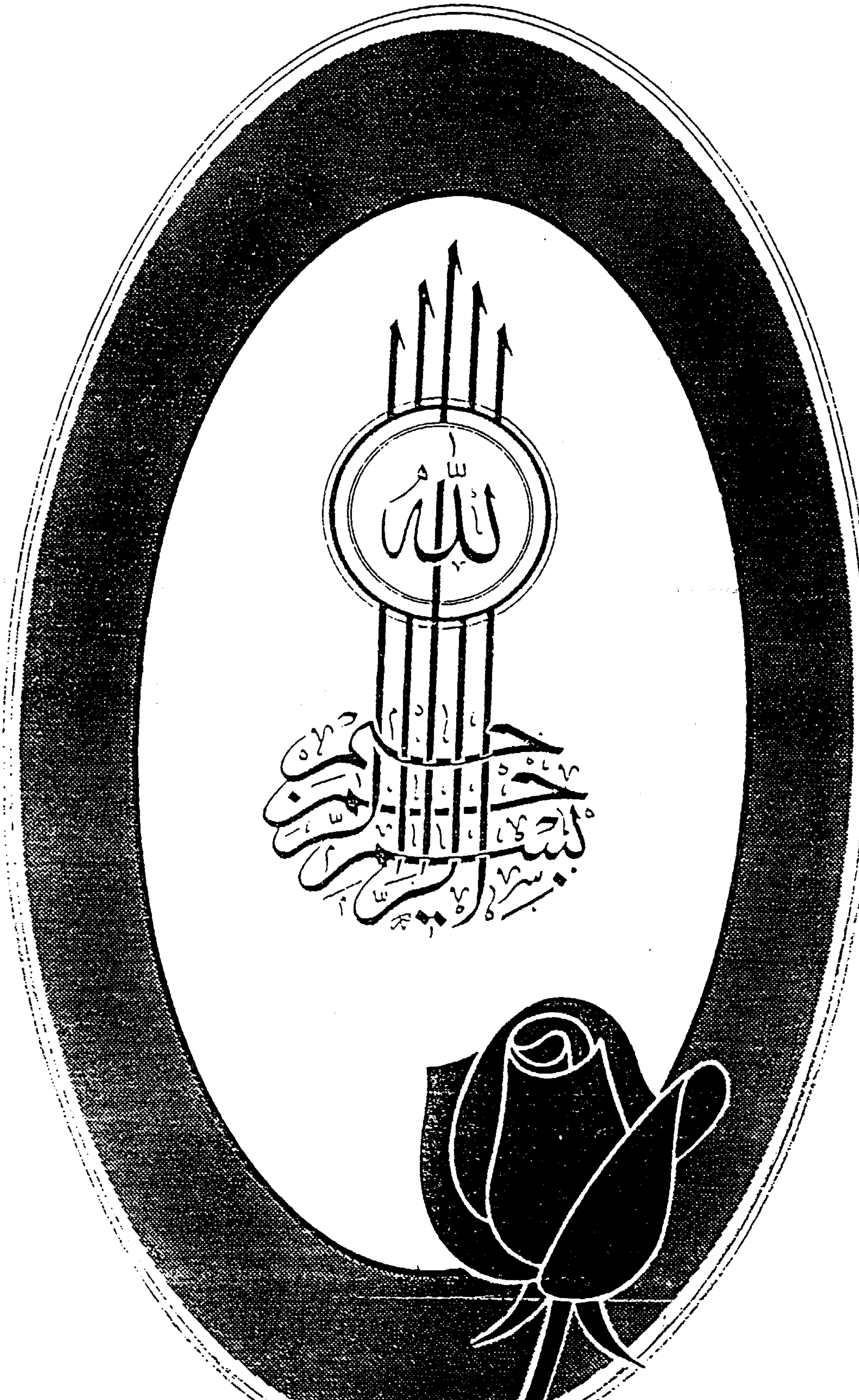
الله
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر ـ بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی‌ارشد ریاضی کاربردی

تحت عنوان:

حل مسائل مقادیر ویژه ماتریسهای نامتقارن با استفاده از روش هموتوپی

استاد راهنما:

دکتر محمود محسنی مقدم

مولف :

رضا خوش‌سیر قاضیانی

شهریور ۱۳۷۷

ب

بسمه تعالی

این پایان‌نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی ـ دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو : رضا خوش‌سیر قاضیانی

استاد راهنما: دکتر محمود محسنی مقدم

داور ۱ : دکتر سیدحسین جوادپور

داور ۲ : دکتر رستم ثابتی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: آقای دکتر ناصح‌زاده

