دانشگاه الزهراء(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان

بررسی حلقه‌ی تقریبی درونریختی‌های یک گروه و E-گروه‌ها

استاد راهنما

دکتر مهری اخوان ملایری

استاد مشاور

دکتر ناهید هادیان دهکردی

دانشجو

ناهید یوسفی

اسفند ۱۳۸۸

تقدیم به یکتا عدالت گستر گیتی

و تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

قدردانی و تشکر

«مَنْ لَمْ یَشْکُر الْمَخْلُوقْ لَمْ یَشْکُر الْخٰالقْ»

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

اکنون که به حول و قوه‌ی الهی نگارش این رساله به پایان رسیده است بر دستان پرمهر پدر و مادر عزیزم بوسه می‌نهم که هر چه دارم مرهون لحظه لحظه تلاش و کوشش بی‌وقفه‌ی ایشان و از وجود پرمهر و عطوفت آن‌هاست.

همچنین زحمات بی‌حد و بی‌دریغ استاد عزیزم سرکار خانم دکتر مهری اخوان ملایری را ارج می‌نهم که شوق آموختن را در من زنده نمودند و با رهنمودهای ارزنده‌ی خود راهگشای اینجانب بودند و من گل‌دانسته‌هایم را از گلستان جان‌بخش وجود ایشان به ارمغان دارم.

در پایان مراتب سپاس خویش را تقدیم همه‌ی آن‌هایی می‌کنم که در سیر تاریخ ریاضی پنجره‌ای به ناشناخته‌ها گشودند تا رهگشای بشر به سوی واقعیت باشد.

چکیده

فرض کنیم G یک گروه باشد و $M_\circ(G)$ نمایش حلقه‌ی تقریبی توابع حافظ صفر روی G باشد. در این صورت زیرگروهی از $(M_\circ(G),+)$ که توسط $End(G)$ تولید می‌شود، یک حلقه‌ی تقریبی است که حلقه‌ی تقریبی درونریختی‌های G نامیده می‌شود و آن را با $\mathcal{E}(G)$ و عناصر توزیع‌پذیر آن را با $D(\mathcal{E}(G))$ نمایش می‌دهیم.

در این پایان‌نامه مطالب ذیل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

(۱) برای گروه G، همواره روابط $End(G) \subseteq D(\mathcal{E}(G)) \subseteq \mathcal{E}(G)$ برقرار است. نشان می‌دهیم که کلاس همه‌ی گروه‌ها با توجه به این‌که روابط شمول، محض یا غیرمحض در نظر گرفته شوند، به چهار زیرکلاس ناتهی افراز می‌شود.

(۲) با استفاده از نظریه‌ی حلقه‌های تقریبی، برای گروه متناهی G مشخصات کاملی از زیرحلقه‌های تقریبی ماکسیمال $M_\circ(G)$ ارائه می‌دهیم.

(۳) مشخص می‌کنیم که $\mathcal{E}(G)$ در چه صورت به عنوان یک زیرحلقه‌ی تقریبی از $M_\circ(G)$ ماکسیمال می‌باشد.

(۴) گروه G یک Eـگروه است، اگر حلقه‌ی تقریبی $\mathcal{E}(G)$ یک حلقه باشد. ویژگی‌هایی از Eـگروه‌های متناهی مطرح کرده و سپس بررسی می کنیم که برای Eـگروه متناهی G، $\mathcal{E}(G)$ در چه صورت به عنوان حلقه در $M_\circ(G)$ ماکسیمال می‌باشد.

مقالات اصلی که این پایان‌نامه با کمک آن‌ها تدوین شده است [۲]، [۳]، [۴]، [۱۲] و [۱۴] می‌باشند.

کلمات کلیدی: حلقه‌ی تقریبی، نگاشت‌های حافظ صفر، درونریختی، حلقه‌ی تقریبی درونریختی‌ها، توزیع‌پذیر، Eـگروه، افراز گروه‌ها

مقدمه

در جبر از بین تمام نگاشت‌هایی که بین دو ساختمان جبری تعریف می‌شوند آن دسته از نگاشت‌هایی که حافظ ساختار جبری می‌باشند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. به‌خصوص در نظریه‌ی گروه‌ها، نگاشت‌هایی که ساختار گروه را حفظ می‌کنند، از دیرباز توجه بسیاری از ریاضی‌دانان را به خود جلب کرده است. یک دسته از این نگاشت‌ها، درونریختی‌های گروه G می‌باشند. این مسئله ما را بر آن داشت که در این رساله به بررسی بیشتر درونریختی‌های یک گروه بپردازیم.

