به نام خدا

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه دکتری

حل معادلات انتگرالی فردهلم با استفاده از روش ابتکاری الکترومغناطیس

تدوین

سید حسن طاهری

استاد راهنما

دکتر جعفر صابری نجفی

استادمشاور

دکتر فائزه توتونیان

شهریور ۱۳۸۸

فهرست

۱ تاریخچه و تعاریف ۱

۲.۱ روش‌های عددی حل معادلات عددی انتگرالی فردهلم ۳

۱.۲.۱ روش هم محلی ۳

۲.۲.۱ روش بابنوف—گالرکین ۴

۳.۲.۱ روش‌های تربیع ۵

۲ معرفی الگوریتم الکترومغناطیس برای حل مسائل بهینه‌سازی سراسری ۱۱

۱.۲ مقدمه ۱۱

۲.۲ انگیزه و محرک به وجود آمدن الگوریتم الکترومغناطیسی (EM) ۱۲

۳.۲ شرح الگوریتم ابتکاری الکترومغناطیسی (EM) ۱۳

۱.۳.۲ شمای کلی برای EM ۱۳

۲.۳.۲ زیرروال فراهم کردن مقادیر اولیه Initialization ۱۴

۳.۳.۲ جستجوی محلی Local search ۱۵

۴.۳.۲ محاسبه بردار نیروی کل ۱۶

۵.۳.۲ حرکت در جهت نیروی کل ۱۸

۶.۳.۲ شرط توقف ۱۹

۴.۲ قضیه همگرایی روش ابتکاری الکترومغناطیس ۲۱

۱.۴.۲ تغییرات بر روی روش اصلی ۲۲

۱.۱.۴.۲ همگرایی زودهنگام ۲۲

۲.۴.۲ نقطه اختلال‌یافته و زیرروال CalcF تغییریافته ۲۳

۳.۴.۲ نتایج همگرایی برای الگوریتم EM تغییریافته ۲۵

۴.۴.۲ نمادها و فرض‌ها ۲۵

۵.۴.۲ همگرایی با احتمال یک ۲۷

۶.۴.۲ اثبات همگرایی ۲۷

۳ حل دستگاه معادلات خطی با الگوریتم ابتکاری الکترومغناطیس ۳۱

۱.۳ مقدمه ۳۱

۲.۳ روش‌های زیرفضای کریلف ۳۲

۳.۳ یک روش ترکیبی از روش $GMRES$ و روش EM ۳۵

۴.۳ مثال‌های عددی ۳۹
۵.۳ نتیجه‌گیری ۴۳
۴ ترکیب روش نیوتن—$GMRES$ و روش ابتکاری الکترومغناطیس
برای حل دستگاه معادلات غیرخطی ۴۵
۱.۴ مقدمه ۴۵
۲.۴ ترسیم زمینه ۴۶
۳.۴ روش ترکیبی الگوریتم‌های نیوتن—$GMRES$ و EM. ۵۰
۴.۴ روش ناحیه—اطمینان ۵۲
۵.۴ نتایج محاسباتی ۶۱
۱.۵.۴ مجموعه‌ای از مسائل ۶۷
۲.۵.۴ بیست مسأله نمونه ۷۱
۵ حل عددی معادلات ا نتگرالی غیرخطی ۷۸
۱.۵ مقدمه ۷۸
۲.۵ روش نیوتن—کانتورویچ برای حل معادلات غیرخطی به فرم آریزن ۸۷
۳.۵ حل معادلات فردهلم غیرخطی با روش تربیع نیوتن—کانتورویچ ۹۱
کتاب نامه ۹۶

پیشگفتار

معادلات انتگرالی ناشی از دنیای تکنولوژی اغلب بسیار پیچیده هستند. حل معادلات انتگرالی نیز مانند بسیاری از معادلات حاصل از مسائل ریاضی همواره به طور تحلیلی، امکان‌پذیر نیست. لذا نیاز به راه‌حل‌های عددی داریم. اما راه‌حل‌های عددی موجود اغلب نیز توانایی به دست آوردن یک جواب تقریبی به اندازه کافی دقیق را ندارند. ما در این رساله سعی نموده‌ایم راه کاری برای حل رده‌هایی از معادلات انتگرالی ارائه دهیم که روش‌های دیگر کمتر قادر به پاسخ‌گویی می‌باشند و یا اگر روش‌هایی هم وجود دارد، حجم محاسبات آن‌ها معمولاً بسیار زیاد است و یا تقریب قابل قبولی از جواب را در زمان معقول ارائه نمی‌دهند. یکی از مشکلات روش‌های عددی برای حل معادلات انتگرالی، حل دستگاه معادلات خطی نزدیک منفرد و یا دستگاه معادلات غیرخطی است.

در این رساله ضمن معرفی روش $GMRES$ و روش ابتکاری الکترومغناطیس، ایده‌هایی را برای حل دستگاه معادلات خطی و غیرخطی حاصل از روشهای عددی بر روی معادلات انتگرالی فردهلم مطرح می‌کنیم.

در فصل اول به تاریخچه‌ای مختصر از ظهور معادلات انتگرال اشاره نموده و سپس برخی از روشهای عددی را که برای حل معادلات انتگرالی فردهلم مورد استفاده قرار می‌گیرند، به اجمال معرفی می‌کنیم.

