k-1} \quad a_k) \\ &= (A_{k-1} \quad a_k)\begin{pmatrix} B_{k-1}A_{k-1} & B_{k-1}a_k \\ b_kA_{k-1} & b_ka_k \end{pmatrix} \\ &= (A_{k-1}B_{k-1}A_{k-1} + a_kb_kA_{k-1} \quad A_{k-1}B_{k-1}a_k + a_kb_ka_k) \\ &= (A_{k-1} \quad a_k) \end{aligned}$$

لذا یک دستگاه دو معادله ای برای یافتن $B_{k-۱}$ و b_k به وجود می آید:

$$A_{k-۱}B_{k-۱}A_{k-۱} + a_k b_k A_{k-۱} = A_{k-۱}$$
$$A_{k-۱}B_{k-۱}a_k + a_k b_k a_k = a_k$$

فرض می‌کنیم:

$$A_{k-۱}B_{k-۱}a_k = ۰$$
$$a_k b_k A_{k-۱} = ۰ \qquad (۲-۴)$$

بنابراین

$$a_k b_k a_k = a_k$$
$$A_{k-۱}B_{k-۱}A_{k-۱} = A_{k-۱} \qquad (۲-۵)$$

یک جواب برای $a_k b_k a_k = a_k$ می‌تواند $b_k = \frac{a_k^T}{a_k^T a_k}$ باشد. اما این جواب در معادلهٔ دوم رابطهٔ (۲–۴) صدق نمی‌کند یعنی $a_k \frac{a_k^T}{\|a_k\|^۲} A_{k-۱} \neq ۰$. لذا برای یافتن جواب می‌توان $b_k = \frac{a_k^T}{\|a_k\|^۲}(X - Y)$ تعریف کنیم که $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$. بنابراین

$$a_k \frac{a_k^T}{\| a_k \|^۲} X A_{k-۱} - a_k \frac{a_k^T}{\| a_k \|^۲} Y A_{k-۱} = ۰$$

ما به دنبال $b_k \neq ۰$ هستیم لذا $X \neq Y$ و از طرفی می‌دانیم $A_{k-۱}A_{k-۱}^{+}A_{k-۱} = A_{k-۱}$ پس $X = I$ و $Y = A_{k-۱}A_{k-۱}^{+}$ می‌تواند یک جواب برای معادلهٔ دوم از رابطهٔ (۲–۴) باشد.

اما اکنون

$$a_k \frac{a_k^T}{\| a_k \|^۲}(I - A_{k-۱}A_{k-۱}^{+})a_k \neq a_k \qquad (۲-۶)$$

زیرا

$$\frac{a_k^T}{\| a_k \|^۲}(I - A_{k-۱}A_{k-۱}^{+})a_k \neq ۱$$