دانشگاه مازندران
دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری (جهت اخذ درجه دکتری)
ریاضی محض (آنالیز ریاضی - نظریه عملگرها)

عنوان

تعیین ساختار نگاشت های حافظ ویژگی های خاص روی جبر عملگرها

استاد راهنما
دکتر علی تقوی جلودار

اساتید مشاور
پروفسور قاسم علیزاده افروزی
دکتر بامداد یاحقی

نگارش
روجا حسین زاده

آذر ۱۳۹۰

اینجانب روجا حسین زاده متعهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب تحت نظارت و راهنمایی اساتید دانشگاه مازندران بوده و به دستاوردهای دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است مطابق مقررات و روال متعارف ارجاع و در فهرست منابع و مآخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نگردیده است.

در صورت اثبات تخلف در هر زمان، مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از درجه اعتبار ساقط بوده و دانشگاه حق پیگیری قانونی خواهد داشت.

کلیه نتایج و حقوق حاصل از این پایان نامه متعلق به دانشگاه مازندران می باشد. هرگونه استفاده از نتایج علمی و عملی، واگذاری اطلاعات به دیگران یا چاپ و تکثیر، نسخه برداری، ترجمه و اقتباس از این پایان نامه بدون موافقت کتبی دانشگاه مازندران ممنوع است. نقل مطالب با ذکر مآخذ بلامانع است.

امضاء

تقدیم به

مادر، همسر

و

روح پاک پدرم

تقدیر و سپاسگزاری:

از جناب آقای دکتر علی تقوی که ارزشمندترین آموزگار من در طول این سال ها بوده اند به خاطر تمام درس ها، صبوری ها و حسن اخلاقشان سپاسگزارم و بهترین آرزوها را برایشان دارم.

از اساتید مشاور، جناب آقای پروفسور قاسم علیزاده افروزی و جناب آقای دکتر بامداد یاحقی و همچنین گروه ریاضی دانشگاه مازندران به خاطر همراهی شان کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از پدرم به خاطر تمام چیزهایی که به یادگار به من داد تا بتوانم قوی و استوار در راه هدفم پیش روم با تمام وجود تشکر می کنم و امیدوارم روحش قرین آرامش باشد.

از مادرم به خاطر تمام زحماتش تشکر می کنم و امیدوارم تا پایان عمر زیر سایه اش زندگی کنم.

از همسرم به خاطر تمام صبوری ها و حمایت هایش در طول این سال ها تشکر می کنم و امیدوارم بتوانم ذره ای از محبت هایش را جبران کنم.

چکیده

در این رساله، فرم نگاشت های حافظ خودتوانی و طیف ضرب عملگرها و همچنین ضرب ناصفر ریشه های یک چندجمله ای و سرانجام فرم نگاشت های به طور کامل حافظ برگشت را مشخص می کنیم. فرض کنید $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ جبر تمام عملگرهای خطی کران دار روی فضای هیلبرت نامتناهی البعد $\mathcal{H}$ است. در واقع، فرم معین نگاشت هایی با ویژگی های زیر را می دهیم.

۱. نگاشت های خطی پوشا روی جبرهای استاندارد که خودتوانی را از دو طرف حفظ می کنند، روی عملگرهای رتبه متناهی،

۲. نگاشت های خطی پوشا روی جبرهای استاندارد که خودتوانی ناصفر ضرب جردن را از دو طرف حفظ می کنند، روی عملگرهای رتبه متناهی،

۳. نگاشت های خطی پوشا روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ که خودتوانی ناصفر ضرب جردن را حفظ می کنند،

۴. نگاشت های خطی روی جبر ماتریس ها که خودتوانی ناصفر ضرب جردن را حفظ می کنند،

۵. نگاشت های دوسویی روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ که خودتوانی ناصفر ضرب جردن و صفر بودن ضرب جردن را از دو طرف حفظ می کنند، روی عملگرهای خودتوان،

۶. نگاشت های پوشا روی جبرهای استاندارد که خودتوانی جمع و تفاضل عملگرها را از دو طرف حفظ می کنند، روی عملگرهای خودتوان،

۷. نگاشت های پوشا روی مجموعه عملگرهای خودالحاق $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ که طیف ضرب خاصی از عملگرها را حفظ می کنند،

۸. نگاشت های پوشا روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ که طیف ضرب خاصی از عملگرها را حفظ می کنند،

۹. نگاشت های پوشا روی جبرهای استاندارد که برگشت را به طور کامل از دو طرف حفظ می کنند،

۱۰. نگاشت های خطی پوشا روی جبر ماتریس ها که ضرب عملگرها که در یک چندجمله ای داده شده صدق می کنند را حفظ می کنند،

۱۱. نگاشت های خطی پوشا روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ که ضرب عملگرها که در یک چندجمله ای داده شده صدق می کنند را از دو طرف حفظ می کنند و

۱۲. نگاشت های خطی پوشا روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ که r-توانی ناصفر ضرب عملگرها را حفظ می کنند.