در فصل دوم روش ابتکاری الکترومغناطیس (EM) را به طور مختصر مرور نموده که از آن در فصل‌های سوم و چهارم برای بدست آوردن الگوریتم‌هایی کارا برای حل دستگاه معادلات خطی و غیرخطی استفاده خواهیم کرد. برای این کار روش EM را با روش $GMRES$ و $Newton-GMRES$ ترکیب نموده تا ابزاری قوی برای حل دستگاه معادلات خطی و غیرخطی فراهم شود.

در فصل سوم روش ترکیبی $GMRES-EM$ را برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد، سازگار، ناسازگار، مربعی و مستطیلی پیشنهاد داده‌ایم.

در فصل چهارم دستگاه معادلات غیرخطی را مورد بحث قرار داده و برای حل این نوع از دستگاه‌ها روش ترکیبی $EM-NG$ را که ترکیب روش الکترومغناطیس با روش $Newton-GMRES$ می‌باشد را آورده‌ایم. در این فصل برای نشان دادن کارایی الگوریتم ترکیبی پیشنهادی مثال‌های با ابعاد بزرگ را نیز ارائه نموده‌ایم.

در فصل پنجم به کارگیری روش ترکیبی پیشنهادی را برای حل معادلات انتگرالی فردهلم غیرخطی معرفی کرده‌ایم. برای این کار مثال‌هایی که با روش‌های دیگر حل شده‌اند را با روش پیشنهادی مقایسه نموده‌ایم.

درتحقیقات آینده سعی در به کارگیری روش پیشنهادی ارائه شده در این رساله برای حل معادلات انتگرالی ولترای غیرخطی و دستگاه معادلات انتگرالی فردهلم و ولترا، معادلات انتگرالی دوگانه خطی و غیرخطی و نیز حل معادلات انتگرالی—دیفرانسیلی غیرخطی و دستگاه‌های شامل این معادلات داریم.

فصل ۱

تاریخچه و تعاریف

۱.۱ تاریخچه

معادلات انتگرالی برای اولین بار توسط آبل[۱] معرفی شدند. هم‌زمان با آبل، لیوویل[۲] معادلات انتگرالی را در سال ۱۸۳۲ معرفی کرد و یک سال بعد رابطه‌ای بین معادلات انتگرالی و معادلات دیفرانسیل را به دست آورد که در آن نشان داد جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل معین، به وسیله یک معادله انتگرالی ارائه می‌شود و باعث به وجود آمدن روش جایگذاری متوالی شد، و به این ترتیب معادلات انتگرالی توجه بسیاری از ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان را به خود جلب کرد. برای مثال ایوان فردهلم[۳] روش حل معادلهٔ انتگرالی نوع دوم را مطالعه کرد. ای. هولمگرن[۴] ریاضی‌دان سوئدی پس از ۱۰ سال تلاش و مطالعه ثابت کرد معادله دیفرانسیل ارتعاشات یک صفحه می‌تواند به یک معادلهٔ انتگرالی فردهلم نوع دوم همگن با هسته متقارن منجر شود. ولترا[۵] از سال ۱۸۸۷ کار بر روی معادلات انتگرالی را آغاز کرد و روش حل معادلات انتگرالی را به وسیله هسته‌های تکراری با توجه به ایدهٔ پیچشی توابع بنا نهاد. وی نظریه معادلات انتگرالی را توسعه داد و معادلات انتگرال—دیفرانسیل را در زمرهٔ معادلات انتگرالی به حساب آورد.

---

[۱] Abel(1802-1829)

[۲] Liouville (1809-1882)

[۳] E.I. Fredholm (1866- 1927)

[۴] E. Holmgren

[۵] V. Volterra (1860-1940)

از دیگر ریاضی‌دانانی که معادلات انتگرالی را به عنوان یکی از مسائل اصلی مورد مطالعه خود قرار دادند، می‌توان به ریز [۶]، توپلیتز[۷]، هلینگر[۸]، کارلمن[۹]، پیکارد[۱۰] و گورسات[۱۱] اشاره کرد [۵۲, ۵۳, ۵۷].

کارهای ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان بالا بیشتر در زمینه مدل‌سازی مسائل و تبدیل آن‌ها به یک معادله انتگرالی و حل آن‌ها به روش‌های تحلیلی است. روش‌های تقریبی نیز برای حل معادلات انتگرالی ارائه شده‌اند که در ادامه به معرفی چند نمونه از این روش‌ها می‌پردازیم.

یک معادله انتگرالی معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $y(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد. برای مثال یک معادله انتگرالی به صورت زیر است.

$$y(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)y(t)dt \qquad (۱.۱)$$

که در آن $k(x,t)$ هسته معادله انتگرالی و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند. باید توجه کرد که $k(x,t)$ و $f(x)$ از قبل معلوم هستند. هدف از حل معادلات انتگرالی تعیین تابع $y(x)$ است که در رابطه بالا صدق نماید. به دلیل آن‌که معادلات انتگرالی در بسیاری از مباحث فیزیک، شیمی، پزشکی، هسته‌ای و مهندسی ظاهر می‌شوند پیدا کردن روش‌هایی که بتوان جواب دقیق‌تری برای معادله به دست آورد، از اهمیت زیادی برخوردار است.