دانشگاه شهید باهنر کرمان
اداره تحصیلات تکمیلی

تقدیم به

مادر عزیزم

و روح پاک پدرم

تشکر و قدردانی

پس از حمد و سپاس به درگاه احدیت که داننده تمام غیبها و عالم بر تمام علوم است، برخود واجب می‌دانم که از همه مربیان و اساتیدی که به نحوی حق تعلیم و تربیت به گردن حقیر دارند تشکر و سپاسگزاری نمایم. بخصوص از استاد ارجمند آقای دکتر محمود محسنی مقدم که هدایت این رساله بر عهده داشته و همیشه از راهنمائیهای عالمانه، تواضع و روحیه دانش‌پژوهی ایشان بهره‌مند بوده‌ام تقدیر و تشکر نمایم.

همچنین از دیگر اساتید بخش ریاضی بخصوص دکتر سیدحسین جوادپور و دکتر رستم ثابتی که داوری این رساله را بر عهده داشته‌اند سپاسگزاری می‌نمایم.

از مرکز بین‌المللی علوم و تکنولوژی پیشرفته و علوم محیطی بخاطر حمایت مالی تشکر می‌کنم.

از دوستان عزیزم بخصوص آقایان مهدی کوگیر چگینی و محمد مهرپویا که در طول دوران تحصیل همراه و یاور من بودند بسیار تشکر می‌کنم و آرزوی موفقیت برای ایشان در همه مراحل زندگی دارم.

از خانواده عزیزم که اسباب تحصیل اینجانب را فراهم آورده‌اند تشکر می‌نمایم و از خداوند متعال برای روح پدرم علو درجات را آرزومندم.

و نیز از خانم باقری که زحمت تایپ این رساله را به عهده گرفتند کمال امتنان را دارم.

رضا خوش‌سیر

شهریور ۱۳۷۷

چکیده

از روش هموتوپی برای حل مسائل زوج ویژه ماتریس‌های نامتقارن می‌توان استفاده نمود. در این روش با استفاده از الگوریتم "تقسیم و پیروزی" تعداد زیادی از مسیرهای ویژه شبیه خط راست می‌شوند که می‌توان تعداد زیادی از زوج‌های ویژه یک ماتریس نامتقارن را با پیمایش این مسیرهای ویژه به راحتی محاسبه نمود. در فصل اول مفاهیم اولیه و پیشنیازها را بیان می‌کنیم. در فصل دوم روش هموتوپی را توضیح داده و الگوریتم هموتوپی برای حل مسائل زوج ویژه ماتریس‌های متقارن بیان می‌شود و در فصل سوم روش هموتوپی را برای حل مسائل زوج ویژه ماتریس‌های نامتقارن توضیح می‌دهیم.

فهرست مطالب

عنوان | **صفحه**

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این بخش تعاریف مقدماتی در مورد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مطرح می‌شود.

۱ـ۱ مفاهیم اولیه

تعریف (۱ـ۱ـ۱): فرض کنیم A ماتریس $n \times n$ باشد اگر بردار ناصفر مانند x وجود داشته باشد که $Ax = \lambda x$. آنگاه λ را مقدار ویژه ماتریس A متناظر با بردار x می‌نامیم. بردار x، بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه ماتریس A نامیده می‌شود. زوج مرتب (λ, x) را یک زوج ویژه ماتریس A گویند. اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد آنگاه ریشه‌های معادله $det(A - \lambda I) = 0$ مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند. معادله $det(A - \lambda I) = 0$ را معادله مشخصه ماتریس A گویند.

تعریف (۱ـ۱ـ۲): مجموعه تمام مقادیر ویژه ماتریس A را طیف A گویند. و مجموعه $L(\lambda) = \{x | (A - \lambda I)x = 0\}$ یک زیرفضای خطی از $\mathbf{C}^n$ با بعد $\rho(\lambda) = n - rank(A - \lambda I)$ می‌باشد. وقتی که $\lambda \in \mathbf{C}$ یک مقدار ویژه باشد آنگاه $\rho(\lambda) > 0$ یعنی اینکه ماتریس $(A - \lambda I)$ منفرد می‌باشد.

تبصره: اگر x و y بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه λ، ماتریس A باشند آنگاه هر ترکیب خطی مانند $\alpha x + \beta y$ مخالف صفر می‌باشد.

