بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض (آنالیز)

عنوان:

ضربگرهای با برد بسته روی جبرهای باناخ

دانشجو:

فاطمه محمودی

استاد راهنما:

دکتر عبدالحمید ریاضی

استاد مشاور:

دکتر سیّد منصور واعظ‌پور

شهریور ۱۳۸۷

بسمه تعالي

تاريخ:
شماره:

معاونت پژوهشي
فرم پروژه تحصيلات
تكميلي ۷

فرم اطلاعات پايان‌نامه
كارشناسي- ارشد و دكترا

دانشگاه صنعتي
اميركبير
(پلي‌تكنيك تهران)

مشخصات دانشجو:

نام و نام خانوادگي:فاطمه محمودی دانشجوي آزاد ● بورسيه ○ معادل ○

شماره دانشجوئي:۸۵۱۱۳۰۳۰ دانشكده: رياضی وعلوم كامپيوتر

رشته تحصيلي:رياضی محض گروه: آناليز

مشخصات استاد راهنما:

نام و نام خانوادگي:دكتر عبدالحميد رياضی درجه و رتبه:استاد

مشخصات استاد مشاور:

نام و نام خانوادگي:دكتر سيد منصور واعظ پور درجه و رتبه:دانشيار

عنوان پايان‌نامه به فارسي : ضربگرهای با برد بسته روی جبرهای باناخ

عنوان پايان‌نامه به انگليسي: The Multipliers with closed range on Banach algebras

نوع پروژه: كارشناسي ○ ارشد ● دكترا ○ سال تحصيلي:1386-87

كاربردي ○ بنيادي ● توسعه‌اي ○ نظري ○

تاريخ شروع :۸۶/۷ تاريخ خاتمه :۸۷/۷ تعداد واحد :۶

سازمان تأمين كننده اعتبار :

واژه‌هاي كليدي به فارسي:

ضربگر،جبر بدون ترتيب،يكه تقريبی كرانداروضربگر خودتوان و معكوس پذير

واژه‌هاي كليدي به انگليسي:

Multiplier ,without order algebra , Bounded approximate Identity ,Idempotent Multiplier and Invertible

مشخصات ظاهري	تعداد صفحات ۶۱	تصوير ○ نقشه ○	جدول ○ واژه‌نامه ●	نمودار ○	تعداد مراجع ۲۴	تعداد صفحات ضمائم
زبان متن	فارسي ●	انگليسي ○	چكيده	فارسي ●	انگليسي ●	
يادداشت						

نظرها و پيشنهادها به منظور بهبود فعاليت‌هاي پژوهشي دانشگاه

استاد:

دانشجو:

امضاء استاد راهنما:

تاريخ:۸۷/۰۹/۲۵

تقدیم‌نامه

تقدیم به روحِ پاک پدرم و قلب مهربان مادرم و فداکاری همسرم

قدردانی

در اینجا لازم است از جناب آقای دکتر عبدالحمید ریاضی که راهنمایی اینجانب را به عهده داشتند و همچنین از جناب آقای دکتر سید منصور واعظ پورکه به عنوان استاد مشاور مرا یاری نمودند قدردانی گردد .

چکیده

مقالات زیر در این پایان‌نامه دارای نقشی اساسی می‌باشند :

WHEN IS THE RANGE OF A MULTIPLIER ON A BANACH ALGEBRA CLOSED?

Ali Ülger

Mathematatische Zeitschrift 254 (2006) 715-728

A CHARACTERIZATION OF THE CLOSED UNITAL IDEALS OF THE FOURIER -STIELTJES ALGEBRA B(G) OF A LOCALLY COMPACT AMENABLE GROUP G

Ali Ülger

Journal of Functional Analysis 205 (2003) 90-106

MULTIPLIERS WITH CLOSED RANGE ON REGULAR COMMUTATIVE BANACH ALGEBRAS

Pietro Aiena Kjeld B .Laursen

Procceedings of The American Mathematical Society 121 (1994)1039-1048

در ابتدا به بررسی ضربگرها روی جبرهای باناخ بدون ترتیب می پردازیم و خواصی از جبر ضربگرها را ثابت می کنیم ، در ادامه با برقراری فرض (H) در جبر باناخ A که یکه تقریبی کراندار دارد ،ضربگر $T : A \longrightarrow A$ با برد بسته به حاصل ضرب یک ضربگر خودتوان ویک ضربگر معکوس پذیر تجزیه می شود وکاربردهایی ازقضایای عنوان شده مطرح می شود .