معادلات انتگرالی به دو گروه معادلات انتگرالی ولترا و معادلات انتگرالی فردهلم دسته بندی شده‌اند. معادله انتگرالی خطی فردهلم نوع اول، نوع دوم و نوع سوم به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt, \quad a \le x \le b \qquad (۲.۱)$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt, \quad a \le x \le b \qquad (۳.۱)$$

$$h(x)y(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt, \quad a \le x \le b \qquad (۴.۱)$$

دراین معادلات انتگرالی حد پایین و حد بالای انتگرال‌گیری به ترتیب اعداد ثابت a و b می باشند.به هر معادله انتگرالی که به صورت کلی (۴.۱) نباشد یا نتوان آن‌را به این صورت نوشت، یک معادلهٔ انتگرالی غیرخطی

[۶] F. Riesz (1880-1956)
[۷] Toeplitz (1881-1940)
[۸] E.D. Hellinger(1883-1960)
[۹] T. Carleman(1892-1949)
[۱۰] C.E. Picard(1856-1941)
[۱۱] E. Goursat(1858-1963)

می‌گوئیم. این معادلات بر خلاف معادلات خطی دارای هیچ صورت کلی نیستند، یعنی نمی‌توان هیچ صورت کلی تعریف کرد که تمامی معادلات انتگرالی غیرخطی را در برداشته باشد.

۲.۱ روش‌های عددی برای حل معادلات انتگرالی فردهلم

برای حل معادلات انتگرالی از روش‌های تحلیلی (در صورت امکان) و روش‌های تقریبی (عددی) استفاده می‌شود. در این قسمت برای آشنایی با انواع روش‌های حل معادلات انتگرالی، به اختصار تعدادی از این روش‌ها را بیان می‌کنیم.

یک قاعدهٔ ثابت برای حل معادلات انتگرالی با روش تحلیلی یا دقیق وجود ندارد. برای حل معادلات انتگرالی به طور دقیق، استفاده از روش حل، بیشتر به صورت تجربی است و با تمرین زیاد می‌توان دریافت که یک معادله انتگرالی با کدام روش قابل حل است. لازم به ذکر است که با به کارگیری روش‌های دقیق تنها بخش کوچکی از معادلات انتگرالی را می‌توان حل کرد. از این رو اغلب از روش‌های تقریبی برای حل معادلات انتگرالی استفاده می‌شود. در این بخش به نمونه‌هایی از این روش‌ها اشاره می‌کنیم [۵۴].

۱.۲.۱ روش هم محلی[۱۲]

این روش برای حل معادلات انتگرالی فردهلم خطی نوع اول و دوم به کار می‌رود. روش هم محلی، برای تقریب زدن جواب $y(x)$ بر یک مجموع جزیی به صورت زیر، مبتنی می‌باشد [۴۸].

$$\tilde{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(x) \qquad (۵.۱)$$

که در آن $\phi_j(x)$ها توابعی پایه‌ای معلوم و مستقل خطی در بازهٔ (a,b) هستند و $\tilde{y}(x)$ مقدار تقریبی $y(x)$ می‌باشد. اگر این جواب تقریبی را در معادلات (۲.۱) و (۳.۱) به جای $y(x)$ جایگذاری کنیم، خطای محاسبه، یعنی $\varepsilon(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ بر حسب x و ضرایب c_j برای $j = 1, 2, ..., n$ ظاهر می‌شود. در این صورت به ترتیب برای تعیین جواب تقریبی معادلات فردهلم نوع اول و دوم داریم

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\tilde{y}(t)dt + \varepsilon(x, c_1, c_2, ..., c_n)$$

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\tilde{y}(t)dt + \varepsilon(x, c_1, c_2, ..., c_n)$$

[۱۲] Collocation

حال برای محاسبهٔ ضرایب c_jها و $\tilde{y}(x)$ نیاز به n شرط داریم. در این روش ضرایب c_jها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که خطا در نقاط مفروض x_1، x_2،... و x_n صفر باشد. یعنی برای معادلات نوع اول داریم

$$f(x_i) = \lambda \int_a^b k(x_i,t)\tilde{y}(t)dt, \quad i = 1,2,...,n \qquad (6.1)$$

و برای معادلات نوع دوم، نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$\tilde{y}(x_i) = f(x_i) + \lambda \int_a^b k(x_i,t)\tilde{y}(t)dt, \quad i = 1,2,...,n \qquad (7.1)$$

بنابراین با جایگذاری $\tilde{y}(x)$ از (۵.۱) در (۶.۱) و (۷.۱) به ترتیب دستگاه‌های زیر حاصل می‌شوند.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j[\lambda \int_a^b k(x_i,t)\phi_j(t)dt] = f(x_i), \quad i = 1,2,...,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j[\phi_j(x_i) - \lambda \int_a^b k(x_i,t)\phi_j(t)dt] = f(x_i), \quad i = 1,2,...,n$$

پس از حل این دستگاه‌ها، نسبت به ضرایب c_j به ازای $j = 1,2,...,n$ می‌توان $\tilde{y}(x)$ متناظر با معادلات انتگرالی فردهلم خطی نوع اول و دوم را به دست آورد.