ابتدا ساختاری جبری تحت عنوان حلقه‌ی تقریبی را معرفی می‌کنیم که دارای شباهت بسیاری با حلقه می‌باشد و به‌خصوص با کمک درونریختی‌های گروه G، حلقه‌ی تقریبی $\mathcal{E}(G)$ را می‌توان ارائه نمود. با استفاده از این حلقه‌ی تقریبی افرازی برای کلاس همه‌ی گروه‌ها ارائه می‌دهیم.

سپس پاسخی برای سوالات زیر مطرح می‌کنیم:

(۱) حلقه‌ی تقریبی $\mathcal{E}(G)$ در چه صورت به عنوان زیرحلقه‌ی تقریبی در $M_\circ(G)$ ماکسیمال می‌باشد؟

(۲) حلقه‌ی تقریبی $\mathcal{E}(G)$ در چه صورت به عنوان حلقه در $M_\circ(G)$ ماکسیمال می‌باشد؟

این پایان نامه مشتمل بر پنج فصل می‌باشد و به ترتیب زیر تنظیم شده است.

در فصل اول تعاریف و قضایایی مقدماتی از نظریه‌ی گروه‌ها مطرح کرده‌ایم که در فصل‌های آتی مورد نیاز می‌باشند. اکثر قضایا و لم‌های این فصل بدون اثبات آورده شده‌اند، اما مرجع هر یک از مطالب با ذکر شماره‌ی قضیه یا لم آورده شده است تا خواننده در صورت نیاز به آن مراجعه کند. در طول پایان‌نامه از مفاهیمی مانند عمل گروه، جابه‌جاگر، گروه‌های آزاد، گروه‌های پوچ‌توان و ۲ـ انگل یاد می‌کنیم. لذا بخش‌های مختلفی از فصل اول را به معرفی مختصری از این مفاهیم اختصاص داده‌ایم.

در فصل دوم به معرفی و بررسی اجمالی یک ساختمان جبری می‌پردازیم که تحت عنوان «حلقه‌ی تقریبی» مطرح می‌شود. این ساختمان جبری شباهت بسیاری به حلقه دارد. حلقه‌ی

درونریختی‌های گروه‌های آبلی نقش مهمی را در جبر ایفا می‌کند. یکی از مثال‌های حلقه‌ی تقریبی که در این فصل ارائه می‌شود و نقش مهمی در طول پایان‌نامه در بردارد، حلقه‌ی تقریبی درونریختی‌های گروه G می‌باشد که با $\mathcal{E}(G)$ نمایش داده می‌شود.

در فصل سوم با کمک حلقه‌ی تقریبی $\mathcal{E}(G)$ کلاس همه‌ی گروه‌ها را به چهار زیرکلاس افراز می‌کنیم و با ارائه‌ی مثال برای هر یک از زیرکلاسها، نشان می‌دهیم که زیرکلاس‌های مطرح شده ناتهی می‌باشند.

در فصل چهارم به بررسی زیرحلقه‌های تقریبی ماکسیمال $M_{\circ}(G)$ روی گروه متناهی G می‌پردازیم. برای این منظور حلقه‌ی تقریبی قویاً ۲ـ اولیه را معرفی کرده و در هریک از حالات زیر بررسی می‌کنیم که زیرحلقه‌ی تقریبی ماکسیمال F از $M_{\circ}(G)$ چه شرایطی را در بر می‌گیرد.

(۱) F قویاً ۲ـ اولیه نباشد.

(۲) F قویاً ۲ـ اولیه باشد، اما F حلقه نباشد.

(۳) F قویاً ۲ـ اولیه و حلقه باشد.

و در نهایت نشان می‌دهیم که زیرحلقه‌های تقریبی حاصل شده تنها زیرحلقه‌های تقریبی ماکسیمال $M_{\circ}(G)$ می‌باشند. قضایای این فصل در اثبات نتایج اصلی فصل ۵ به کار گرفته می‌شوند.

در فصل پنجم ابتدا شرایط لازم و کافی برای آن‌که $\mathcal{E}(G)$ به عنوان زیرحلقه‌ی تقریبی در $M_{\circ}(G)$ ماکسیمال باشد را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس به بررسی ویژگی‌هایی از Eـگروه‌های متناهی می‌پردازیم.

در ادامه به بررسی مختصری از پوشش یک گروه توسط زیرگروه‌های آن پرداخته و با قرار دادن ویژگی‌های خاص روی زیرگروه‌های مشمول در پوشش گروه، تاثیر آن را روی گروه بررسی می‌کنیم. به‌علاوه برای Eـگروه غیرآبلی G با شرایطی خاص، پوششی خاص از زیرگروه‌ها ارائه می‌دهیم. هدف از ارائه‌ی چنین پوششی، بررسی شرایطی می‌باشد که $\mathcal{E}(G)$ به عنوان حلقه در $M_{\circ}(G)$ ماکسیمال شود. البته هنوز پاسخ کاملی برای این سوال ارائه نشده است.