لغات کلیدی : ضربگر، جبر بدون ترتیب ، یکه تقریبی کراندار، ضربگر خود توان و معکوس پذیر

فهرست مندرجات

مقدمه

مفهوم ضربگر توسط هلگاسون [۱] در سال ۱۹۵۶ به عنوان تابع پیوسته f روی فضای ا یده ال ماکسیمال $\Delta(A)$ معرفی شد ، بطوریکه $f\widehat{A} \subset \widehat{A}$ که $\widehat{A}$ نمایش گلفاند جبر باناخ A است ، نظریه عمومی در مورد ضربگرها روی جبرهای باناخ بدون ترتیب متوالیاً توسط وانگ [۲] وبریتال [۳] در سالهای ۱۹۶۱ و۱۹۶۲ توسعه پیدا کرد وکارهای اخیر که توسط اولگر [۴] در سال ۲۰۰۶ ارائه شده در مورد ضربگرهای با برد بسته می باشد .

مفهوم‌ضربگر در آنالیز هارمونیک در ارتباط با نظریه جمع پذیری برای سریهای فوریه عنوان شده است ، سپس این مفهوم در بسیاری از شاخه های دیگر آنالیز هارمونیک نظیر مطالعه خواص تبدیلات فوریه وتوسیعات آنها،جستجوی هومومورفیسمهای جبرهای گروهی ، مشخص کردن جبرهای گروهی ، مطالعه مسائل تجزیه در جبرهای توپولوژیکال مختلف ، مطالعه الحاق سریهای فوریه کاربرد داشته است .ضربگرها همچنین در نظریه عمومی جبرهای باناخ ، نظریه نمایش جبرهای باناخ وجبرهای موضعاً فشرده نقش مهمی دارند .

در این پایان نامه ابتداتعدادی تعاریف وقضایای مقدماتی جهت مطالعه مقالات در این زمینه بیان شده است ودرفصل دوم به بررسی خواص جبر ضربگرها روی جبرهای باناخ بدون ترتیب می پردازیم، در فصل سوم به بررسی اینکه چگونه یک ضربگر با برد بسته به حاصل ضرب ضربگر معکوس پذیر وضربگر خودتوان تجزیه می شود .در مورد تاریخچه مساله عنوان شده در فصل سوم باید گفت در نشست ریاضیدانان اسکاندیناویایی در نهمین کنگره در هلسینکی

---

[۱] Helgason

[۲] Wang

[۳] Brital

[۴] Ulger

در سال ۱۹۳۸ برلینگ [5] اینگونه مسئله را توضیح داد : فرض کنید G گروه آبلی موضعاً فشرده و$M(G)$ جبر اندازه های رادون باشد ،اندازه های $\mu \in M(G)$ را مشخص کنید که ایده ال $\mu * L^1(G)$ در جبر گروه $L^1(G)$ بسته باشد . نتیجه اولیه در ارتباط با این مسئله در مقاله [۶] می باشد که دیودونه[6] نشان می دهد اگر G گسسته نباشد آنگاه هیچ تابع a در $L^1(G)$ وجود ندارد که $a * L^1(G) = L^1(G)$. ما اطلاعی نداریم که مقاله ای قبل از سال ۱۹۷۰ در مورد مسئله برلینگ مطلبی عنوان کرده باشد، با توجه به مقاله [۸] در آغاز دهه هفتاد این مسئله بوسیله هویت [7] پیشنهاد شد،در این مقاله اگر چه گلیکس برگ [8] این مسئله را حل نکرد اما یک تحلیل خوب از آن ارائه داد.او بویژه اثبات کرد وقتی ایده ال $\mu * L^1(G)$ در $L^1(G)$ بسته است آنگاه$\mu * \mu * L^1(G)$ در آن چگال است .این قسمت اساسی از راه حل مسئله برلینگ است .دومین کار مهم درباره این مسئله در مقاله [۲۴] است که زایم [9] نشان داد که برای اندازه $\mu \in M(G)$ ایده ال $\mu * L^1(G)$ در $L^1(G)$ بسته است ویکه تقریبی کراندار دارد اگر وفقط اگر μ حاصل ضرب اندازه معکوس پذیر واندازه خودتوان باشد .

Beurling[5]
Dieudonne[6]
Hewitt[7]
Glicksberg[8]
Zaime[9]

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به معرفی مفاهیم ابتدایی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم.