۲.۲.۱ روش بابنوف[۱۳]–گالرکین[۱۴]

این روش نیزشبیه روش هم محلی برای حل معادلات انتگرالی فردهلم خطی بر اساس تقریب زدن جواب معادله با یک مجموع جزیی از n تابع مستقل خطی در بازهٔ (a,b) به صورت (۵.۱) می‌باشد. با این تفاوت که در این روش برای محاسبهٔ ضرایب c_jها، شرط تعامد تابع خطا را بر هر یک از توابع مستقل خطی $\phi_j(x)$ به مسأله می‌افزایند، یعنی

$$\int_a^b \phi_i(x)\varepsilon(x,c_1,c_2,...,c_n)dx = 0, \quad i = 1,2,...,n$$

در این صورت برای معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم خواهیم داشت

$$\int_a^b \phi_i(x)[\sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j(x) - f(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j(t)dt]dx = 0, \qquad i = 1,2,...,n \qquad (8.1)$$

---

[۱۳] Bubnov

[۱۴] Galerkin

یا

$$\sum_{j=1}^{n} c_j [\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx - \int_a^b \int_a^b \phi_i(x)k(x,t)\phi_j(t)dtdx] = \int_a^b \phi_i(x)f(x)dx,$$

$$i = 1, 2, ..., n \qquad (9.1)$$

در حالت کلی‌تر می‌توان شرایط تعامد را با انتخاب n تابع مستقل خطی دیگر نظیر $\psi_i(x)$ به ازای $i = 1, 2, ..., n$ به مسأله افزود. در این صورت پس از حل دستگاه زیر به جای (۸.۱) و (۹.۱) مقادیر c_jها محاسبه می‌شوند.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j [\int_a^b \psi_i(x)\phi_j(x)dx - \int_a^b \int_a^b \psi_i(x)k(x,t)\phi_j(t)dtdx] = \int_a^b \psi_i(x)f(x)dx, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

شبیه آنچه گفته شد می‌توان برای حل معادلات انتگرالی فردهلم خطی نوع اول نیز عمل کرد. در این صورت مقادیر c_jها از حل دستگاه زیر حاصل می‌گردند.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j [\int_a^b \int_a^b \psi_i(x)k(x,t)\phi_j(t)dtdx] = \int_a^b \psi_i(x)f(x)dx, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

برای آشنایی بیشتر با روش‌های هم محلی و بابنوف–گالرکین که موسوم به روش‌های تغییراتی[15] هستند و همچنین بحث در همگرایی آن‌ها می‌توان به مراجع [۴, ۲۵, ۲۶, ۴۸] رجوع کرد و برای آشنایی با روش‌های دقیق‌تر و کاراتر از این نوع نیز می‌توان به [۵۴] مراجعه کرد.

۳.۲.۱ روش‌های تربیع[16]

یکی دیگر از انواع روش‌های عددی حل معادلات انتگرالی خطی و غیرخطی، روش تربیع است. روش تربیع را به اختصار بیان می‌کنیم. به طور کلی در این روش‌ها هدف، تبدیل مسألهٔ حل یک معادلهٔ انتگرالی خطی یا غیرخطی به مسألهٔ حل یک دستگاه خطی یا غیرخطی است. تفاوت انواع این روش‌ها در نحوهٔ ساخت دستگاه حاصل و خطای محاسبهٔ حاصل از حل این دستگاه می‌باشد.

از الزامات روش‌های تربیع آشنایی با روش‌های انتگرال‌گیری عددی است. فرض کنید یک فرمول انتگرال‌گیری عددی به صورت زیر در دست باشد،

[15] Variational methods
[16] Quadrator methods

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{j=0}^{n} \omega_j f(x_j) \qquad (۱۰.۱)$$

که در آن ω_jها و x_jها برای $j = 0, 1, ..., n$ به ترتیب وزن‌ها و نقاط درونیابی فرمول انتگرال‌گیری عددی می‌باشند. به عنوان نمونه در روش ذوزنقه‌ای مرکب با تقسیم بازهٔ انتگرال‌گیری به n قسمت مساوی داریم

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2} f(x_0) + hf(x_1) + hf(x_2) + ... + hf(x_{n-1}) + \frac{h}{2} f(x_n)$$

در نتیجه اگر بخواهیم این فرمول را به صورت (۱۰.۱) بنویسیم، خواهیم داشت

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\omega_j = \begin{cases} \frac{h}{2} & j = 0, n \\ h & j = 1, 2, ..., n-1 \end{cases}$$

$$x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, ..., n$$

با به کارگیری فرمول انتگرال‌گیری عددی (۱۰.۱) برای حل معادلهٔ انتگرالی (۲.۱) یا (۳.۱)، انتگرال سمت راست این معادله را با فرمول زیر تقریب می‌زنیم، یعنی

$$\int_a^b k(x,t)y(t)dt \simeq \sum_{j=0}^{n} \omega_j k(x, x_j) y(x_j) \qquad (۱۱.۱)$$

