وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

قضایای حفظ برای منطق محمولات شهودی

توسط:
پریسا دلیری حسنجانی

استاد راهنما:
دکتر مصطفی زارع خورمیزی

استاد مشاور:
دکتر بهزاد صالحیان

بهمن ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

قضایای حفظ برای منطق محمولات شهودی

توسط:

پریسا دلیری حسنجانی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **بسیار خوب**

دکتر مصطفی زارع خورمیزی استادیار ریاضی محض گرایش منطق ریاضی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر بهزاد صالحیان استادیار ریاضی محض گرایش گراف و ترکیبیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر مجتبی آقایی استادیار ریاضی گرایش منطق ریاضی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان (داور اول)

دکتر سجاد رحمانی استادیار ریاضی محض گرایش جبر محاسباتی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر محمد رمضان‌پور استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به

منجی عالم بشریت حضرت مهدی (عج)

و پدر و مادر بزرگوارم

و همسر مهربانم

سپاسگزاری

خدایا...
به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ بر بی ثمری لحظه ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگیش سوگوار نباشم.
بگذار تا آن را خود انتخاب کنم، اما آن چنان که تو دوست می داری.
اکنون که به لطف پروردگار بزرگ موفق به اتمام این مقطع از تحصیل گشته‌ام لازم می دانم از کسانی که در این مسیر مرا راهنمایی نموده اند، تشکر نمایم.
خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم. چرا که این دو وجود، پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند.
از همسرم که سایه مهربانیش سایه سار زندگیم می باشد، او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود تشکر می کنم.
از زحمات خانواده عزیزم و پدر و مادر همسرم به پاس محبت فراوانشان تشکر می کنم.
بر خود واجب می دانم مراتب سپاس و قدردانی خود را به خدمت استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر مصطفی زارع که در طول دوران تحصیل و ارائه ی پایان نامه از چشمه جوشان دانش و اخلاق والاشان بهره مند گشته‌ام ابراز نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان این مجموعه به انجام نمی رسید. از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر بهزاد صالحیان که مشاوره ی این پایان نامه را تقبل فرمودند، تشکر می کنم. از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر مجتبی آقایی و جناب آقای دکتر سجاد رحمانی که در مقام داور زحمت مطالعه ی پایان نامه را بر عهده داشتند قدردانی می نمایم.

پریسا دلیری حسجانی

بهمن ۹۰

چکیده

قضایای حفظ برای منطق محمولات شهودی

به وسیله‌ی:
پریسا دلیری حسنجانی

در این پایان‌نامه، نظریه‌ی مدل‌های کریپکی منطق محمولات شهودی را مطالعه می‌کنیم. مفاهیم همریختی، زیرمدل و ساندویچ از مدل‌های کریپکی تعریف می‌شود. هم‌چنین دو عملگر $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$ و $\mathcal{E}(\cdot)$ به ترتیب متناظر با بستار عمومی و بستار وجودی تعریف می‌شود. سپس یک نظیر شهودی از تعمیم (دوگان) قضیه‌ی لیندن-لاش-تارسکی ثابت می‌شود که جملاتی که تحت تصویر معکوس همریختی‌های مدل‌های کریپکی حفظ می‌شوند را مشخص می‌کند. هم‌چنین تعمیمی از قضیه‌ی لاش-تارسکی ثابت می‌شود که جملاتی که تحت زیرمدل‌های کریپکی حفظ می‌شوند را مشخص می‌کند. در ادامه، تعمیمی از قضیه‌ی ساندویچ کیسلر ثابت می‌شود که جملاتی که تحت ساندویچ‌های مدل‌های کریپکی حفظ می‌شوند را مشخص می‌کند. هر یک از این قضایا در حضور اصل طرد شق ثالث نظیر کلاسیک‌شان را نتیجه می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: مدل کریپکی، منطق محمولات شهودی، قضایای حفظ، زیرمدل، همریختی، ساندویچ.

فهرست مطالب

پیشگفتار

لفظ منطق از ریشه‌ی یونانی لوگیخه یا لوگیگه که به زبان انگلیسی آن را Logic می‌نگارند، آمده است. و ریشه‌ی عربی آن از نطق است، که در زبان فارسی آن را سخن می‌توان ترجمه کرد. موضوع علم منطق لوگوس که به فارسی همان سخن یا گفتار می‌توان ترجمه کرد می‌باشد. تدوین منطق از این جهت بود که بتوانیم برای سخن و استدلال خودمان معیار سنجشی قرار دهیم. این واکنشی بود به زمانه‌ای که عده‌ای به نام دانشمند به آموزش فن سخنوری و نطق می‌پرداختند و اصولی را آموزش می‌دادند که با توسل به آن بتوان حقیقت را خطا نشان داد و بالعکس. از جهتی منطق را باید از نگاه علمی معرفتی[۱] نگاه کرد که اسباب تدوین سخن است یعنی چارچوبی برای اندیشه انسان.