◄ تعریف ۱.۰.۱ فضای برداری A روی میدان $\mathbb{F}$ را همراه با نگاشت:

$$A \times A \longrightarrow A$$
$$(x,y) \longrightarrow x.y$$

یک جبر گوئیم، هرگاه برای هر $x,y,z \in A$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:

$(i) \quad x.(y.z) = (x.y).z$

$(ii) \quad x.(y+z) = x.y + x.z$

$(iii) \quad (x+y).z = x.z + y.z$

$(iv) \quad \alpha(x.y) = (\alpha x).y = x.(\alpha y)$

$x.y$ را ضرب اعضاء y,x نامیم.

◄ تعریف ۲.۰.۱ جبر A روی میدان $\mathbb{F}$ را جبر نرمدار گوئیم، هرگاه A یک فضای برداری نرمدار باشد، بطوریکه برای هر $x,y \in A$ داشته باشیم:

$$||x.y|| \leq ||x||\ ||y||$$

◄ **تعریف ۳.۰.۱** هرگاه جبر نرمدار $(A,||.||)$ کامل باشد، آن را جبر باناخ[۱] می‌نامیم.

◄ **تعریف ۴.۰.۱** جبر نرمدار $(A,||.||)$ را یکدار می‌نامیم، هر گاه دارای یک عنصر یکه e باشد، بطوریکه $||e|| = 1$.

◄ **تعریف ۵.۰.۱** اگر A یک جبر باناخ باشد، نگاشت $T : A \longrightarrow A$ یک ضربگر[۲] نامیده می‌شود، هرگاه برای هر x و y متعلق به A $\quad x(Ty) = (Tx)y$

.

◄ **تعریف ٦.۰.۱** رادیکال جبر باناخ A، اشتراک تمام ایده الهای ماکسیمال A است و ایده‌الی بسته از A است و آن را با نماد $rad(A)$ نمایش می‌دهیم.

◄ **تعریف ۷.۰.۱** اگر رادیکال جبر باناخ A، تک عنصری $\{0\}$ باشد، آنگاه A را یک جبر نیمه ساده[۳] می‌نامیم.

◄ **تذکر ۱.۰.۱** اگر رادیکال جبر باناخ A، با خود A مساوی باشد، جبر باناخ A را جبر باناخ رادیکال نامیم در غیر اینصورت آن را جبر باناخ غیر رادیکال می‌نامیم.

◄ **تعریف ۸.۰.۱** جبر باناخ A، بدون ترتیب [۴] نامیده می‌شود هر گاه:

---

[۱] Banach
[۲] multiplier
[۳] semisimple
[۴] without order

برای هر x متعلق به A از اینکه $xA = Ax = \{0\}$ نتیجه بگیریم که $x = 0$.

◄ مثال ۱.۰.۱ به آسانی دیده می‌شود که هر جبر یکدار و هر جبر نیمه ساده، جبرهای بدون ترتیب اند.

◄ قرارداد ۱.۰.۱ جبر باناخ همه عملگرهای خطی پیوسته از A به A را به $B(A)$ نمایش می‌دهیم و مجموعه همه ضربگرها از A به A را با $M(A)$ نمایش می‌دهیم.

◄ تذکر ۲.۰.۱ در تعریف ضربگر خطی بودن یا پیوستگی فرض نشده است، ولی با توجه به خاصیت بدون ترتیب بودن جبر و نیز خاصیت ضربگر، خطی بودن و پیوستگی نتیجه می‌شود.

◄ تعریف ۹.۰.۱ نگاشت T متعلق به $B(A)$ ضربگر چپ است هرگاه$T(xy) = (Tx)y$ وضربگر راست است هرگاه$T(xy) = x(Ty)$.

◄ قرارداد ۲.۰.۱ مجموعه همه ضربگرهای چپ با $L(A)$ و مجموعه همه ضربگرهای راست با $R(A)$ نشان داده می شود .

◄ تعریف ۱۰.۰.۱ اگر A یک جبر نرمدار باشد، یک تور $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از عناصر در A، یکه تقریبی کراندار[۵] راست نامیده می‌شود، اگر وجود داشته باشد عدد مثبت k به قسمی که برای هر $\alpha \in I$ ، $||e_\alpha|| \leq k$ و برای هر $x \in A$ $\lim_\alpha xe_\alpha = x$

و به طور مشابه یکه تقریبی کراندار چپ تعریف می‌شود.