تعریف (۱ـ۱ـ۳): عدد $\rho(\lambda) = dimL(\lambda)$ حداکثر تعداد بردارهای مستقل متناظر به یک مقدار ویژه را مشخص می‌کند. که این عدد، بعد هندسی مقدار ویژه λ نامیده می‌شود. و مرتبه تکرار ریشه λ در معادله مشخصه را بعد جبری مقدار ویژه λ گویند و با نماد δ نمایش می‌دهند. مثلاً اگر A ماتریس قطری مرتبه n باشد آنگاه داریم:

$$\delta(A) = n = \rho(\lambda)$$

و همیشه داریم $1 \leq \rho(\lambda) \leq \delta(\lambda) \leq n$.

تبصره: اگر λ یک مقدار ویژه A باشد، آنگاه λ یک مقدار ویژه A^Tو $\overline{\lambda}$ یک مقدار ویژه برای ماتریس A^H می‌باشد.

۱ـ۲ تجزیه QR هاوس هولدر[1]

لم (۱ـ۲ـ۱): فرض کنیم x و y دو بردار باشند بطوریکه $\|x\|_2 = \|y\|_2$ و $< x, y >$ حقیقی باشد. آنگاه یک ماتریس یکانی U به شکل $I - VV^*$ وجود دارد بطوریکه $Ux = y$ است.

هدف تجزیه یک ماتریس $m \times n$ مانند A بصورت حاصلضرب دو ماتریس مانند $A = QR$ می‌باشد که Q یک ماتریس $m \times m$ یکانی و R یک ماتریس $m \times n$ بالا مثلثی است. فرآیند تجزیه بصورت $Q^*A = R$ می‌باشد که Q^* مرحله به مرحله بوسیله ضرب ماتریس‌های یکانی که به ماتریس‌های هاوس هولدر معروفند، ساخته می‌شود. ماتریس‌های هاوس هولدر دارای شکل کلی زیر می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{m-k} - VV^* \end{bmatrix}$$

ابتدا $V \in C^m$ را طوری تعیین می‌کنیم که $I - VV^*$ یکانی شود و در حاصلضرب $(I - VV^*)A$ ستون اول این عبارت به شکل $(\beta, 0, -, 0)^T$ تبدیل شود.

اگر ستون اول ماتریس A را با A_1 نمایش دهیم می‌خواهیم داشته باشیم $(I - VV^*)A_1 = \beta e^{(1)}$. با استفاده از لم (۱ـ۲ـ۱) باید عدد مختلط β طوری انتخاب شود که $|\beta| = \|A_1\|_2$ و نیز $< A_1, \beta e^{(1)} >$ حقیقی باشد. حال قرار می‌دهیم $V = \alpha(A_1 - \beta e^{(1)})$ در آن $\alpha = \sqrt{2}/\|A_1 - \beta e^{(1)}\|_2$ اعداد

مختلط β و $a_{۱۱}$ را به شکل قطبی می‌نویسیم:

$$\beta = \|A_۱\|_۲ e^{i\phi}, \quad a_{۱۱} = |a_{۱۱}| e^{i\theta}$$

در نتیجه:

$$< A_۱, \beta e^{(۱)} >= a_{۱۱}\overline{\beta} = |a_{۱۱}| \, \|A_۱\|_۲ e^{i(\theta-\phi)}$$

عبارت بالا بایستی حقیقی باشد، پس $\theta - \phi$ برابر با π یا ۰ می‌باشد. با انتخاب $\theta - \phi = \pi$ داریم

$$V_۱ = \alpha(a_{۱۱} - \beta) = \alpha(|a_{۱۱}|e^{i\theta} - |\beta| e^{i(\theta-\pi)}) = \alpha(|\alpha_{۱۱}| + |\beta|)e^{i\theta}$$

پس β را بصورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\beta = -\|A_۱\|_۲ e^{i\theta} = -\|A_۱\|_۲ a_{۱۱}/|a_{۱۱}|$$

الگوریتم بدست آوردن U در گام اول بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\beta &\leftarrow -(a_{۱۱}/|a_{۱۱}|)\|A_۱\|_۲ \\
y &\leftarrow A_۱ - \beta e^{(۱)} \\
\alpha &\leftarrow \sqrt{۲}/\|y\|_۲ \\
V &\leftarrow \alpha y \\
U &\leftarrow I - VV^*
\end{aligned}$$

گامهای بعدی در تجزیه QR مانند گام اول می‌باشد. بعد از k مرحله، ماتریس A را از سمت چپ در k

ماتریس یکانی ضرب می‌کنیم که نتیجه ماتریسی است به شکل زیر:

$$U_kU_{k-1}\dots U_1A=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccccc} x & \cdots & x & \vdots & x & \dots & x\\ \circ & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ & & x & \vdots & x & & x\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ & & & \vdots & a^{(k)}_{k+1,k+1} & & a^{(k)}_{k+n}\\ & \mathbf{0} & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ & & & \vdots & a^{(k-1)}_{mk+1} & & a^{(k)}_{mn}\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\} k\\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\} m-k\end{array}$$