در این پایان‌نامه نظریه‌ی مدل‌های کریپکی منطق محمولات شهودی را مطالعه می‌کنیم. معناشناسی کریپکی برای منطق موجهات و منطق شهودی توسط ساؤل کریپکی[۲] ابداع و در مقاله‌ی بسیار مهم او با عنوان «ملاحظات معناشناختی در باب منطق موجهات» [۳] در سال۱۹۶۳ ارائه شد. وی قضایای صحت و تمامیت را برای آن‌ها ثابت کرد. منشأ ایده‌ی معناشناسی کریپکی برای منطق موجهات ملهم از حرف لایب‌نیتز[۴] است که می‌گوید: جمله‌ای ضروری است که در تمام جهان‌های ممکن یا در تمام اوضاع و احوال صادق باشد و جمله‌ای صدقش ممکن است که حداقل در یک اوضاع و احوال بتوانیم بگوییم صادق است. کریپکی در این مقاله توضیح چندانی درباره‌ی این‌که جهان‌های ممکن واقعاً چه هستند، نداده و صرفاً از مفهوم جهان ممکن به عنوان ابزاری نموداری[۵]برای توضیح معناشناسی موجهات بهره برده است. دیدگاه کریپکی را درباره چیستی جهان‌های ممکن، می‌توان در کتاب «تسمیه و ضرورت»[۶] یافت. متن اصلی‌این کتاب، حاصل سه سخنرانی کریپکی است که برای نخستین

[۱] Epistemic

[۲] Saul Kripke

[۳] Semantical Considerations on Modal Logic

[۴] Leibniz

[۵] Schematic

[۶] Naming and Necessity

بار در سال ۱۹۷۲ منتشر گردید و سپس با افزودن مقدمه و برخی پانوشت‌ها در قالب یک کتاب مستقل چاپ شد. کریپکی در بخش‌هایی از متن کتاب، توضیحات پراکنده‌ای را درباره آن‌چه که از «جهان ممکن» در نظر دارد، آورده است، اما در مقدمه کتاب شاهد توضیح منسجم‌تری هستیم. ظاهراً مقصود کریپکی آن است که هر چند هر جهان ممکن از موقعیت‌های ممکن بسیار زیادی تشکیل می‌شود ولی نمی‌توان طرفداران جهان‌های ممکن را ملزم نمود که هر جهان ممکن را به‌صورت کامل تصور کنند، بلکه آن‌چه ضرورت دارد توجه به آن دسته از تفاوت‌های جهان ممکن مزبور با جهان بالفعل (یا «جهان‌کنونی» یا «جهان فعلی») است که به یک بحث خاص مربوط می‌شود. برای توضیح مقصود کریپکی به مثال زیر توجه می‌کنیم:

در جهان کنونی، قلّه اورست بلندترین قلّه زمین است. حال فرض کنیم شخصی که از جهان‌های ممکن برای توضیح گزاره‌های موجه استفاده می‌کند، برای بیان این مطلب که امکان داشت قلّه دماوند بلندترین قله زمین باشد، می‌گوید: جهان ممکنی را فرض کنید که در آن قلّه دماوند بلندترین قله زمین (و دارای ارتفاعی بیشتر یا برابر با ارتفاعی که اورست در جهان کنونی دارد) باشد. بی‌تردید جهان ممکن مورد بحث از جهات عدیده‌ای با جهان کنونی تفاوت دارد. مثلاً در این جهان، آب و هوای شهر تهران با آب و هوای فعلی آن متفاوت خواهد بود. هم‌چنین وضعیت اقتصادی روستاهای اطراف دماوند (احتمالاً به دلیل حضور جهان‌گردان و گروه‌های کوهنوردی خارجی) با وضعیت کنونی آن مغایرت خواهد داشت. رشته کوه‌های اطراف دماوند، راه‌های ارتباطی و هزاران وضعیت دیگر نیز وجود دارند که از طریق آن‌چه کریپکی آن را تصویرسازی [1] نامید، می‌توان آن‌ها را تصور کرد و هیچ یک از آن‌ها میان جهان ممکن مزبور و جهان کنونی مشترک نیستند. (و شاید این مجموعه یعنی مجموعه اوضاعی که در این دو جهان متفاوت‌اند هیچ گاه در تصورات ما به پایان نرسد).

حال، سخن کریپکی این است که اساساً نیازی نیست که ما توصیف کاملی از جهانی که در آن دماوند بلندترین قلّه زمین است، به دست دهیم. آن‌چه لازم است (و کافی نیز هست) این است که تفاوت‌هایی را که با مسأله مورد نظر ما مرتبط‌اند، مشخص سازیم.