در انتگرال سمت چپ معادلهٔ (۱۱.۱)، متغیر x ثابت فرض می‌شود. لذا خواهیم داشت

$$y(x) \simeq f(x) + \lambda \sum_{j=0}^{n} \omega_j k(x, x_j) y(x_j), \qquad a \le x \le b \qquad (۱۲.۱)$$

از آن‌جایی که خود تابع $y(x)$ مجهول است، نیاز داریم که به طور هم‌زمان هم تقریب انتگرال و هم تقریبی از $y(x)$ را به دست آوریم. برای این منظور چون x_iها برای $i = 0, 1, ..., n$ در بازهٔ $[a, b]$ قرار دارند، و در رابطهٔ (۱۲.۱) صدق می‌کنند. آن‌ها را در معادلهٔ (۱۲.۱) قرار می‌دهیم، حاصل می‌شود

$$y(x_i) = f(x_i) + \lambda \sum_{j=0}^{n} \omega_j k(x_i, x_j) y(x_j), \quad i = 0, 1, ..., n \qquad (۱۳.۱)$$

دستگاه (۱۳.۱) را معمولاً برای سهولت در نوشتار به صورت زیر نیز می‌نویسند.

$$y_i = f_i + \lambda \sum_{j=0}^{n} \omega_j k_{ij} y_j, \quad i = 0, 1, ..., n$$

که در آن از نمادگذاریهای زیر استفاده شده است.

$$\begin{aligned} y_i &= y(x_i) \\ f_i &= f(x_i) \\ k_{ij} &= k(x_i, x_j) \end{aligned} \tag{۱۴.۱}$$

با حل دستگاه (۱۳.۱) با توجه به معلوم بودن ω_jها، $k(x_i, x_j)$ها و $f(x_i)$ها برای $i, j = 0, 1, ..., n$ می‌توان $y(x_i)$ها را برای $i = 0, 1, ..., n$ به دست آورد.

حال اگر تعریف کنیم

$$Y = (y(x_0), y(x_1), ..., y(x_n))^t$$

$$F = (f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n))^t$$

$$K = \begin{bmatrix} \omega_0 k(x_0, x_0) & \omega_1 k(x_0, x_1) & ... & \omega_n(x_0, x_n) \\ \omega_0 k(x_1, x_0) & \omega_1 k(x_1, x_1) & ... & \omega_n k(x_1, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_0 k(x_n, x_0) & \omega_1 k(x_n, x_1) & ... & \omega_n k(x_n, x_n) \end{bmatrix} \tag{۱۵.۱}$$

آن‌گاه دستگاه (۱۳.۱) را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نمایش داد،

$$(I - \lambda K)Y = F.$$

آن‌چه ذکر شد، اساس روش‌های تربیع برای حل معادلات انتگرالی فردهلم خطی نوع دوم است. لازم به ذکر است که در معادلات انتگرالی فردهلم خطی می‌توان هر نوع فرمول انتگرال‌گیری عددی اعم از باز و بسته را به کار برد. سپس با معلوم شدن تابع مجهول $y(x)$ در نقاط درونیابی می‌توان به روش‌های مختلف مانند روش‌های درونیابی ساده، قطعه‌ای یا حتی برازش منحنی، تابع $y(x)$ را تقریب زد.

در ادامه چگونگی به کارگیری این روش را با فرمول‌های انتگرال‌گیری عددی توضیح می‌دهیم. و برای سهولت از دو فرمول سادهٔ انتگرال‌گیری عددی ذوزنقه‌ای و سیمپسون استفاده خواهیم کرد.

همان‌طور که می‌دانیم، فرمول انتگرال‌گیری عددی ذوزنقه‌ای مرکب با تقسیم بازهٔ انتگرال‌گیری به n قسمت مساوی، به صورت زیر است.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{۲}\sum_{j=۱}^{n}[f(x_{j-۱}) + f(x_j)] - \frac{nh^۳}{۱۲}f''(c), \quad a < c < b \qquad (۱۶.۱)$$

که در آن

$$h = \frac{b-a}{n} \; x_j = a + jh, \quad j = ۰, ۱, ..., n.$$

با به کارگیری این روش انتگرال‌گیری عددی برای حل یک معادلهٔ انتگرالی فردهلم خطی به صورت (۳.۱) مشابه روشی که توضیح داده شد، داریم

$$\omega_j = \begin{cases} \frac{h}{۲} & j = ۰, n \\ h & j = ۱, ۲, ..., n-۱ \end{cases}$$

با جایگذاری در (۱۵.۱)، ماتریس K به صورت زیر به دست می‌آید.

$$K = h\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲}k_{۰۰} & k_{۰۱} & k_{۰۲} & \dots & k_{۰,n-۱} & \frac{۱}{۲}k_{۰n} \\ \frac{۱}{۲}k_{۱۰} & k_{۱۱} & k_{۱۲} & \dots & k_{۱,n-۱} & \frac{۱}{۲}k_{۱n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{۱}{۲}k_{n۰} & k_{n۱} & k_{n۲} & \dots & k_{n,n-۱} & \frac{۱}{۲}k_{nn} \end{bmatrix}$$

بنابراین دستگاه حاصل برای حل تقریبی معادله، به صورت زیر خواهد بود.

$$y_i = f_i + \frac{\lambda h}{۲}\sum_{j=۱}^{n}[k_{i,j-۱}y_{j-۱} + k_{ij}y_j], \quad i = ۰, ۱, ..., n$$

پس از حل این دستگاه، جواب تقریبی معادلهٔ (۳.۱) به روش تربیع ذوزنقه‌ای مرکب به دست می‌آید.