کلمات کلیدی. حافظ خطی، حافظ غیرخطی، حافظ به طور کامل، جبرعملگرها، جبر استاندارد عملگرها، ضرب جردن، خودتوان، صفر بودن ضرب جردن، طیف، عملگر خودالحاق، برگشت، چندجمله ای، r-توان.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

مسأله حفظ[1] یک ویژگی خاص، در اغلب قسمت های ریاضی دیده می شود، زیرا این یک سؤال طبیعی است که چه نگاشت هایی روی یک ساختار داده شده، چیزی را حفظ می کنند. البته به نظر می رسد که تنها زمینه ای از ریاضیات که به طور اصولی، این دسته از مسائل را مورد مطالعه قرار می دهد، نظریه عملگرها[2] است.

در واقع، این موضوع یکی از مهم ترین زمینه های تحقیقاتی در نظریه عملگرها به شمار می رود. در این راستا، می توانید مقاله مروری[3] [۳۴] را ببینید. این مسائل در نظریه عملگرها، به معنی مشخص نمودن فرم نگاشت هایی روی فضاهای خطی است به طوری که توابع، زیرمجموعه ها، روابط و یا ... را حفظ می کنند. این موضوع در دهه های اخیر مورد علاقه ریاضی دانان بسیاری بوده است.

در این رساله، نتایج اخیر خود را در این زمینه به تفصیل بیان می کنیم. در فصل اول، تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی را بیان می کنیم. فصل دوم، شامل چهار بخش می باشد. در بخش اول، نگاشت های خطی حافظ خودتوانی عملگرها، در بخش دوم، نگاشت های خطی حافظ خودتوانی ضرب جردن[4] عملگرها، در بخش سوم، نگاشت هایی که توأماً حافظ خودتوانی ضرب

[1] Preserver problem
[2] Operator theory
[3] Survey paper
[4] Jordan

جردن و صفر بودن ضرب جردن عملگرها هستند و سرانجام در بخش چهارم، نگاشت هایی که خودتوانی جمع و تفاضل عملگرها را حفظ می کنند را مورد بررسی قرار می دهیم. در فصل دوم، فضاهایی که نگاشت ها روی آن ها بررسی می شوند، جبرهای استاندارد، جبرهای ماتریس ها و جبر شامل تمام عملگرهای خطی روی یک فضای هیلبرت هستند.

فصل سوم، شامل دو بخش است. در بخش اول، فرم نگاشت های حافظ طیف ضرب های خاصی از عملگرها روی مجموعه تمام عملگرهای خودالحاق روی یک فضای هیلبرت را به دست می آوریم و در بخش دوم، فرم این نگاشت ها را روی کل فضا به دست می آوریم.

فصل چهارم، شامل دو بخش می باشد. در بخش اول، فرم نگاشت هایی که به طور کامل برگشت را حفظ می کنند، تعیین می کنیم و در بخش دوم، فرم نگاشت هایی که حافظ ضرب ریشه های یک چندجمله ای هستند را به دست می آوریم.

حال به طور مختصر، به تاریخچه موضوعات مطرح شده می پردازیم. فرض کنید $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ و $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ به ترتیب جبرهای شامل تمام عملگرهای خطی کران دار روی فضای باناخ[5] $\mathcal{X}$ و فضای هیلبرت[6] $\mathcal{H}$ باشند. همچنین $\mathcal{M}_n$ را نماد جبر تمام ماتریس های $n \times n$ در نظر بگیرید.

در [۴۸]، نویسندگان، نگاشت های خطی دوسویی روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$، به طوری که خودتوانی را حفظ می کنند، بررسی کردند. در رابطه با این موضوع، می توان به مقاله های [۵، ۳۲، ۴۷، ۴۹، ۵۱] نیز اشاره نمود. نویسندگان، در این مقاله ها به بررسی نگاشت های حافظ خودتوانی به همراه شرط های دیگر پرداختند.