مقاله‌ی اول کریپکی درباره‌ی منطق موجهات در ۱۹۵۹ منتشر شد (وی به کارهای قبلی هینتیکا[2] در این خصوص اشاره می‌کند). در ۱۹۳۳ گودل[3] یک ترجمه از منطق گزاره‌ای شهودی (IPC) به منطق موجهات S4 ارائه کرد. مک‌کینزی[4] و تارسکی[5] (۱۹۵۴) کار گودل روی این موضوع را با ارائه‌ی ترجمه‌ی جدیدی تکمیل کردند. کریپکی با الهام از این ترجمه، معناشناسی خود برای منطق شهودی را از نظریه‌ی مدل‌های S4 استخراج کرد.

[1] Idealization

[2] Hintikka

[3] Gödel

[4] MaKinsey

[5] Tarski

این ترجمه به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} p^{\Box} &= \Box p, \quad \text{اتم } p \\ \bot^{\Box} &= \bot \\ (\neg\varphi)^{\Box} &= \Box\neg\varphi^{\Box} \\ (\varphi \to \psi)^{\Box} &= \Box(\varphi^{\Box} \to \psi^{\Box}) \\ (\varphi \wedge \psi)^{\Box} &= \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box} \\ (\varphi \vee \psi)^{\Box} &= \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box} \end{aligned}$$

قضیه (مک‌کینزی ـ تارسکی). فرض کنید φ یک فرمول گزاره‌ای باشد. φ در IPC اثبات‌پذیر است اگر و تنها اگر $\varphi^{\Box}$ در S4 اثبات‌پذیر باشد.

یک بخش از نظریه‌ی مدل‌های کلاسیک مشخص سازی نظریه‌ها بر حسب مدل‌ها است. قضیه‌ی لاش-تارسکی بیان می‌کند که یک نظریه توسط جملات عمومی اصل‌پذیر است اگر و تنها اگر تحت زیرمدل حفظ شود. قضیه‌ی لیندن-لاش-تارسکی بیان می‌کند که یک نظریه توسط جملات وجودی-مثبت اصل‌پذیر است اگر و تنها اگر تحت همریختی مدل‌ها حفظ شود. قضیه چنگ-لاش-ساسکو بیان می‌کند که یک نظریه توسط جملات عمومی-وجودی اصل‌پذیر است اگر و تنها اگر تحت اجتماع زنجیرهای مدل‌ها حفظ شود. قضیه‌ی ساندویچ کیسلر بیان می‌کند که یک نظریه توسط جملات عمومی-وجودی اصل‌پذیر است اگر و تنها اگر تحت ساندویچ از مدل‌ها حفظ شود. ([۵] را ببینید). یک سؤال طبیعی این است که نظیر این قضایا در منطق محمولات شهودی چیست؟ در زمینه‌ی مدل‌های کریپکی تعاریف متفاوتی از مفهوم زیرمدل می‌توان داشت: می‌توان قاب یا ساختارهای کلاسیک الحاق شده به رئوس و یا هر دو را تحدید کرد.

در [۱۶]، ویسر[۱] با انتخاب تعریف اول ثابت می‌کند که یک نظریه‌ی شهودی تحت زیرمدل حفظ می‌شود اگر و تنها اگر توسط جملات نیم مثبت اصل‌پذیر باشد. یک فرمول نیم مثبت فرمولی است که هر زیرفرمول شرطی آن دارای مقدم اتمی باشد.

در [۱۳]، منیری و زارع با انتخاب تعریف دوم از زیرمدل کلاس فرمول‌های $\mathcal{U}$ و $\mathcal{E}$ (که ما آن‌ها را با $\mathcal{U}^*$ و $\mathcal{E}^*$ نشان می‌دهیم) به‌ترتیب متناظر با کلاس فرمول‌های عمومی و وجودی را تعریف و ثابت می‌کنند که یک نظریه شهودی تحت تحدید (توسیع) مدل‌های کریپکی حفظ می‌شود اگر و تنها اگر توسط $\mathcal{U}(\mathcal{E})$-جملات اصل‌پذیر باشد.

در [۶]، رویتنبرگ[۲] و همکاران با انتخاب تعریف سوم ثابت می‌کنند که یک نظریه‌ی شهودی تحت زیرمدل حفظ می‌شود اگر و تنها اگر توسط جملات نیم مثبت عمومی (که آن‌ها به طور طبیعی تعریف می‌کنند) اصل‌پذیر باشد. در [۸]، فلیچمن[۳] مفاهیم همریختی و ساندویچ را برای مدل‌های کریپکی تعریف و نظایری از قضایای لیندن-

[۱] Visser

[۲] Ruitenburg

[۳] Fleischmann

لاش-تارسکی و قضیه ساندویچ کیسلر را ثابت می‌کند. که بررسی آن بخش اصلی این پایان‌نامه را تشکیل می‌دهد.

ساختار این پایان‌نامه به‌شرح زیر است:

در فصل اول مقدمات لازم از منطق محمولات شهودی و نظریه‌ی مدل‌های کریپکی بیان شده است.

در فصل دوم قضایای حفظ کلاسیک مربوط به مفاهیم همریختی، زیرمدل، اجتماع زنجیر و ساندویچ مدل‌ها بیان شده است.