به طور مشابه از روش تربیع سیمپسون مرکب نیز می‌توان استفاده کرد.

همان‌طور که می‌دانیم، فرمول انتگرال‌گیری سیمپسون مرکب به صورت زیر است.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{۳}\sum_{j=۱}^{n}[f(x_{۲j-۲}) + ۴f(x_{۲j-۱}) + f(x_{۲j})] - \frac{nh^۵}{۹۰}f^{(۴)}(c), \quad a < c < b \qquad (۱۷.۱)$$

در این روش بازهٔ انتگرال‌گیری $[a, b]$ را به $۲n$ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، بنابراین داریم

$$h = \frac{b-a}{۲n}$$

$$x_j = a + jh, \quad j = ۰, ۱, ..., ۲n$$

و وزن‌های آن عبارتند از

$$\omega_j = \begin{cases} \frac{h}{۳} & j = ۰, ۲n \\ \frac{۴h}{۳} & j = ۱, ۳, ۵, ..., ۲n-۱ \\ \frac{۲h}{۳} & j = ۲, ۴, ۶, ..., ۲n-۲ \end{cases} \qquad (۱۸.۱)$$

با جایگذاری (۱۸.۱) در (۱۵.۱) خواهیم داشت

$$K = \frac{h}{۳}\begin{bmatrix} k_{۰۰} & ۴k_{۰۱} & ۲k_{۰۲} & ۴k_{۰۳} & ... & ۴k_{۰,۲n-۱} & k_{۰,۲n} \\ k_{۱۰} & ۴k_{۱۱} & ۲k_{۱۲} & ۴k_{۱۳} & ... & ۴k_{۱,۲n-۱} & k_{۱,۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{۲n,۰} & ۴k_{۲n,۱} & ۲k_{۲n,۲} & ۴k_{۲n,۳} & ... & ۴k_{۲n,۲n-۱} & k_{۲n,۲n} \end{bmatrix}$$

دستگاه حاصل از آن به صورت زیر خواهد شد.

$$y_i = f_i + \frac{\lambda h}{۳}\sum_{j=۱}^{n}[k_{i,۲j-۲}y_{۲j-۲} + ۴k_{i,۲j-۱}y_{۲j-۱} + k_{i,۲j}y_{۲j}], \quad i = ۰, ۱, ..., ۲n.$$

روش‌های تربیع دیگری نیز برای حل معادلات انتگرالی وجود دارند از جمله روش تربیع نقطه میانی مرکب، روش تربیع نیوتن–گریگوری[۱۷]، روش تربیع گوس[۱۸]، روش تربیع با ضرایب مساوی، روش تربیع ذوزنقه‌ای تصحیح شدهٔ مرکب و روش‌های تربیع با طول گام متغیر. برای آشنایی بیشتر با دیگر روش‌های تربیع برای حل معادلات انتگرالی می‌توان به مراجع [۱, ۷, ۸, ۵۱, ۵۲, ۵۴, ۵۶] رجوع کرد.

در اینجا لازم است متذکر شویم، با توجه به این‌که روش تربیع همواره دارای کارایی لازم برای حل معادلات فردهلم خطی نوع اول نمی‌باشد، از ذکر آن خودداری می‌نمائیم [۴۸, ۵۶, ۵۷].

با توجه به مطالب گفته شده، با به کارگیری روش‌های هم محلی، پتروف–گالرکین و روش‌های تربیع در نهایت به یک دستگاه از معادلات خطی یا غیرخطی می‌رسیم. اما این دستگاه‌ها اغلب با روش‌های موجود یا قابل حل نیستند و یا در زمان معقول حل نمی‌شوند، زیرا بعضی از دستگاه‌های معادلات خطی، بدوضع[۱۹] و یا

[۱۷] Gregory
[۱۸] Gauss
[۱۹] ill-posed

نزدیک منفرد[۲۰] هستند. به خصوص وقتی دستگاه حاصل غیرخطی باشد، در این حالت مسأله سخت‌تر می‌شود، چرا که ممکن است ماتریس ژاکوبین یا هسیان موجود نباشند و یا به سختی محاسبه شوند. در این جاست که نیاز به ابزاری کارا برای حل این دستگاه از معادلات داریم. برای این منظور در فصل دوم روش ابتکاری الکترومغناطیس (EM) را به طور مختصر مرور نموده که از آن در فصل‌های سوم و چهارم برای بدست آوردن الگوریتم‌هایی کارا برای حل دستگاه معادلات خطی و غیرخطی استفاده خواهیم کرد. برای این کار روش EM را با روش $GMRES$ و نیوتن—$GMRES$ ترکیب نموده تا ابزاری قوی برای حل دستگاه معادلات خطی و غیرخطی فراهم شود. در فصل سوم روش ترکیبی $GMRES-EM$ را برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد، سازگار[۲۱]، ناسازگار[۲۲]، مربعی و مستطیلی پیشنهاد داده‌ایم. در فصل چهارم دستگاه معادلات غیرخطی را مورد بحث قرار داده و برای این نوع از دستگاه‌ها روش ترکیبی $EM-NG$ را که ترکیب روش الکترومغناطیس با روش $Newton-GMRES$ می‌باشد را آورده‌ایم. در این فصل برای نشان دادن کارایی الگوریتم ترکیبی پیشنهادی مثال‌های با ابعاد بزرگ را نیز ارائه نموده‌ایم. در فصل پنجم به کارگیری روش ترکیبی پیشنهادی را برای حل معادلات انتگرالی فردهلم غیرخطی معرفی کرده‌ایم. برای این کار مثال‌هایی که با روش‌های دیگر حل شده‌اند را با روش پیشنهادی مقایسه نموده‌ایم. حال برای آشنایی با الگوریتم ابتکاری EM فصل دوم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