مقالات اصلی که این پایان‌نامه با کمک آن‌ها تدوین شده است، مقالات [۲]، [۳]، [۴]، [۱۲] و [۱۴] می‌باشند.

ناهید یوسفی

دانشگاه الزهراء (س)

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدماتی از نظریه‌ی گروه‌ها

در این فصل مفاهیم مقدماتی از نظریه‌ی گروه‌ها را مرور می‌کنیم که خواننده احتمالاً پیش از این با آن‌ها آشنا بوده است و ما در طول پایان‌نامه به آن‌ها استناد می‌کنیم. با فرض آشنا بودن خواننده با این مطالب و به منظور پیش‌گیری از تکرار، اکثر لم‌ها و قضایا را بدون اثبات می‌آوریم. اما در مقابل هر یک از تعاریف و یا قضایا مراجعی که آن تعریف و قضایا از آن‌ها اخذ شده است، با ذکر دقیق شماره‌ی قضیه و یا صفحه آمده است تا خواننده بتواند برای مطالعه‌ی دقیق‌تر به این مراجع رجوع کند.

در این پایان‌نامه G نماد گروه است و همچنین در اکثر موارد گروه‌ها به صورت جمعی نوشته می‌شوند و عضو همانی گروه را با ۰ نمایش می‌دهیم. البته این به معنای آن نیست که گروه‌ها آبلی می‌باشند. (در برخی از قضایا برای راحتی از در نظر گرفتن گروه G به صورت جمعی صرف‌نظر کرده‌ایم.)

تعاریف و قضایای این فصل از [۷]، [۱۵]، [۱۶] و [۱۷] انتخاب شده است.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی نظریه‌ی گروه‌ها

در این بخش به برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی و نیز علامات و اصطلاحات پرکاربرد نظریه‌ی گروه‌ها که در بخش‌ها و فصل‌های آتی مورد نیاز است می‌پردازیم.

پیش از این با مفهوم گروه آشنا شده‌ایم. در این پایان‌نامه علاوه بر گروه‌ها، ساختمان‌های جبری دیگری به کار گرفته شده است که در این بخش جهت یادآوری به معرفی مختصری از آن‌ها

می‌پردازیم.

یک **گروهوار** عبارت است از جفت مرتب $(S,*)$، که در آن S مجموعه‌ای ناتهی و $*$ عملی دوتایی روی آن است. به عنوان مثال $(\mathbb{Z},*)$ که در آن به ازای هر $a,b\in\mathbb{Z}$، $a*b=a-b$، یک گروهوار می‌باشد.

حال اگر در یک گروهوار عمل $*$ شرکت‌پذیر باشد، $(S,*)$ یک **نیم‌گروه** نامیده می‌شود. واضح است که هر نیم‌گروه، یک گروهوار می‌باشد.

به طور مثال $(\mathbb{N},*)$ که در آن به ازای هر $a,b\in\mathbb{N}$، $a*b=a$، یک نیم‌گروه می‌باشد.

فرض کنیم G یک گروه باشد، در این صورت هر همریختی α بر G به توی G را یک **درونریختی** G می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی درونریختی‌های G با عمل ترکیب توابع، تشکیل یک نیم‌گروه می‌دهد که آن را با $End(G)$ نمایش می‌دهیم.

به‌علاوه مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های G با عمل ترکیب توابع، تشکیل یک گروه می‌دهد. این گروه را **گروه خودریختی‌های** G می‌نامیم و آن را با $Aut(G)$ نمایش می‌دهیم. در سراسر این پایان‌نامه، خودریختی همانی G را که یک درونریختی G است، با علامت 1_G و درونریختی بدیهی G را با علامت $\circ_G$ نشان خواهیم داد.

در ادامه به معرفی دو زیرگروه مهم $Aut(G)$ می‌پردازیم.

فرض کنیم G یک گروه و g عضو دلخواهی از G باشد و نگاشت $I_g:G\longrightarrow G$ به ازای هر $x\in G$ با ضابطه‌ی $I_g(x)=g^{-1}xg$ تعریف شده باشد. به آسانی می‌توان دید که $I_g\in Aut(G)$. این خودریختی را **خودریختی داخلی** G القا شده توسط g می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های داخلی G را با $Inn(G)$ نمایش می‌دهیم که زیرگروه نرمالی از $Aut(G)$ می‌باشد.

فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت خودریختی α از G را **خودریختی مرکزی** G نامیم، هرگاه α با هر خودریختی داخلی G جابه‌جا شود. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های مرکزی G تشکیل یک زیرگروه می‌دهد که آن را با $Aut_c(G)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۱.۱.۱ فرض کنیم α خودریختی مرکزی از G باشد. در این صورت به ازای هر x,y از G، $\alpha(x^{-1}yx)=x^{-1}\alpha(y)x$.

اثبات. [۱۶] لم ۲.۳.۵. □

در قضیه‌ی زیر تعریفی معادل با خودریختی مرکزی ارائه می‌دهیم.

لم ۲.۱.۱ فرض کنیم α یک خودریختی از G باشد. در این صورت α خودریختی مرکزی است اگر و تنها اگر به ازای هر x از G، $x^{-1}\alpha(x) \in Z(G)$.

اثبات. [۱۶] لم ۴.۳.۵. □

واضح است که هرگاه G آبلی باشد، آن‌گاه $Aut(G) = Aut_c(G)$ و همچنین اگر G گروهی باشد که $Z(G) = 1$ آن‌گاه $Aut_c(G) = 1$. به‌علاوه به آسانی دیده می‌شود که $Aut_c(G) \lhd Aut(G)$.

حال به معرفی زیرگروه‌های مهمی از گروه G می‌پردازیم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای ناتهی از گروه G باشد، مقطع تمام زیرگروه‌های نرمال G که شامل X باشند را **بستار نرمال** X در G گوییم و با $\overline{X}$ یا X^G نمایش می‌دهیم. به وضوح X^G کوچکترین زیرگروه نرمال G است که شامل X می‌باشد. همچنین برای هر $x \in G$ بستار نرمال x را با $\langle x\rangle^G$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱ اگر H زیرگروهی از G باشد، H را **زیرگروه کاملاً پایای** G گوییم، هرگاه به ازای هر درونریختی G مانند α، $\alpha(H) \leq H$.

H را **زیرگروه مشخص** G نامیم در صورتی که به ازای هر خودریختی G مانند γ، $\gamma(H) \leq H$. هرگاه H زیرگروه مشخص G باشد، می‌نویسیم $H\ ch\ G$.

به آسانی ثابت می‌شود که اگر H زیرگروه مشخص G باشد، آن‌گاه به ازای هر خودریختی G مانند γ، $\gamma(H) = H$. به وضوح هر زیرگروه مشخص، نرمال است.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه و m عددی طبیعی باشد. در این صورت زیرگروه‌های G^m و G_m از G را به صورت $G^m = \langle g^m | g \in G\rangle$ و $G_m = \langle g \in G | g^m = 1\rangle$ **تعریف** می‌کنیم.

اگر G یک گروه آبلی باشد، آن‌گاه واضح است که $G^m = \{g^m | g \in G\}$.

تعریف ۶.۱.۱ گوییم گروه G از توان m است هرگاه m کوچکترین عدد طبیعی باشد که $G^m = 1$ یا به طور معادل $G_m = G$. **توان گروه** G را با $exp(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه و p یک عدد اول باشد. G یک p-گروه نامیده می‌شود هرگاه مرتبه‌ی هر عضو غیربدیهی G توان مثبتی از p باشد. زیرگروه H از G یک p- زیرگروه نامیده می‌شود هرگاه H یک p-گروه باشد.

اگر G یک گروه متناهی باشد، آن‌گاه G یک p-گروه است اگر و تنها اگر مرتبه‌ی آن به صورت p^n باشد که n یک عدد صحیح نامنفی است.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $|G| = p^\alpha n$ که در آن α یک عدد صحیح نامنفی است و p عدد اولی است که $p \nmid n$. در این صورت هر زیرگروه G از مرتبه‌ی p^α را یک p- زیرگروه سیلوی G می‌نامیم. طبق قضیه‌ی سیلو[۱] می‌دانیم که چنین زیرگروهی همواره موجود است و مجموعه‌ی همه‌ی p- زیرگروه‌های سیلوی G را با $syl_p(G)$ و تعداد عناصر آن را با $n_p(G)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم G_1، ...، G_n، n گروه باشند. حاصل‌ضرب مستقیم (خارجی) این گروه‌ها را با $G_1 \times \ldots \times G_n$ نمایش می‌دهیم و می‌دانیم که عمل آن به صورت مولفه‌ای تعریف می‌شود.

قضیه ۹.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه باشد و G_1، ...، G_n زیرگروه‌های نرمالی از G باشند به طوری که

i) $G = G_1 \ldots G_n$.

ii) به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $G_i \cap G_1 \ldots G_{i-1} G_{i+1} \ldots G_n = 1$.