در فصل سوم مفاهیم همریختی، زیرمدل و ساندویچ برای مدل‌های کریپکی تعریف و نظایر شهودی قضایای حفظ کلاسیک برای این مفاهیم اثبات شده است.

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل به اختصار مروری بر مفاهیم، تعاریف و قضایای مهم منطق محمولات شهودی خواهیم داشت. دستگاه استنتاج طبیعی برای منطق محمولات شهودی و معناشناسی کریپکی برای این منطق را معرفی می‌کنیم. در ادامه تعاریف مفهوم زیرمدل برای مدل‌های کریپکی و نظایر شهودی قضیه‌ی حفظ لاش-تارسکی را بیان می‌کنیم.

۱-۱ زبان منطق مرتبه‌ی اول

تعریف ۱.۱.۱. یک **زبان مرتبه‌ی اول** $\mathcal{L}$ مجموعه‌ی همه‌ی فرمول‌هایی است که از یک مجموعه از نمادهای محمولی، تابعی، ثابت و متغیرها با استفاده از رابط‌های $\top, \bot, \wedge, \vee, \to$ و سورهای $\forall, \exists$ ساخته می‌شود. نماد تساوی $(=)$ به عنوان یک نماد محمولی دو موضعی، عضو زبان در نظر گرفته می‌شود. $\top$ و $\bot$ هم اتم و هم رابط صفر موضعی در نظر گرفته می‌شوند. هم‌چنین $\neg\varphi$ اختصاری برای $\varphi \to \bot$ و $\varphi \leftrightarrow \psi$ اختصاری برای $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ می‌باشند.

۱-۲ ریاضیات ساختنی

شهودگرایان مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\{۱, ۲, ۳, \ldots\}$ را به عنوان مأخذ بنیادهای ریاضیات تصور می‌کنند و معتقدند که سرچشمه‌ی این اعداد شهود است. بنیانگذار این مکتب براوئر [۱] است. از نظر شهودگرایان ما اعداد طبیعی را به همان طریق احساس می‌کنیم که کانت [۲] احساس می‌کرد. به نظر کانت اعداد وقتی و فقط وقتی وجود دارند که به وسیله شمارش در دسترس باشند. از دید شهودگرایان یک شئ ریاضی وجود دارد هرگاه ریشه در شهود ما داشته باشد. یا به طور دقیق‌تر، هرگاه بتوانیم آن را با یک روش معین و در تعداد متناهی مرحله از

[۱] Brouwer

[۲] Kant

اعداد طبیعی بسازیم. بنابراین آن قسمت‌هایی از ریاضیات کلاسیک که به روش ساختنی به دست نیایند، یعنی در یک فرآیند متناهی خود را به اعداد طبیعی متصل ننمایند، فاقد معنا محسوب می‌شوند. عدد ۲ را در ذهنتان بسازید، آن را در حافظه نگه دارید، عدد ۳را نیز بسازید. آن‌ها را جمع کنید و در حافظه نگه دارید. حال عدد ۵ را بسازید. آن را با نتیجه‌ی جمع قبلی مقایسه کنید. خواهیم دید که آن‌ها یکی‌اند، پس می‌توانیم حکم کنیم که $۲ + ۳ = ۵$. به نظر براوئر، همه‌ی ریاضیات شبیه همین است: «ریاضیات شهودگرایانه یک ساختمان ذهنی است». برای نمونه به دو مثال از نگاه شهودگرایانه به ریاضیات توجه کنید:

مثال اول. بنابر **قضیه‌ی مقدار میانی** «اگر تابع f روی بازه‌ی $[۰, ۱]$ پیوسته باشد، و $f(۰) < ۰$ و $f(۱) > ۰$، آن‌گاه نقطه‌ای مانند x در بازه‌ی $[۰, ۱]$ موجود است به طوری‌که $f(x) = ۰$.»

برهان کلاسیک این قضیه چه چیزی را به نمایش می‌گذارد؟

این برهان نشان می‌دهد که وجود چنین منحنی پیوسته‌ای توأم با فرض این‌که هیچ نقطه‌ای بر محور قرار نمی‌گیرد، به تناقضی منجر خواهد شد. برهان کلاسیک روشی برای ساخت این نقطه ارائه نمی‌کند. براوئر نشان داد که هرگز چنین رویه‌ای را نخواهیم یافت. دو راه برای تبدیل این قضیه به یک قضیه‌ی ساختنی وجود دارد:

۱- فرض کنید $f : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد به طوری‌که $f(۰) < ۰$ و $f(۱) > ۰$، در این‌صورت برای هر $\varepsilon > ۰$، x ای در $[۰, ۱]$ موجود است که $|f(x)| < \varepsilon$.

۲- فرض کنید $f : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ یک تابع چندجمله‌ای باشد، به طوری‌که $f(۰) < ۰$ و $f(۱) > ۰$. در این‌صورت x ای در $[۰, ۱]$ وجود دارد به طوری‌که $f(x) = ۰$.