---

[۲۰] nearly singular
[۲۱] Consistent
[۲۲] Inconsistent

فصل ۲

معرفی الگوریتم الکترومغناطیس برای حل مسائل بهینه‌سازی سراسری

۱.۲ مقدمه

در این فصل به اختصار روش ابتکاری الکترومغناطیس EM [۱] را برای حل مسائل بهینه‌سازی سراسری بیان می‌کنیم. این روش از مکانیزم جذب و دفع برای هدایت جواب‌های نمونه به سمت جواب بهینه استفاده می‌کند. از این روش می‌توان به تنهایی و یا ترکیب آن با روش‌های دیگر استفاده نمود.

در سال‌های اخیر اهمیت و کاربرد بهینه‌سازی سراسری در علومی مانند فیزیک، شیمی، بیولوژی مولکولی و غیره [٦٧] که شامل توابع غیرخطی با تعداد زیادی متغیر هستند ثابت شده است، اما پیدا کردن جواب بهینه با ابزارهای ریاضی مانند روش‌های گرادیان کاری بسیار مشکل است.

برای غلبه بر این مشکل، از اوایل دهه ۱۹۸۰ روش‌های جستجوی تصادفی به منظور پیدا کردن جواب‌های تقریباً بهینه معرفی شده است. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش شبیه‌سازی تبریدی [۴۴]، روش‌های چند سطحی [۴۹]، روش‌های تکاملی [٥١, ٦٥] و روش‌های افرازی [۸۵] اشاره نمود. در این روش‌ها از یک مکانیزم تصادفی، برای جستجو کردن کران بهتری برای تابع هدفی که باید بهینه شود، استفاده می‌شود. بعضی از

[۱] Electromagnetism-Like Method (EM)

این روش‌ها ممکن است فرآیند جستجو را با یک روش جستجوی محلی و یا روش‌هایی بر اساس گرادیان، ترکیب نمایند [۴۱]. یک الگوریتم جستجوی تصادفی ممکن است جواب قابل قبولی را ارائه دهد در حالی که الگوریتم‌های دیگر ناتوان باشند و آن به دلیل نامنظم بودن مسأله و یا اینکه مسأله مورد طرح دارای ابعاد بزرگ می‌باشد رخ می‌دهد. برای اطلاع یافتن از مطالب بیشتر در این زمینه می‌توان به مراجع [۴۹,۵۰] مراجعه کرد.

رده‌ای خاص از مسائل بهینه‌سازی با متغیرهای کران‌دار را به شکل زیر برای تشریح چگونگی عملکرد الگوریتم الکترومغناطیس در نظر می‌گیریم [۱۰]

$$\begin{array}{ll} Min & f(x) \\ s.t & x \in [L,U] \end{array} \qquad (۱.۲)$$

که در آن $[L,U] = \{x \in I\!R^n \mid l_k \leq x_k \leq u_k, k = ۱,۲...,n\}$. n بعد مسأله، l_k و u_k به ترتیب کران پایین و بالای مؤلفه kام هستند. دلیل انتخاب مسأله بالا این است که در این مسأله، بیانِ، شدنی بودن جواب[۲] ساده است و به همین دلیل این مسأله برای مطالعه الگوریتم‌های تصادفی [۱۰] و روش‌های دقیق بسیار مناسب است.

در ادامه، ابتدا الگوریتم EM و انگیزه‌ای که پشت این الگوریتم ابتکاری است را توضیح داده و سپس شمای کلی و زیر روال‌هایی که در الگوریتم به کار می‌روند را می‌آوریم.

۲.۲ انگیزه[۳] و محرک به وجود آمدن الگوریتم الکترومغناطیس (EM)

در الگوریتم‌های تصادفی که بر پایه جمعیتی از جواب‌ها کار می‌کنند، باانتخاب تعدادی از جواب‌های نمونه تصادفی از ناحیه شدنی، شروع می‌شوند. نواحی جذب بر طبق مقدار تابع هدف این جواب‌ها، تعیین می‌شوند. سپس از مکانیزمی برای جستجوی بیشتر این نواحی کاندید استفاده می‌شود. این مکانیزم متناظر با عملگرهای ترکیب[۴] و جهش[۵] در الگوریتم‌های ژنتیک[۶] برای تولید جواب است [۶۵].