در این صورت $G \cong G_1 \times \ldots \times G_n$.

اثبات. [۱۶] قضیه‌ی ۲.۱.۵. □

قضیه‌ی فوق ما را به تعریف زیر هدایت می‌کند.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه و G_1،...،G_n زیرگروه‌های نرمالی از G باشند. G **حاصل‌ضرب مستقیم داخلی** G_i ها نامیده می‌شود، هرگاه هر عضو g از G به طور منحصر به فرد به صورت $g = g_1 \ldots g_n$ نوشته شود که در آن به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $g_i \in G_i$.

[۱] Ludwig sylow

تعریف ۱.۱.۱۱ گروه غیربدیهی G را **تجزیه‌ناپذیر** گوییم در صورتی که نتوان G را به حاصل‌ضرب مستقیم دو زیرگروه غیربدیهی‌اش تجزیه کرد، به عبارت دیگر هرگاه $G = H \times K$ که در آن H و K زیرگروه‌هایی از G اند، آن‌گاه $H = ۱$ یا $K = ۱$.

قضیه ۱.۱.۱۲ فرض کنیم G یک p-گروه متناهی غیربدیهی باشد و $a \in G$. در این صورت اگر مرتبه‌ی a از مرتبه‌ی هر عضو G ناکمتر باشد، آن‌گاه G دارای زیرگروهی مانند H است به طوری که $G = \langle a \rangle \times H$.

اثبات. [۱۶] قضیه‌ی ۲.۱.۶. □

در ادامه به بررسی گروه‌های آبلی مقدماتی خواهیم پرداخت. برای این منظور ابتدا مقدماتی از گروه‌های خطی مطرح می‌کنیم.

فرض کنیم F یک میدان و n عددی طبیعی باشد. مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های معکوس‌پذیر $n \times n$ که درایه‌های هر یک از آن‌ها در F اند، با $GL(n, F)$ نمایش داده می‌شود. به آسانی می‌توان نشان داد که $GL(n, F)$ با عمل ضرب ماتریس‌ها تشکیل یک گروه می‌دهد که **گروه خطی عام** (از درجه‌ی n بر F) نامیده می‌شود. با فرض این‌که F یک میدان متناهی باشد و $|F| = q$ (می‌دانیم که q به صورت توان مثبتی از یک عدد اول است)، گروه $GL(n, F)$ با نماد $GL(n, q)$ نشان داده می‌شود.

این مفهوم را می‌توان به صورت دیگری نیز بیان نمود. فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد n روی میدان F باشد، مجموعه‌ی همه‌ی تبدیلات خطی معکوس‌پذیر V با $GL(V)$ نمایش داده می‌شود. واضح است که $GL(V)$ با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهد. این گروه، **گروه خطی عام** V (روی F) نامیده می‌شود. واضح است که $GL(V) \cong GL(n, F)$، زیرا کافیست پایه‌ای برای V انتخاب کرده و هر تبدیل خطی V را به ماتریس آن تبدیل خطی در پایه‌ی انتخاب شده تصویر کنیم. لذا می‌توان نشان داد که

$$|GL(n,q)| = (q^n - ۱)(q^n - q)\dots(q^n - q^{n-۱})$$

تعریف ۱.۱.۱۳ p-گروه آبلی G را **آبلی مقدماتی** گوییم هرگاه مرتبه‌ی هر عضو غیربدیهی G برابر با عدد اول p باشد.

تذکر۱.۱.۱۴ اگر pـگروه آبلی مقدماتی G از مرتبه‌ی p^n باشد، آن‌گاه اعضای a_1،...،a_n از مرتبه‌ی p در G موجودند به طوری که $G = \langle a_1 \rangle \times \ldots \times \langle a_n \rangle$ و در نتیجه

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p}_{n \text{ بار}}$$

لم ۱.۱.۱۵ فرض کنیم G یک pـگروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی p^n باشد. در این صورت یک فضای برداری مانند V روی میدان $\mathbb{Z}_p$ از بعد n وجود دارد به طوری که $G \cong V^+$ که در آن V^+ گروه جمعی فضای برداری V است. به‌علاوه $Aut(G) \cong GL(V)$ که در آن $GL(V)$ مجموعه‌ی همه‌ی تبدیلات خطی معکوس‌پذیر V است.