در برهان کلاسیک با فرض این‌که هیچ نقطه‌ای از منحنی بر محور واقع نشده است، به کمک رشته‌ای معین از استنتاجات، به تناقض می‌رسیم.

بنابراین «**وجود**» در قضیه‌ی کلاسیک صرفاً معنای «**عدم وجود، تناقض است.**» را دارد در حالی‌که اثبات ساختنی در قضیه‌ی اصلاح شده، **ساختن واقعی یک نقطه** را دربردارد.

البته در وضعیت‌های متناهی تفاوتی بین روش‌های استدلال در ریاضیات کلاسیک و ریاضیات ساختنی نیست و به ویژه در این حالت آن‌ها قائل به قانون طرد شق ثالث هستند. مثلاً اگر p گزاره‌ی «بین $۱۰^{۱۰}$ و $۱۰^{۱۰۰}$ یک عدد اول وجود دارد» باشد با یک بررسی(هر چند طولانی) نتیجه می‌شود که یا p یا $\neg p$ درست است. لذا در این‌جا اگر فرض نادرستی p به تناقضی منجر شود، می‌توان نتیجه گرفت که p درست است.

بیشاپ [۱] در جواب این سؤال که از کجا می‌فهمید که یک برهان، ساختنی است یا نه، می‌گوید:

«اگر شما بتوانید یک برنامه‌ی کامپیوتری برای آن بنویسید، آن اثبات، ساختنی خواهد بود؛ گر چه ضرورتی ندارد آن برنامه را اجرا کنید و برای نتایجش انتظار بکشید.»

مثال دوم. مسئله‌ی دیگری را در نظر می‌گیریم، که بنابر آن «اعداد گنگ a, b وجود دارند، به طوری‌که a^b گویاست.» ابتدا به یک اثبات کلاسیک که به یاردن [۲] منسوب است، می‌پردازیم.

اگر $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ گویا باشد، در این‌صورت $a = b = \sqrt{۲}$ و اگر $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ گنگ باشد، در این‌صورت $a =$

---

[۱] Bishop

[۲] Jarden

$b=\sqrt{۲}$,$\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ جواب است. این اثبات بر اساس اصل طرد شق ثالث است و a,b را مشخص نمی‌کند. یک اثبات ساختنی این مسئله که صریحاً a,b را معرفی می‌کند به این‌صورت است که فرض کنیم $a=\sqrt{۲}, b=$ $\log_۲^۹$. در این‌صورت a,b هر دو اعداد گنگ هستند و a^b گویاست.
البته با توجه به قضیه‌ی گلفاند- اشنایدر [1] که بنابر آن «اگر a,b اعداد جبری باشند، با $a,b\neq ۰$ و اگر b یک عدد گنگ باشد، دراین‌صورت a^b یک عدد متعالی است.» اثبات کلاسیک این مسئله به اثبات ساختنی تبدیل می‌شود.

در بیانیه‌ی ساخت‌گرایان، ارائه شده توسط بیشاپ، آمده است: ریاضیات بخشی از فعالیت‌های ذهنی ماست که برتر از زیست شناسی و محیط شناسی است. قوانین زیست شناسی به صورتی که با آن آشنا هستیم ممکن است برای تشکیل زندگی در جهانی دیگر به کار روند، گرچه لزومی ندارد چنین باشد. هم‌چنین با این که قوانین فیزیک عام‌تر هستند، تصور این که در جهانی دیگر قوانین فیزیکی متفاوتی حاکم باشد، آسان است. ریاضیات آفرینشی ذهنی است که کمتر از فیزیک و زیست شناسی اختیاری است، بدین معنا که موجوداتی که ما آن‌ها را ساکن در جهان دیگری با قوانین فیز یکی و زیست شناسی متفاوتی تصور می‌کنیم، ریاضیاتی در دست خواهند داشت که اساساً همان ریاضیات ماست.»

۱-۳ دستگاه استنتاج طبیعی

در این بخش مفهوم استنتاج را با استفاده از دستگاه استنتاج طبیعی[2] تعریف می‌کنیم. N را برای دستگاه استنتاج طبیعی، i را برای منطق محمولات شهودی[3] و c را برای منطق محمولات کلاسیک[4] به‌کار می‌بریم.