یعنی بطور خلاصه داریم:

$$U_kU_{k-1}\dots U_1A=\begin{bmatrix} J & H\\ \mathbf{0} & W\end{bmatrix}$$

که J یک ماتریس بالا مثلثی $k\times k$، $\mathbf{0}$ ماتریس صفر از مرتبه $(m-k)\times k$ می‌باشد، H یک ماتریس با بعد $k\times(n-k)$ و W ماتریسی از بعد $(m-k)\times(m-k)$ می‌باشد. با توجه به مطالب گفته شده در بالا برداری مانند $V\in \mathbb{C}^{m-k}$ وجود دارد بطوریکه $I-VV^*$ یکانی می‌باشد و نیز در $(I-VV^*)W$ ستون اول زیر درایه اول صفر است و نیز داریم

$$\begin{bmatrix} I & \circ\\ \circ & I-VV^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix} J & H\\ \circ & W\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J & H\\ \circ & (I-VV^*)W\end{bmatrix}$$

عامل اول در سمت چپ معادله بالا یکانی می‌باشد و آنرا با U_{k+1} نمایش می‌دهیم. فرآیند بالا را تا زمانی ادامه می‌دهیم که $(n-1)$امین ستون به شکل $(\circ,\dots,\circ)^T$ $(r_1,\dots,r_{n-1},\circ,\dots,\circ)$ تبدیل شود.

نهایتاً داریم $R = Q^*A$ که $Q^* = U_{n-۱}U_{n-۲}\dots U_۱$. در نتیجه U_iها یکانی‌اند، و $Q = U_۱^*U_۲^*\dots U_{n-۱}^*$ چون U_kها به شکل زیر هستند:

$$U_k = \begin{bmatrix} I_{k-۱} & ۰ \\ ۰ & I_{n-k+۱} - VV^* \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم $U_k^* = U_k$ و $Q = U_۱U_۲\dots U_{n-۱}$. و چون Q یکانی است پس داریم:

$$A = QR\cdot$$

که این حاصلضرب تجزیه QR هاوس هولدر نامیده می‌شود.

مثال: استفاده از تجزیه QR هاوس هولدر روی ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۶۳ & ۴۱ & -۸۸ \\ ۴۲ & ۶۰ & ۵۱ \\ ۰ & -۲۸ & ۵۶ \\ ۱۲۶ & ۸۲ & -۷۱ \end{bmatrix}$$

در گام اول، β را محاسبه می‌کنیم

$$\beta = -\|A_۱\|_۲ = -\|(۶۳, ۴۲, ۰, ۱۲۶)^T\|_۲ = -۱۴۷$$

بعد از آن عدد α را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha = \sqrt{۲}/\|A_۱ - \beta e^{(۱)}\|_۲ = \sqrt{۲}/\|(۲۱۰, ۴۲, ۰, ۱۲۶)^T\|_۲ = \frac{۱}{۲۱\sqrt{۷۰}}$$

و بردار V بصورت زیر است.

$$V = \alpha(A_۱ - \beta e^{(۱)}) = (۱۰, ۲, ۰, ۶)^T/\sqrt{۷۰}$$

و اولین عامل یکانی بصورت زیر است

$$\begin{aligned}
U_۱ &= I - VV^* \\
U_۱ &= \frac{۱}{۳۵}\begin{bmatrix} -۱۵ & -۱۰ & ۰ & -۳۰ \\ -۱۰ & ۳۳ & ۰ & -۶ \\ ۰ & ۰ & ۳۵ & ۰ \\ -۳۰ & -۶ & ۰ & ۱۷ \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

حاصلضرب $U_۱A$ بصورت زیر می‌باشد.

$$U_۱A = \frac{۱}{۳۵}\begin{bmatrix} -۵۱۴۵ & -۳۶۷۵ & ۲۹۴۰ \\ ۰ & ۱۰۷۸ & ۲۹۸۹ \\ ۰ & -۹۸۰ & ۱۹۶۰ \\ ۰ & -۱۹۶ & ۱۱۲۷ \end{bmatrix}$$

در گام بعدی محاسبات متناظر بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\beta &= -\|(۳۰/۸, ۲۸, -۵/۶)^T\|_۲ = -۴۲ \\
\alpha &= \sqrt{۲}/\|(۷۲/۸, -۲۸, -۵/۶)^T\|_۲ = ۰/۰۱۸۰۸۵ \\
V &= \alpha(۱/۳۱۶۶, -۰/۵۰۶۳۷, -۰/۱۰۱۲۷)^T
\end{aligned}$$