اثبات. [۱۶] لم ۳.۲.۵. □

در لم فوق ساختار گروه خودریختی‌های یک گروه آبلی مقدماتی را مشخص نمودیم. نظر به اهمیت این موضوع، قضیه‌ی زیر را به صورت مستقل ذکر می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۱۶ فرض کنیم G یک گروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی p^m باشد. در این صورت $Aut(G) \cong GL(m,p)$. بنابراین

$$|Aut(G)| = (p^m - 1)(p^m - p)\ldots(p^m - p^{m-1})$$

اثبات. [۱۶] قضیه‌ی ۵.۴.۶. □

۱.۲ عمل گروه

در این بخش به یادآوری مفهوم عمل یک گروه روی یک مجموعه می‌پردازیم که این مفهوم خواص مهمی از گروه‌های متناهی را معین می‌کند.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه‌ای ناتهی باشد. گوییم G بر مجموعه‌ی ناتهی X عمل می‌کند، اگر به ازای هر g از G و هر x از X، عضو یکتایی از X که آن را با نماد $x \bullet g$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد به طوری که

i) به ازای هر $x \in X$، $x \bullet ۱ = x$.

ii) به ازای هر $g_۱, g_۲$ از G و هر x از X، $x \bullet (g_۱ g_۲) = (x \bullet g_۱) \bullet g_۲$.

• را **عمل** G **بر** X نامیم و برای سهولت به جای $x \bullet g$ می‌نویسیم xg.

فرض کنیم G بر مجموعه‌ی X عمل کند و $g \in G$ و $x \in X$. گوییم g عضو x را ثابت نگه می‌دارد هرگاه $xg = x$. مجموعه‌ی تمام اعضایی از G را که هر عضو X را ثابت نگه می‌دارند، **هسته‌ی عمل** می‌نامیم.

همچنین به ازای هر $x \in X$ مجموعه‌ی $\{g \in G | xg = x\}$ زیرگروهی از G می‌باشد که آن را **پایدارساز** x **در** G می‌نامیم و با نماد $St_G(x)$ یا G_x نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۲ فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی ناتهی X عمل کند. به ازای هر $g \in G$، نگاشت $\varphi_g : X \longrightarrow X$ را با ضابطه‌ی $\varphi_g(x) = xg$ تعریف می‌کنیم. این نگاشت جایگشتی از X است و به‌علاوه نگاشت $\varphi : G \longrightarrow S_X$ با ضابطه‌ی $\phi(g) = \phi_g$ یک همریختی است که هسته‌ی آن با هسته‌ی عمل برابر است و به‌علاوه $Ker\varphi = \bigcap_{x \in G} St_G(x)$.

اثبات. [۱۶] قضیه‌ی ۱.۱.۲ و قضیه‌ی ۱.۳.۲. □

همریختی معرفی شده در قضیه‌ی فوق را **نمایش جایگشتی** G متناظر عمل گروه می‌نامند. عمل G بر مجموعه‌ی ناتهی X را **عمل صادق** گوییم، هرگاه نمایش جایگشتی متناظر G یک به یک باشد.

فرض کنیم G بر مجموعه‌ی X عمل کند. رابطه‌ی $\sim$ را بر X به صورت زیر تعریف می‌کنیم. $x_۱ \sim x_۲$ اگر و تنها اگر $g \in G$ وجود داشته باشد به طوری که $x_۱ g = x_۲$. رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی در X می‌باشد. هر رده‌ی هم‌ارزی این رابطه را یک **مدار عمل** یا Gـ مدار می‌نامیم. به ازای هر $x \in X$، مدار شامل x را مدار x در G می‌نامیم و آن را با نماد $Orb_G(x)$ نمایش می‌دهیم. در صورتی که $Orb_G(x)$ مجموعه‌ای متناهی باشد، تعداد اعضای آن را **طول مدار** x **در** G می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۳ فرض کنیم G بر مجموعه‌ی X عمل کند. این عمل را **متعدی** نامیم در صورتی که X تنها مدار عمل باشد. به عبارت دیگر به ازای هر دو عضو $x_۱$ و $x_۲$ از X، عضوی از G مانند g موجود باشد به طوری که $x_۱ g = x_۲$.

فرض کنیم گروه G به طور متعدی بر مجموعه‌ی X عمل کند و $|X| \geq ۲$. عمل G بر X را **۲ـ متعدی (متعدی دوگانه)** گوییم در صورتی که به ازای هر دو زوج مرتب از اعضای متمایز X مانند (x,x') و (y,y')، عضوی از G مانند g موجود باشد به طوری که $xg = y$ و $x'g = y'$. اگر عمل G بر X، ۲ـ متعدی باشد، اصطلاحاً گوییم G به طور ۲ـ متعدی بر X عمل می‌کند.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنیم گروه G به طور متعدی بر مجموعه‌ی X عمل کند. زیرمجموعه‌ی B از X را یک **بلوک عمل** گوییم در صورتی که به ازای هر $g \in G$، $Bg = B$ یا $Bg \cap B = \emptyset$.
واضح است که $\emptyset$، X و نیز زیرمجموعه‌های یکانی X بلوک می‌باشند. این بلوک‌ها، **بلوک‌های بدیهی** نامیده می‌شوند.