تعریف ۱.۳.۱. (تعریف استنتاج، فرضیات باز و فرضیات حذف شده‌ی یک استنتاج) مفهوم استنتاج در دستگاه Ni و Nc به طور استقرایی به صورت زیر تعریف می‌شود:
مرحله‌ی پایه. به ازای هر فرمول φ، درخت تک رأسی φ یک استنتاج از فرض باز φ است؛ در این حالت هیچ فرض حذف شده‌ای وجود ندارد. اگر فرمول φ یک **اصل** باشد، آن‌گاه درخت تک رأسی φ یک استنتاج است؛ در این حالت هیچ فرض باز و حذف شده‌ای وجود ندارد.
مرحله‌ی استقراء. فرض کنید $D_۱$، $D_۲$ و $D_۳$ سه استنتاج باشند. یک استنتاج D می‌تواند توسط یکی از قواعد زیر ساخته شود. کاربرد بعضی از این قواعد محدودیت‌هایی دارد که در پایان بیان شده است. برای $\perp$ **قاعده‌ی تحویل به تناقض شهودی** [5]

[1] Gelfond-Schneider

[2] Natural deduction system

[3] Intuitionistic Predicate Logic

[4] Classical Predicate Logic

[5] Intuitionistic absurdity rule

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \bot \end{array}}{\varphi} \bot_{\mathrm{i}}$$

را داریم. برای رابط‌های دیگر و سورها **قواعد معرفی** [1] و **قواعد حذف** [2] زیر را داریم.

قواعد معرفی

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \varphi & \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

$$\dfrac{\begin{array}{c} [\varphi]^u \\ D_1 \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I, u$$

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \psi} \vee I_r \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \psi \end{array}}{\varphi \vee \psi} \vee I_l$$

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi \end{array}}{\forall y \varphi[x/y]} \forall I$$

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi[x/t] \end{array}}{\exists x\, \varphi} \exists I$$

قواعد حذف

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi \wedge \psi \end{array}}{\varphi} \wedge E_r \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi \wedge \psi \end{array}}{\psi} \wedge E_l$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \varphi \to \psi & \varphi \end{array}}{\psi} \to E$$

$$\dfrac{\begin{array}{ccc} & [\varphi]^u & [\psi]^v \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ \varphi \vee \psi & \sigma & \sigma \end{array}}{\sigma} \vee E, u, v$$

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \forall x \varphi \end{array}}{\varphi[x/t]} \forall E$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc} & [\varphi]^u \\ D_1 & D_2 \\ \exists y \varphi[x/y] & \sigma \end{array}}{\sigma} \exists E, u$$

قواعد تساوی به‌صورت زیر است:

$$\dfrac{x = y \quad y = z}{x = z} RI_3 \qquad \dfrac{x = y}{y = x} RI_2 \qquad \dfrac{}{x = x} RI_1$$

[1] Introduction rules

[2] Elimination rules

$$\frac{x_1 = y_1 \quad x_2 = y_2 \quad \cdots \quad x_n = y_n}{t(x_1, \ldots, x_n) = t(y_1, \ldots, y_n)}\ RI_4$$

$$\frac{x_1 = y_1 \quad x_2 = y_2 \quad \cdots \quad x_n = y_n \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n)}{\varphi(y_1, \ldots, y_n)}\ RI_5$$

ضمناً $(\bot \to \bot) \leftrightarrow \top$ را به عنوان یک اصل می‌پذیریم.

دستگاه Nc با افزودن **قاعده‌ی تحویل به تناقض کلاسیک** [1]

$$\begin{array}{c} [\neg\varphi]^u \\ D_1 \\ \bot \\ \hline \varphi \end{array}\ \bot_{\mathrm{c}}, u$$

به Ni ساخته می‌شود.

در کاربرد $\to I$ همه‌ی فرضیات باز به فرم φ در D_1 که با $[\varphi]$ نشان داده شده است، حذف می‌شوند.

در کاربرد $\vee E$ مجموعه‌های $[\varphi]$ در D_2 و $[\psi]$ در D_3 حذف می‌شوند.

در $\exists E$ مجموعه‌ی $[\varphi]$ در D_2 حذف می‌شود.

فرضیاتی که حذف نمی‌شوند، باز باقی می‌مانند.

در $\forall E$ و $\exists I$ جایگزینی t به‌جای x در φ باید آزاد باشد.

در $\forall I$، D_1 نباید شامل فرض بازی باشد که x در آن آزاد است. هم‌چنین باید $x \equiv y$ یا y در φ آزاد نباشد.

در $\exists E$، D_2 نباید شامل فرض بازی باشد که x در آن آزاد است مگر مجموعه‌ی $[\varphi]$. x نباید در σ آزاد باشد. هم‌چنین باید $x \equiv y$ یا y در φ آزاد نباشد.

در کاربرد RI_5 باید جانشینی $y_1, \ldots, y_n$ به‌جای $x_1, \ldots, x_n$ در φ آزاد باشد. ضمناً لزومی ندارد که y_i جانشین همه‌ی موارد x_i شده باشد.