[۵] bounded approximate identity

◄ تعریف ۱.۰.۱۱ اگر A یک جبر باناخ و ϕ یک تابعک خطی مخالف صفر روی A باشد آنگاه ϕ را یک همسانی[۶] می‌نامیم،هر گاه به ازای هر y و x متعلق به A داشته باشیم:

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

◄ قرارداد ۱.۰.۳ اگر A یک جبر باناخ باشد، مجموعه همه همسانی‌های روی A را با $\Delta(A)$ نمایش می‌دهیم و آن را فضای ایده ال ماکسیمال A می نامیم .

فرض زیر که در صورت برقراری در بعضی جبرهای باناخ باعث نتایج خوبی می‌شود، فرض H می‌نامیم.
فرض H: هر ایده‌ال بسته محض از A، مشمول یک ایده‌ال بسته محض از A با یکه تقریبی کراندار است.

◄ تعریف ۱.۰.۱۲ فرض کنیم X و Y دو مجموعه و f تابعی با دامنه $D \subset X$ و برد در Y باشد، آنگاه نمودار f را که با $G(f)$ نمایش می‌دهیم زیرمجموعه ای از $X \times Y$ است که به صورت $G(f) = \{(x, f(x) \ : \ x \in D\}$ تعریف می‌شود، فرض می‌کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک و روی $X \times Y$ توپولوژی حاصلضرب را در نظر می‌گیریم، f تابعی از $D \subset X$ به Y باشد، آنگاه f را بسته نامیم در صورتیکه $G(f)$ نسبت به توپولوژی حاصلضرب بسته باشد.

◄ قضیه ۱.۰.۱ [۱۸] اگر X و Y دو فضای متری و f تابعی از $D \subseteq X$ به Y باشد، آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه f بسته باشد آنست که وضعیت:

$$x_n \in D \quad x_n \longrightarrow x \ \ , \ \ f(x_n) \longrightarrow y$$

ایجاب کند: $x \in D \ \ , \ \ f(x) = y$

[۶] homomorphism

◄ قضیه ۱.۰.۲ (نمودار بسته) [۱۸] اگر X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی و بسته باشند آنگاه T پیوسته است.

◄ قضیه ۱.۰.۳ [۱۸] اگر A یک جبر باناخ و $\Delta(A)$ مجموعه همه همسانی‌های روی A باشد آنگاه:

الف) هر ایده‌ال ماکسیمال A، هسته یک $h \in \Delta(A)$ است.

ب) اگر $h \in \Delta(A)$، آنگاه هسته h یک ایده‌ال ماکسیمال A است.

◄ تعریف ۱.۰.۱۳ اگر A یک جبر باناخ باشد آنگاه تابع $\widehat{x} : \Delta(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ که $\widehat{x}(h) = h(x)$ را تبدیل گلفاند[۷] x می‌نامیم و اگر قرار دهیم $\widehat{A} = \{\widehat{x} \ : \ x \in A\}$ آنگاه توپولوژی تولید شده بوسیله $\widehat{A}$ روی $\Delta(A)$، یعنی ضعیف ترین توپولوژی که هر $\widehat{x}$ نسبت به آن پیوسته است را توپولوژی گلفاند روی $\Delta(A)$ نامیم.

◄ تذکر ۱.۰.۳ واضح است که $\widehat{A} \subset C(\Delta(A))$ و چون تناظری یک به یک بین ایده‌الهای ماکسیمال A و عناصر Δ وجود دارد، $\Delta(A)$ همراه با توپولوژی گلفاند را فضای ایده‌ال ماکسیمال A نامند، همچنین نگاشت $x \longrightarrow \widehat{x}$ از A بروی $\widehat{A}$ را گاهی اوقات تبدیل گلفاند نامند.

◄ قرارداد ۱.۰.۴ مجموعه تمام توابع پیوسته کراندار تعریف شده روی فضای ایده‌الهای ماکسیمال A را با $\mu(A)$ نشان می‌دهیم.

---

[۷] Gelfand transform

◄ قضیه ۴.۰.۱ [۱۳] اگر A یک جبر باناخ جابجایی بدون ترتیب و $T \in M(A)$، آنگاه یک تابع پیوسته کراندار منحصر به فرد روی $\Delta(A)$ مثل φ موجود است بطوریکه:
برای هر x متعلق به A

$$\widehat{(Tx)} = \varphi\widehat{x}$$

◄ تذکر ۴.۰.۱ با توجه به [قضیه ۴.۰.۱] یک نگاشت خطی پیوسته از $M(A)$ به $\mu(A)$ وجود دارد.