تعریف ۵.۲.۱ عمل G بر X را **اولیه** گوییم در صورتی که تنها بلوک‌های عمل، بلوک‌های بدیهی باشند. در غیر این صورت آن را **غیراولیه** می‌نامیم. اگر عمل G بر X اولیه باشد، اصطلاحاً می‌گوییم G به طور اولیه بر X عمل می‌کند.

در قضیه‌ی زیر تعریفی معادل با اولیه بودن عمل مطرح می‌کنیم.

قضیه ۶.۲.۱ فرض کنیم گروه G به طور متعدی بر X عمل می‌کند. این عمل اولیه است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$، G_x زیرگروه ماکسیمالی از G باشد.

اثبات. فرض کنیم عمل G بر X اولیه باشد و $x \in X$ موجود باشد به طوری که G_x زیرگروه ماکسیمال G نباشد. بنابراین زیرگروه H از G موجود است به طوری که $G_x < H < G$. قرار می‌دهیم $Y = \{x\sigma | \sigma \in H\}$. چون $G_x < H$، لذا $|Y| \geq ۲$. از طرفی اگر $Y = X$، چون به ازای هر $g \in G$ داریم $xg \in X$، لذا $\sigma \in H$ موجود است به طوری که $xg = x\sigma$. بنابراین $g\sigma^{-۱} \in G_x < H$ و چون $\sigma \in H$، لذا $g \in H$. بنابراین نتیجه می‌شود $G = H$ که تناقض است. لذا $Y \neq X$. بنابراین $Y \neq \emptyset$، $Y \neq X$ و چون $|Y| \geq ۲$، Y یکانی نیست.

حال اگر $Y \cap Yg \neq \emptyset$، عنصر $z \in Y \cap Yg$ را در نظر می‌گیریم. لذا $\sigma_۱, \sigma_۲ \in H$ وجود دارند به طوری که $z = x\sigma_۱$ و $z = x\sigma_۲ g$، در نتیجه $x\sigma_۱ = x\sigma_۲ g$. بنابراین $\sigma_۲ g \sigma_۱^{-۱} \in st_G(x) < H$ و چون $\sigma_۱, \sigma_۲ \in H$، لذا $g \in H$. بنابراین نتیجه می‌شود که $Y = Yg$. لذا Y یک بلوک غیربدیهی عمل است. بنابراین G اولیه نیست.

برعکس، فرض کنیم G اولیه نباشد و Y بلوکی غیربدیهی باشد و $x \in Y$. تعریف می‌کنیم $H = \{g \in G | Yg = Y\}$. واضح است که $H \leq G$. زیرا $1 \in H$، بنابراین $H \neq \emptyset$. به‌علاوه به ازای هر $h_1, h_2 \in H$، $Yh_1 h_2^{-1} = Yh_2^{-1} = Y$. لذا $h_1 h_2^{-1} \in H$.

به‌علاوه فرض کنیم b, c اعضای دلخواهی از Y باشند. چون عمل G روی X متعدی است، طبق تعریف $g \in G$ موجود است به طوری که $bg = c$. بنابراین $c \in Y \cap Yg$. لذا $Y = Yg$. در نتیجه $g \in H$. بنابراین H به صورت متعدی روی Y عمل می‌کند. لذا $|Y| = |H : H_x|$.

از طرفی داریم $G_x \leq H$. زیرا فرض کنیم g عضو دلخواهی از G_x باشد. لذا $x = xg \in Y \cap Yg$. بنابراین $Y = Yg$ که طبق تعریف نتیجه می‌شود $g \in H$. لذا $G_x \leq H$. بنابراین $G_x = H_x$. حال نشان می‌دهیم G_x زیرگروه محض H و H زیرگروه محض G می‌باشد. داریم $|H : G_x| = |H : H_x| = |Y|$. لذا اگر $G_x = H$، آن‌گاه $1 = |H : G_x|$. بنابراین $|Y| = 1$ که متناقض با غیربدیهی بودن بلوک Y می‌باشد. همچنین اگر $G = H$، آن‌گاه $|Y| = |H : G_x| = |G : G_x| = |X|$. لذا از آن‌جا که $Y \subseteq X$، نتیجه می‌شود $Y = X$ که متناقض با غیربدیهی بودن بلوک Y می‌باشد. لذا $G_x < H < G$. بنابراین G_x زیرگروه ماکسیمال G نمی‌باشد که متناقض با فرض است. □

لم ۱.۲.۷ هر گروه ۲ـ متعدی، اولیه است.