بنابراین یک استنتاج در دستگاه Ni (Nc)، درختی است که برگ‌های آن فرضیات حذف نشده است. هر رأس با به‌کار بردن یکی از قواعد استنتاجی Ni (Nc) از رأس‌های بالاتر حاصل می‌شود. ریشه‌ی درخت **نتیجه‌ی استنتاج** نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید Γ یک مجموعه از فرمول‌ها و φ یک فرمول باشند. گوییم φ یک نتیجه‌ی منطقی Γ در Ni (Nc) است و می‌نویسیم $\Gamma \vdash_{\mathrm{Ni}} \varphi$ ($\Gamma \vdash_{\mathrm{Nc}} \varphi$)، هرگاه یک استنتاج در Ni (Nc) برای φ موجود باشد که همه‌ی فرضیات حذف نشده‌ی آن عضو Γ باشند. در صورتی‌که $\Gamma = \varnothing$، می‌نویسیم $\vdash_{\mathrm{Ni}} \varphi$ ($\vdash_{\mathrm{Nc}} \varphi$) و در این‌صورت φ را یک **قضیه‌ی** Ni (Nc) می‌نامیم.

تعریف ۳.۳.۱. مجموعه‌ی قضایای Ni و Nc را به‌ترتیب با IQC[2] و IQC[3] نشان می‌دهیم.

[1] Classical absurdity rule

[2] Intuitonistic Predicate Calculus

[3] Classical Predicate Calculus

در این‌جا $\vdash_{\mathrm{Ni}}$ را به اختصار با $\vdash$ نشان می‌دهیم. در زیر برخی از قضایای منطق محمولات شهودی را بیان می‌کنیم.

حقیقت ۴.۳.۱.

۱) $\vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$

۲) $\vdash \varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$

۳) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$

۴) $\vdash (\varphi \vee \psi) \vee \sigma \leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$

۵) $\vdash \varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$

۶) $\vdash \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$

۷) $\vdash (\varphi \vee \psi \to \sigma) \leftrightarrow (\varphi \to \sigma) \wedge (\psi \to \sigma)$

۸) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

۹) $\vdash \neg\neg\neg\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$

۱۰) $\vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$

۱۱) $\vdash \neg\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi)$

۱۲) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \neg\neg\psi)$

۱۳) $\vdash \neg\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \leftrightarrow (\varphi \to \neg\neg\psi)$

۱۴) $\vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$

۱۵) $\vdash (\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi)$

۱۶) $\vdash (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi \to \sigma)$

۱۷) $\vdash (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$

۱۸) $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$

۱۹) $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$

۲۰) $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$

۲۱) $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \to \psi)$

۲۲) $\vdash \neg\varphi \vee \neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$

۲۳) $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$

۲۴) $\vdash (\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \to \psi)$

۲۵) $\vdash \neg\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$

۲۶) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

۲۷) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma))$

۲۸) $\vdash (((\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to \varphi) \to \psi) \to \sigma$

۲۹) $\vdash \bot \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$

۳۰) $\vdash ((\varphi \to \psi) \to \neg\psi) \to \neg\psi$

۳۱) $\vdash ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \neg\neg\varphi$

۳۲) $\vdash \exists x\, \varphi(x) \vee \exists x\, \psi(x) \leftrightarrow \exists x\, (\varphi(x) \vee \psi(x))$

۳۳) $\vdash \forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, \psi(x) \leftrightarrow \forall x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x))$

۳۴) $\vdash \exists x\, \varphi(x) \wedge \exists y \psi(y) \leftrightarrow \exists x\, \exists y (\varphi(x) \wedge \psi(y))$

۳۵) $\vdash \neg\exists x\, \varphi(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg\varphi(x)$

۳۶) $\vdash \exists x\, \neg\varphi(x) \to \neg\forall x\, \varphi(x)$

۳۷) $\vdash \neg\forall x\, \neg\varphi(x) \to \neg\neg\exists x\, \varphi(x)$

۳۸) $\vdash \forall x\, (\varphi \to \psi(x)) \leftrightarrow (\varphi \to \forall x\, \psi(x))$

۳۹) $\vdash \exists x\, (\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to \exists x\, \psi(x))$

۴۰) $\vdash (\varphi \vee \forall x\, \psi(x)) \to \forall x\, (\varphi \vee \psi(x))$

۴۱) $\vdash (\varphi \wedge \exists x\, \psi(x)) \leftrightarrow \exists x\, (\varphi \wedge \psi(x))$

۴۲) $\vdash \forall x\, (\varphi(x) \to \psi) \leftrightarrow (\exists x\, \varphi(x) \to \psi)$

۴۳) $\vdash \exists x\, (\varphi(x) \to \psi) \to (\forall x\, \varphi(x) \to \psi)$

۴۴) $\vdash \neg\neg\forall x\, \varphi(x) \to \forall x\, \neg\neg\varphi(x)$

شرایط مربوط به آزاد نبودن بعضی متغیرها می‌بایست در نظر گرفته شوند.