در مسائل مربوط به حفظ یک ویژگی خاص، بعضی از ریاضی دانان نگاشت هایی را بررسی می کنند که یک ویژگی خاص از ضرب، جمع و یا تفاضل عملگرها را حفظ می کنند. در این راستا، می توانید مقاله های [۷، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۲۱، ۲۲، ۲۵، ۲۷، ۳۳، ۳۷، ۵۲، ۵۳، ۵۶، ۵۷، ۵۹، ۶۰] را ببینید. به عنوان مثال، در [۵۹]، نویسندگان، فرم نگاشت های

[5] Banach
[6] Hilbert

خطی پوشایی را تعیین کرده اند که خودتوانی ضرب و همچنین خودتوانی ضرب جردن سه تایی عملگرها را روی $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ حفظ می کنند و در [۶۰]، نویسندگان، فرم نگاشت های جمعی پوشا، روی جبرهای مختلف از جمله $\mathcal{B}(\mathcal{X})$، $\mathcal{B}(\mathcal{H})$، جبر فون نویمان[۷] و غیره، به طوری که صفر بودن ضرب جردن را حفظ می کنند، تعیین کرده اند.

نتایج اصلی در [۴۱] که بعداً توسط شمرل[۸] در [۴۵] کامل تر شد، در مورد فرم نگاشت های دوسویی روی مجموعه ماتریس های خودتوان با مرتبه حداقل ۳ است که خودتوانی تفاضل را از دو طرف حفظ می کنند.

دولینار[۹]، در [۱۴]، فرم نگاشت های پوشا روی $\mathcal{M}_n$، با این ویژگی که به ازای هر $A, B \in \mathcal{M}_n$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ در شرط $A - \lambda B$ خودتوان است اگر و تنها اگر $\phi(A) - \lambda\phi(B)$ چنین باشد، را به دست آورد. او، در [۱۳]، این نتیجه را به $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ توسیع داد.

مسأله نگاشت های خطی حافظ طیف روی جبر عملگرها توجه ریاضی دانان زیادی را به خود جلب کرده است. اولین کار در این زمینه به فروبنیوس[۱۰]برمی گردد. [۱۷] او در سال ۱۸۹۷ ، نگاشت های خطی روی جبر ماتریس ها که دترمینان را حفظ می کنند را مورد مطالعه قرار داد. بعد از او مقاله های زیادی در این زمینه نوشته شد. به عنوان مثال می توانید مقاله های [۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۲۳ ، ۲۴ ، ۲۸ ، ۲۹ ، ۳۷ ، ۳۸ ، ۵۰ ، ۵۷] را ببینید. البته حدس زیر، در این زمینه هنوز حل نشده باقی مانده است:

هر نگاشت خطی حافظ طیف از یک جبر باناخ یک دار به روی یک جبر باناخ نیم ساده یک دار که وارون پذیری را حفظ می کند، یک همریختی جردن است.

برخی از ریاضی دانان، مسأله نگاشت های حافظ طیف را بدون شرط خطی بودن البته به همراه شرط های دیگر مورد مطالعه قرار دادند. می توانید مقاله های [۳، ۲۳ ، ۳۷ ، ۵۷] را ببینید.

[۷] Von Neumann
[۸] Semrl
[۹] Dolinar
[۱۰] Frobenius

به عنوان مثال، مولنار[۱۱]، نگاشت های پوشایی را مورد بررسی قرار داد که طیف حاصل ضرب عملگرها را حفظ می کنند و یا نویسندگان در [۲۲]، همین مسأله را وقتی طیف حاصل ضرب سه تایی جردن عملگرها حفظ می شود را مورد بررسی قرار دادند.

فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو فضای برداری باشند. $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}_n$ نماد یک فضای برداری است که عناصرش ماتریس های $n \times n$ی هستند که درایه های آن ها متعلق به $\mathcal{M}$ هستند.