اثبات. فرض کنیم G به صورت ۲ـ متعدی روی X عمل کند و Y بلوک غیربدیهی G باشد. لذا عناصر مجزای $a, b \in Y$ و $c \in X - Y$ وجود دارند. چون G، ۲ـ متعدی است، لذا به ازای زوج‌های مرتب (a, b) و (a, c)، $g \in G$ موجود است که $bg = c$ و $ag = a$. لذا $a \in Y \cap Yg$. بنابراین $Y = Yg$. لذا $c = bg \in Y$ که متناقض با $c \in X - Y$ می‌باشد. □

قضیه ۱.۲.۸ فرض کنیم F گروه متناهی غیربدیهی باشد و $G = Aut(F)$ به طور طبیعی روی $F - \{1\}$ عمل کند.

(i) اگر G متعدی باشد، F یک pـگروه آبلی مقدماتی است.

(ii) اگر G، ۲ـ متعدی باشد، $p = 2$ یا $|F| = 3$.

اثبات. (i) فرض کنیم p عدد اولی باشد که $p | |F|$. لذا $x \in F$ موجود است به طوری که $|x| = p$. چون G متعدی است، به ازای هر $y \in F - \{1\}$، $\alpha \in G$ موجود است به طوری که $y = \alpha(x)$ و

چون $\alpha \in Aut(F)$، لذا $|\alpha(x)| = p$. بنابراین همه‌ی عناصر F از مرتبه‌ی p می‌باشند. در ادامه نشان می‌دهیم F آبلی است. فرض کنیم $F \ni y \neq ۱$ و $Z(F) \ni x \neq ۱$. از آن‌جا که G متعدی است، $f \in G$ موجود است به طوری که $y = f(x)$ و چون $x \in Z(F)$ و $Z(F)$ زیرگروه مشخص F می‌باشد، نتیجه می‌شود $y = f(x) \in Z(F)$. لذا $F = Z(F)$. بنابراین F گروهی آبلی است که مرتبه‌ی همه‌ی عناصر آن عدد اول p می‌باشد. لذا F آبلی مقدماتی می‌باشد.

(ii) اگر $p = ۲$ حکم برقرار است. فرض کنیم $p > ۲$ و $F \ni x \neq ۱$. چون x از مرتبه‌ی ۲ نمی‌باشد، لذا $x \neq x^{-۱}$. چون $p > ۲$، G حداقل دارای ۳ عنصر می‌باشد. لذا فرض می‌کنیم y عضو دلخواهی از F باشد به طوری که $x \neq y \neq ۱$. طبق ۲ـ متعدی بودن G، $\alpha \in G$ موجود است که برای زوج‌های مرتب $(x, x^{-۱})$ و (x, y) داریم $\alpha(x) = x$ و $\alpha(x^{-۱}) = y$. لذا $x^{-۱} = (\alpha(x))^{-۱} = \alpha(x^{-۱})$، در نتیجه $y = x^{-۱}$. لذا $F = \{۱, x, x^{-۱}\}$. بنابراین $|F| = ۳$. □

۳.۱ جابه‌جاگرها

فرض کنیم G یک گروه و $x_۱$،...،x_n اعضایی از G باشند. در این صورت جابه‌جاگر $[x_۱, x_۲]$ به صورت $x_۱^{-۱}x_۲^{-۱}x_۱x_۲$ تعریف می‌شود و در حالت کلی برای $n \geq ۲$، جابه‌جاگر $[x_۱, \ldots, x_n]$ را به استقراء چنین تعریف می‌کنیم:

$$[x_۱, \ldots, x_n] = [[x_۱, \ldots, x_{n-۱}], x_n]$$

قرارداد می‌کنیم که $[x_۱] = x_۱$ و $[x,_n y] = [x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n}]$.

در لم زیر خواص مهم و کاربردی جابه‌جاگرها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

لم ۱.۳.۱ فرض کنیم G یک گروه و x، y و z اعضایی از G باشند. در این صورت

(i) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$.

(ii) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z]$.

(iii) $[x^{-۱}, y] = ([x, y]^{-۱})^{x^{-۱}} = [x, y]^{-۱}[[x, y]^{-۱}, x^{-۱}]$.

(iv) $[x, y^{-۱}] = ([x, y]^{-۱})^{y^{-۱}} = [x, y]^{-۱}[[x, y]^{-۱}, y^{-۱}]$.