◄ تذکر ۵.۰.۱ اگر جبر A ، نیمه ساده باشد به قسمی که برای هر m متعلق به فضای $\Delta(A)$، $\widehat{x}(m) = 0$ آنگاه نتیجه می‌گیریم $x = 0$.

◄ تعریف ۱۴.۰.۱ [۱] جبر A منظم است ، هر گاه هر دو زیرمجموعه بسته و فشرده مجزای $\Delta(A)$ بوسیله اعضایی از A جدا شوند.

◄ تعریف ۱۵.۰.۱ [۱] جبر A را تاوبری نامیم، هر گاه مجموعه I که شامل همه عناصری از A است که محمل فشرده دارند، در A چگال باشد(واضح است که I ایده الی از A است):

$$I = \{a \in A \quad : supp(\widehat{a}) \text{ فشرده } \}$$

◄ تعریف ۱۶.۰.۱ اگر A یک جبر باناخ باشد و $x \in A$، عملگرهای ضربی راست و چپ R_x و L_x را روی A به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر $y \in A \quad R_x y = yx \quad , \quad L_x y = xy$

◄ تذکر ۱.۰.۶ واضح است که $R_x \in B(A)$ و L_x و اگر A جابجایی باشد، آنگاه متعلق به $M(A)$ نیز می‌باشند.

◄ تذکر ۱.۰.۷ اگر جبر باناخ A، همانی داشته باشد آنگاه هر ضربگر یک عملگر ضربی چپ و راست می‌باشد.

$$x \in A\ ,\ T \in M(A) \quad L_{Te}x = (Te)x = T(ex) = T(x) = T(xe) = xTe = R_{Te}x$$

بنابراین اگر A جابجایی نیز باشد آنگاه $M(A) = \{L_x \mid x \in A\}$

◄ قضیه ۱.۰.۵ [۱۳] اگر A یک جبر باناخ جابجایی بدون ترتیب باشد ، آنگاه نگاشت $x \longrightarrow L_x = R_x$ یک ایزومورفیسم پیوسته از A به توی ایده‌ال $\{L_x|x \in A\} = \{R_x|x \in A\}$ در $M(A)$ است.

◄ تذکر ۱.۰.۸ هنگامی که جبر A جابجایی و بدون ترتیب است ،A به عنوان زیر جبر نرمدار از $M(A)$ فرض می‌شود.

◄ تعریف ۱.۰.۱۷ اگر A یک جبر باناخ جابجایی باشد و $J \subset A$ مجموعه $hull(J)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$hull(J) = \{f \in \Delta(A) \quad : \quad J \subseteq \ker f\}$$

◄ قضیه ۱.۰.۶ (تجزیه کوهن[۸])[۴] فرض کنید A یک جبر باناخ باشد که دارای یکه تقریبی کراندار است ، در اینصورت برای هر z متعلق به A و $\delta \geq 0$ عناصر x, y متعلق به A وجود دارند بطوریکه $z = x.y$ و $||x - y|| \leq \delta$.

[۸] Cohen

◄ تعریف ۱.۰.۱۸ فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد، مجموعه تمام تابعک‌های خطی پیوسته روی X را فضای دوگان[۹] X می‌نامیم و با نماد X^* نشان می‌دهیم.

◄ قرارداد ۱.۰.۵ اگر X و Y دو فضای نرمدار باشند،مجموعه همه تبدیلات خطی کراندار از X به Y را به $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم.

◄ تذکر ۱.۰.۹ واضح است که $X^* = B(X,\mathbb{F})$

◄ تعریف ۱.۰.۱۹ فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی باشد، تابع $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک تابعک زیر خطی می‌نامیم هر گاه:

الف) $\forall x, y \in X \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

ب) $\forall x \in X \ , \ \alpha \geq 0 \quad p(\alpha x) = \alpha p(x)$

◄ **قضیه ۱.۰.۷ (هان — باناخ[۱۰]) [۱۸] اگر X یک فضای برداری حقیقی و P یک تابعک زیرخطی روی X و M یک زیرفضای خطی X باشد، آنگاه هر تابعک خطی $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ بطوریکه به ازای هر $x \in M$، $f(x) \leq p(x)$، دارای یک توسیع $\wedge : X \longrightarrow \mathbb{R}$ است به قسمی که برای هر x متعلق به X :**

$$-p(-x) \leq \wedge(x) \leq p(x)$$

---

[۹] Dual space

[۱۰] Hahn - Banach

کاربرد قضیه هان باناخ ۱.۰.۱ [۱۸] اگر M زیرفضای خطی X باشد و $x_\circ \notin \overline{M}$ آنگاه وجود دارد $\wedge \in X^*$ به قسمی که به ازای هر $x \in \overline{M}$، $\wedge x = \circ$ و $\wedge x_\circ \neq \circ$