اگر $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ یگ نگاشت و n یک عدد طبیعی باشد، نگاشت $\phi_n : \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}_n \to \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}_n$ به صورت

$$\phi_n((a_{ij})_{n\times n}) = (\phi(a_{ij}))_{n\times n}$$

تعریف می شود. گوییم ϕ حافظ n-ویژگی است، هر گاه ϕ_n حافظ آن ویژگی باشد. گوییم ϕ به طور کامل حافظ[۱۲]آن ویژگی است، هر گاه ϕ_n، به ازای هر n طبیعی حافظ آن ویژگی باشد. بعضی از ریاضی دانان مسأله به طور کامل حافظ یک ویژگی خاص را مورد مطالعه قرار می دهند. به عنوان مثال، می توانید مقاله های [۱۰، ۱۱، ۱۵، ۱۹، ۲۰، ۲۴، ۲۵، ۵۴] را ببینید. در [۲۴]، نویسندگان، نگاشت های به طور کامل حافظ خودتوانی و به طور کامل حافظ مربع صفر را روی جبرهای استاندارد مورد بررسی قرار دادند.

نگاشت های خطی روی جبر ماتریس ها که ریشه های یک چندجمله ای را حفظ می کنند توسط هووارد[۱۳] در [۲۷] مورد مطالعه قرار گرفت. علاوه بر این، نگاشت های خطی روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ که ریشه های یک چندجمله ای را از دو طرف حفظ می کنند توسط شمرل در [۴۶] مورد مطالعه قرار گرفت.

در بخش زیر، به بیان تعاریف، مفاهیم و قضایایی می پردازیم که در بخش های بعد از آن ها استفاده می کنیم.

[۱۱] Molnar
[۱۲] Completely preserving
[۱۳] Howard

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. [۸] *جبر $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$، یک فضای برداری به همراه یک عمل ضرب روی میدان $\mathbb{F}$ است، به طوری که به ازای هر $x, y, z \in \mathcal{A}$ و $a \in \mathbb{F}$ در شرایط زیر صدق کند*

۱. $x(yz) = (xy)z$

۲. $(x+y)z = xz + yz$

۳. $a(xy) = (ax)y = x(ay)$.

یک جبر را یک دار گوییم، هرگاه دارای یکه (ضربی) باشد و آن را با نماد ۱ نمایش می دهیم. اگر یکه وجود داشته باشد، منحصربه فرد است. علاوه براین، یک جبر را جابه جایی نامیم، هرگاه ضرب در آن خاصیت جابه جایی داشته باشد.

تعریف ۲.۱.۱. [۶۱] *جبر باناخ $\mathcal{A}$ یک جبر یک دار به همراه یک نرم کامل $\|.\|$ است، به طوری که به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$ در شرایط زیر صدق کند*

۱. $\|1\| = 1$

۲. $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

مثال زیر چند جبر باناخ را معرفی می کند.

مثال ۳.۱.۱. [۶۱]

۱. *اگر $\mathcal{K}$ یک فضای هاسدورف[۱۴] و فشرده باشد، آنگاه $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ (مجموعه تمام توابع پیوسته از $\mathcal{K}$ به $\mathbb{C}$) با نرم سوپریمم و اعمال نقطه وار، یک جبر باناخ است که تابع ثابت با مقدار ۱ یکه ضربی آن است.*

[۱۴] Hausdorff

۲. اگر $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ باشد، آنگاه $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ (مجموعه شامل تمام عملگرهای خطی کران دار از $\mathcal{X}$ به $\mathcal{X}$) با نرم عملگری، جمع نقطه وار و ضرب ترکیبی، یک جبر باناخ است که عملگر همانی I یکه ضربی آن است.

۳. با توجه به مثال ۲ ، به وضوح، اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ یک جبر باناخ است.

توجه کنید که هرگاه $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$، آنگاه $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ با $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ یکریخت است.

تعریف ۴.۱.۱. [۶۱] تابعک خطی ϕ بر جبر باناخ $\mathcal{A}$ ضربی است، هرگاه غیر بدیهی باشد و به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

تعریف ۵.۱.۱. [۶۱] برای جبر باناخ $\mathcal{A}$، فرض کنید $\mathcal{M}_A$ مجموعه تمام تابعک های خطی ضربی روی $\mathcal{A}$ باشد. $\mathcal{M}_A$ را فضای ایده آل ماکسیمال $\mathcal{A}$ می نامیم.

تعریف ۶.۱.۱. [۶۱] فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ است و $x \in \mathcal{A}$. طیف $\mathcal{A}$ که آن را با نماد $\sigma(\mathcal{A})$ نمایش می دهیم، مجموعه تمام اعداد مختلطی مانند λ است به طوری که $\lambda 1 - x$ در $\mathcal{A}$ وارون پذیر نباشد.