اثبات (۴۲)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\exists x\, \varphi(x) \to \psi]^{2}$}
\AxiomC{$[\varphi(x)]^{1}$}
\RightLabel{$\exists I$}
\UnaryInfC{$\exists x\, \varphi(x)$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{ψ}
\RightLabel{$\to I_1$}
\UnaryInfC{$\varphi(x) \to \psi$}
\RightLabel{$\forall I$}
\UnaryInfC{$\forall x\, (\varphi(x) \to \psi)$}
\RightLabel{$\to I_2$}
\UnaryInfC{$(\exists x\, \varphi(x) \to \psi) \to \forall x\, (\varphi(x) \to \psi)$}
\AxiomC{$[\exists x\, \varphi(x)]^{3}$}
\AxiomC{$[\varphi(x)]^{2}$}
\AxiomC{$[\forall x\, (\varphi(x) \to \psi)]^{1}$}
\RightLabel{$\forall E$}
\UnaryInfC{$\varphi(x) \to \psi$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{ψ}
\RightLabel{$\exists E_2$}
\BinaryInfC{ψ}
\RightLabel{$\to I_3$}
\UnaryInfC{$\exists x\, \varphi(x) \to \psi$}
\RightLabel{$\to I_1$}
\UnaryInfC{$\forall x\, (\varphi(x) \to \psi) \to (\exists x\, \varphi(x) \to \psi)$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$\forall x\, (\varphi(x) \to \psi) \leftrightarrow (\exists x\, \varphi(x) \to \psi)$}
\end{prooftree}
$$

اثبات(۴۴)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg\neg\forall x\, \varphi(x)]^{3}$}
\AxiomC{$[\neg\varphi(y)]^{2}$}
\AxiomC{$[\forall x\, \varphi(x)]^{1}$}
\RightLabel{$\forall E$}
\UnaryInfC{$\varphi(y)$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\to I_1$}
\UnaryInfC{$\neg\forall x\, \varphi(x)$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\to I_2$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\varphi(y)$}
\RightLabel{$\forall I$}
\UnaryInfC{$\forall x\, \neg\neg\varphi(x)$}
\RightLabel{$\to I_3$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\forall x\, \varphi(x) \to \forall x\, \neg\neg\varphi(x)$}
\end{prooftree}
$$

۱-۴ معناشناسی کریپکی در منطق محمولات شهودی

در این بخش به شرح معناشناسی کریپکی برای منطق محمولات شهودی می‌پردازیم.

تذکر ۱.۴.۱. یک لیست از نمادهای ثابت یا متغیرهای $t_1, t_2, \ldots, t_n$ با $\boldsymbol{t}$ نشان داده می‌شود. اگر C یک مجموعه از ثوابت باشد، آن‌گاه $\mathcal{L}(C)$ توسیع زبان $\mathcal{L}$ با ثوابت در C است. مجموعه‌ی $\mathcal{A}\mathrm{t} \subseteq \mathcal{L}$ مجموعه‌ی فرمول‌های اتمی در $\mathcal{L}$ است. متناظراً مجموعه‌ی $\mathcal{A}\mathrm{t}(C) \subseteq \mathcal{L}(C)$ مجموعه‌ی فرمول‌های اتمی در $\mathcal{L}(C)$ است. $\mathfrak{A}$، $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{C}$ و ... مدل‌های کریپکی و کلاسیک هستند. اگر $\mathfrak{A}$ یک مدل کلاسیک باشد، در این‌صورت دامنه‌ی $\mathfrak{A}$ با حرف لاتین A و $\mathcal{L}(A)$ زبان $\mathcal{L}$ توسعه داده شده با یک نماد ثابت جدید برای هر عضو در A است. نماد $\models$ صدق کلاسیک در یک مدل را نشان می‌دهد و فقط برای جملات تعریف می‌شود.

برای تعریف مدل کریپکی به مفاهیم رسته و همریختی مدل‌های کلاسیک نیاز داریم که در زیر تعریف آن‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲.۴.۱. یک **رسته‌ی**[۱] $\mathcal{C}$ شامل موارد زیر است:

- یک **کلاس** $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$، که عناصر آن *اشیاء*[۲] نامیده می‌شوند.
- یک کلاس $\mathrm{hom}(\mathcal{C})$، که عناصر آن *ریخت‌ها*[۳] نامیده می‌شوند. هر ریخت f یک شیء مبدأ [۴] یکتای a و یک شیء مقصد [۵] یکتای b دارد.
  عبارت $f : a \to b$ به معنای «f یک ریخت از a به b است» می‌باشد.
  عبارت $\mathrm{hom}(a, b)$ کلاس همه‌ی ریخت‌ها از a به b را نشان می‌دهد.
- یک عملگر دوتایی $\circ$، که ترکیب *ریخت‌ها* نامیده می‌شود، به طوری‌که برای هر سه شیء a، b و c داریم

$$\circ : \mathrm{hom}(a, b) \times \mathrm{hom}(b, c) \to \mathrm{hom}(a, c).$$

ترکیب $f : a \to b$ و $g : b \to c$ به صورت $g \circ f$ نشان داده می‌شود. عملگر ترکیب در اصول زیر صادق است:

۱. **شرکت پذیری:** اگر $f : a \to b$، $g : b \to c$ و $h : c \to d$، آن‌گاه

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

[۱] Category

[۲] Object

[۳] Morphism

[۴] Source

[۵] Target