◄ تعریف ۲۰.۰.۱ اگر X یک فضای توپولوژیک موضعاً محدب [11] و E زیرفضای خطی X باشد آنگاه:

$$E^{\perp} = \{x^* \in X^* \quad : \; < a, x^* >= \circ \quad \forall \; a \in E\}$$

و اگر F زیر فضای خطی X^* باشد:

$$^{\perp}F = \{x \in X \quad : \; < x, b^* >= \circ \quad \forall \; b^* \in F\}$$

◄ تعریف ۲۱.۰.۱ اگر X و Y دو فضای نرمدار باشند، برای هر $T \in B(X,Y)$، وجود دارد نگاشت منحصر به فرد $T^* \in B(Y^*, X^*)$ بطوریکه:

$$\forall x \in X \quad , \quad \forall y \in Y^* \quad < Tx, y >=< x, T^*y >$$

و $||T|| = ||T^*||$ و T^* الحاق T نامیده می‌شود.

◄ قضیه ۸.۰.۱ اگر X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in B(X,Y)$ آنگاه:

الف) $\ker T^* = (ranT)^{\perp}$

ب) $\ker T =^{\perp} (ranT^*)$

◄ تعریف ۲۲.۰.۱ جبر باناخ جابجایی A با فضای ایده‌ال ماکسیمال $\Delta(A)$، کراندار منظم[12] است ، اگر یک ثابت $c > \circ$ وجود داشته باشد بگونه‌ای که برای هر $f \in \Delta(A)$ و برای هر همسایگی V از f یک $a \in A$ وجود داشته باشد بگونه‌ای که $||a|| \leq c$ و $\widehat{a}(f) = ۱$ و $supp(\widehat{a}) \subseteq V$.

[11] Locally convex

[12] Boundedly regular

◄ تذکر ۱.۰.۱۰ در تعریف فوق ثابت c تنها به جبر A وابسته است و به تابع f یا مجموعه باز V بستگی ندارد.

◄ تعریف ۱.۰.۲۳ یک جبر نرمدار A، یک یکه تقریبی کراندار نقطه به نقطه[۱۳] دارد اگر:

$$\forall x \in A \ \ \exists K(x) \ \ s.t \ \ \forall \epsilon > 0 \ \ \exists u_{\epsilon,x} \in A \ \ s.t \ \ ||u.x|| \leq K(x) \ , \ ||x - u.x|| < \epsilon$$

◄ قضیه ۱.۰.۹ [۲۳] اگر A جبر باناخ جابجایی باشد آنگاه A یک تقریبی کراندار نقطه به نقطه دارد اگر و فقط اگر یکه تقریبی کراندار داشته باشد.

◄ تعریف ۱.۰.۲۴ فرض کنید X یک فضای برداری باشد، یک عضو خود توان[۱۴] روی X، یک عملگر خطی کراندار روی X است بطوریکه: $E^2 = E$

◄ قضیه ۱.۰.۱۰ (نگاشت باز[۱۵]) [۱۸] اگر X و Y دو فضای باناخ و $f : X \longrightarrow Y$ یک تبدیل خطی پوشا و پیوسته باشد، آنگاه f نگاشت باز است.

◄ نتیجه ۱.۰.۱ اگر $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی پیوسته و پوشا و X و Y فضاهائی باناخ باشند، آنگاه وجود دارد عدد K مثبت به قسمی که: $||x|| \leq K||y||$ برای هر $y \in Y$ و xای متعلق به X بطوریکه $Tx = y$.

◄ قضیه ۱.۰.۱۱ (نگاشت وارون) [۱۸] اگر X و Y فضاهایی باناخ باشند و $f : X \longrightarrow Y$ یک تبدیل خطی کراندار که دو سویی است ، آنگاه f^{-1} کراندار است.

[۱۳] Pointwise - Bounded approximate units

[۱۴] Idempotent

[۱۵] Open mapping theorem