مثال ۷.۱.۱. [۶۱]

۱. فرض کنید $\mathcal{K}$ یک فضای هاسدورف و فشرده باشد. دراین صورت، به ازای هر $f \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$،

$$\sigma(f) = f(K).$$

۲. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ باشد. دراین صورت، به ازای هر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$،

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \ker(\lambda I - T) \neq 0 \text{ or } \mathrm{R}(T - \lambda I) \neq X\}.$$

۳. *فرض کنید* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *دراین صورت،* $\sigma(A)$ *از تمام مقادیر ویژه* A *تشکیل شده است.*

تعریف ۸.۱.۱. [۶۱] *C^*-جبر $\mathcal{A}$، یک جبر باناخ است به همراه نگاشت* $x \to x^*$ *روی* $\mathcal{A}$*، به طوری که، به ازای هر* $x, y \in \mathcal{A}$ *و* $a, b \in \mathbb{C}$ *در شرایط زیر صدق می کند*

۱. $(x^*)^* = x$

۲. $(ax + by)^* = \bar{a}x^* + \bar{b}y^*$

۳. $(xy)^* = y^*x^*$

۴. $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

هر نگاشت که در شرایط ۱، ۲ و ۳ صدق نماید، یک برگشت روی جبر $\mathcal{A}$ نامیده می شود. عنصر x^* را نیز معمولاً الحاق x نامند.

برگشت در یک C^*-جبر یک متری است، یعنی $\|x\| = \|x^*\|$.

مثال ۹.۱.۱. [۶۱]

۱. $\mathbb{C}$ *با* $z^* = \bar{z}$*، ساده ترین* C^**-جبر است.*

۲. $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ *با* $f^* = \bar{f}$*، یک* C^**-جبر جابه جایی است.*

۳. *فرض کنید* $\mathcal{A}$ *یک* C^**-جبر و* $\mathcal{B}$ *یک زیر جبر بسته* $\mathcal{A}$ *باشد که تحت برگشت بسته است. دراین صورت،* $\mathcal{B}$ *خود یک* C^**-جبر با نرم، برگشت و ساختار جبری ای است که از* $\mathcal{A}$ *به ارث می برد.* $\mathcal{B}$ *را یک* C^**-زیر جبر* $\mathcal{A}$ *نامیم.*

تعریف ۱۰.۱.۱. [۶۱] *فرض کنید* $\mathcal{A}$ *یک* C^**-جبر باشد و* $x \in \mathcal{A}$.

۱. x *را خودالحاق نامیم، هرگاه* $x = x^*$.

۲. x را یکانی نامیم، هرگاه $x^*x = xx^* = 1$، یا به طور معادل $x^* = x^{-1}$.

۳. x را نرمال نامیم، هرگاه $x^*x = xx^*$.

۴. x را مثبت نامیم، هرگاه عنصری مانند y در $\mathcal{A}$ موجود باشد، به طوری که $x = y^*y$.

۵. x را تصویر نامیم، هرگاه $x^* = x = x^2$.

تعریف ۱.۱.۱۱. [۶۱] *فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$، C^*-جبر باشند. نگاشت $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ را یک C^*-همریختی نامیم، هرگاه، به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$ و $a, b \in \mathbb{C}$ داشته باشیم*

۱. $\phi(ax + by) = a\phi(x) + b\phi(y)$

۲. $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$

۳. $\phi(x^*) = \phi(x)^*$

۴. یکه $\mathcal{A}$ را به یکه $\mathcal{B}$ ببرد.

اگر ϕ یک به یک باشد، ϕ را یک C^*-یکریختی می نامیم. دو C^*-جبر را C^*-یکریخت می نامیم، هرگاه یک C^*-یکریختی از یکی به روی دیگری موجود باشد.

تعریف ۱.۱.۱۲. [۶۱] *فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد. تبدیل گلفاند[15]، نگاشت*

$$\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$$

است که به ازای هر $x \in \mathcal{A}$ و $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\Gamma(x)(\phi) = \phi(x).$$

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر باشد و $x \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}[x]$، C^*-زیر جبر تولید شده توسط x است.

[15] Gelfand

تعریف ۱۳.۱.۱. [۶۱] *فرض کنید x در C^*-جبر $\mathcal{A}$ نرمال باشد. فضای ایده آل ماکسیمال $\mathcal{A}[x]$ همسانریخت با $\sigma(x)$ است.*

فرض کنید x در C^*-جبر $\mathcal{A}$ نرمال باشد. همواره فضای ایده آل ماکسیمال $\mathcal{A}[x]$ را با $\sigma(x)$ یکی می گیریم. نسبت به چنین یکی سازی تبدیل گلفاند

$$\Gamma : \mathcal{A}[x] \to \mathcal{C}(\sigma(x))$$

یک C^*-یکریختی پوشاست. با توجه به این مطلب، می توانیم $f(x)$ را برای هر تابع f در $\mathcal{C}(\sigma(x))$ تعریف کنیم.

تعریف ۱۴.۱.۱. [۶۱] *فرض کنید x در C^*-جبر $\mathcal{A}$ نرمال باشد. به ازای هر $f \in C(\sigma(x))$ تعریف می کنیم*

$$f(x) = \Gamma^{-1}(f).$$

نگاشت $f \mapsto f(x)$ از $\mathcal{C}(\sigma(x))$ به روی $\mathcal{A}[x]$ را حسابان تابعی پیوسته برای x می نامیم.

لم ۱۵.۱.۱. [۶۱] *فرض کنید $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. T در $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ خودالحاق است اگر وتنها اگر، به ازای هر $x \in \mathcal{H}$، $< Tx, x >$ حقیقی باشد.*

لم ۱۶.۱.۱. [۶۱] *فرض کنید $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. دراین صورت،*

$$\ker T = (\mathrm{R}(T^*))^{\perp}$$

و

$$\overline{\mathrm{R}(T)} = (\ker T^*)^{\perp}.$$

$\mathcal{X}'$ را نماد فضای دوگان فضای نرم دار $\mathcal{X}$ در نظر بگیرید.

قضیه ۱۷.۱.۱. [۴۳] *فرض کنید $\mathcal{M}$ یک زیر فضا از فضای نرم دار $\mathcal{X}$ باشد و $x \in \mathcal{X}$. اگر $x_۰$ در بستار $\mathcal{M}$ نباشد، آنگاه $\Lambda \in \mathcal{X}'$ وجود دارد به طوری که*

$$\Lambda x_۰ = ۱$$

و به ازای هر $x \in \mathcal{M}$،

$$\Lambda x = ۰.$$

قضیه ۱.۱.۱۸. [۴۳] *فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای نرم دار باشند. به هر عملگر خطی کران دار $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$، یک عملگر خطی کران دار یکتای $T^* : \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}'$ می توان متناظر کرد، به طوری که، به ازای هر $\Lambda \in \mathcal{Y}'$ و $x \in \mathcal{X}$ در شرایط زیر صدق کند*

$$(T^*\Lambda)(x) = \Lambda(Tx).$$

علاوه بر این، T^* در شرط

$$\|T^*\| = \|T\|$$

نیز صدق می کند.

تعریف ۱.۱.۱۹. [۸] *فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ باشد. $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ رتبه متناهی نامیده می شود، هرگاه بعد برد آن متناهی باشد.*

فرض کنید $x \in \mathcal{X}$ و $f \in \mathcal{X}'$. نماد $x \otimes f$ را برای عملگر رتبه یک که به صورت زیر تعریف می شود، به کار می بریم

$$(x \otimes f)y = f(y)x. \quad (y \in \mathcal{X})$$

لم ۱.۱.۲۰. *فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای باناخ باشند و $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ یک عملگر با رتبه k است. اگر $u_۱, ..., u_k$ یک پایه برای برد T باشد، آنگاه T دارای نمایش منحصر به فرد $T = \sum_{i=۱}^{k} x_i \otimes f_i$ است که $f_۱, ..., f_k$ تابعک های خطی کران دار مستقل خطی هستند.*

فصل ۲
نگاشت های حافظ خودتوانی عملگرها

این فصل شامل چهار بخش است. در بخش اول، نگاشت های خطی حافظ خودتوانی عملگرها، در بخش دوم، نگاشت های خطی حافظ خودتوانی ضرب جردن عملگرها، در بخش سوم، نگاشت هایی که توأماً حافظ خودتوانی ضرب جردن و صفر بودن ضرب جردن عملگرها هستند و سرانجام در بخش چهارم، نگاشت هایی که خودتوانی جمع و تفاضل عملگرها را حفظ می کنند را مورد بررسی قرار می دهیم.