در روش الکترومغناطیس از مکانیزم مشابه‌ای به نام جذب[۷] و دفع[۸] استفاده می‌شود، و مشابه الکترومغناطیس

---

۲ Feasible Solution
۳ Motivation
۴ Crossers
۵ Mutation
۶ Genetic Algorithms
۷ Attraction
۸ Repulsion

مقدماتی، هر نقطه یا جواب نمونه[۹] به عنوان ذره‌ای باردار[۱۰] که در فضا پخش شده است، در نظر گرفته می‌شود. در الگوریتم EM، شارژ هر نقطه متناسب با مقدار تابع هدف آن تعیین می‌شود. این شارژ همچنین میزان جذب و دفع نقطه را بر روی جمعیت نقاط تعیین می‌کند. هر چه قدر مقدار تابع هدف از نظر ما بهتر باشد، اندازه جذب آن نیز بیشتر است.

بعد از محاسبه شارژ هر ذره، از آن برای پیدا کردن جهتی که آن نقطه در آن جهت حرکت خواهد نمود، استفاده می‌گردد. برای هر ذره، این جهت با محاسبه ترکیبی از نیروهایی که از طرف بقیه ذره‌ها بر یک ذره وارد می‌شوند، تعیین می‌گردد. همانند نیروهای الکترومغناطیس، این نیرو جمع برداری نیروهایی است که بر یک ذره یا نقطه وارد می‌شوند.

سرانجام مشابه الگوریتم‌های ترکیبی بر پایه جمعیت ممکن است از یک زیرروال جستجوی محلی [۱۱] برای بهبود بعضی از جواب‌ها در جمعیت جواب‌ها استفاده می‌شود[۴۱, ۳۶].

۳.۲ شرح الگوریتم ابتکاری الکترومغناطیس (EM)

در این قسمت شمای کلی از الگوریتم EM و زیرروال‌هایی که از آنها استفاده می‌شوند را ارائه می‌دهیم.

۱.۳.۲ شمای کلی برای EM

الگوریتم ابتکاری EM شامل چهار فاز است که عبارتند از: فراهم کردن داده‌های اولیه الگوریتم[۱۲]، محاسبه نیروی کلی [۱۳] وارده بر هر ذره یا نقطه، حرکت یا جابجایی[۱۴] در امتداد جهت نیرو، و سرانجام به کارگیری جستجو در همسایگی ذره[۱۵] برای بهره برداری از می‌نیمم محلی. شمای کلی این الگوریتم را می‌توان به شکل زیر بیان نمود[۱۰]:

Algorithm ۲.۱ EM(m,MAXITER,LSITER,δ)

m: number of sample points

---

[۹] Sample Point
[۱۰] Charged Particle
[۱۱] Local Search Procedure
[۱۲] Initialization
[۱۳] Total Force
[۱۴] Movement
[۱۵] Neighborhood

MAXITER: maximum number of iterations

LSITER: maximum number of local search iterations

δ: local search parameter, $\delta \in [۰, ۱]$

۱. Initialize( )

۲. iteration $\longleftarrow$ ۱

۳. While iteration $<$ MAXITER do

۴. Local(LSITER,δ)

۵. F $\longleftarrow$ CalcF( )

۶. Move(F)

۷. iteration $\longleftarrow$ iteration $+۱$

۸. end While

۲.۳.۲ زیرروال فراهم کردن مقادیر اولیه: Inatialization

زیرروال Initialize، برای تولید m نقطه یا جواب تصادفی از فضای جواب ممکن به کار می‌رود. فرض بر این است که هر یک از n مؤلفه با توزیع یکنواخت بین دو کران بالا و پایین متناظرش، انتخاب می‌شوند. بعد از آن که یک جواب نمونه از فضای جواب ساخته شد، مقدار تابع هدف متناظر با آن $f(x)$ به دست می‌آید (خط ۶ الگوریتم ۲.۲). زیرروال پس از تولید m جواب نمونه متوقف می‌شود و نقطه‌ای که بهترین مقدار تابع هدف را دارد به عنوان x^{best} (خط ۸) ذخیره می‌شود [۱۰].

Algorithm ۲.۲ Initialize()

۱. for i=۱ to m do

۲. for k=۱ to n do

۳. $\lambda \leftarrow U(۰, ۱)$

۴. $x_k^i \leftarrow l_k + \lambda(u_k - l_k)$

۵. end for

۶. Calculate $f(x^i)$

۷. end for

۸. $x^{best} \leftarrow \text{argmin}(f(x^i), \forall i)$

۳.۳.۲ جستجوی محلی Local Search

زیرروال جستجوی محلی Local( )، برای جمع‌آوری اطلاعات محلی هر نقطه مثل x^i به کار می‌رود. پارامترهای LSITER و δ به ترتیب نشان‌دهنده تعداد تکرار و ضریب جستجوی محلی است. این زیربرنامه مؤلفه به مؤلفه نقطه x^i را بهبود می‌بخشد.

در این روش هیچ احتیاجی به استفاده از اطلاعات گرادیان نیست. و جالب اینجاست که همین روش ساده به جای روش‌های جستجوی محلی قوی‌تر نتایج بسیار خوبی در همگرایی الگوریتم EM ارائه می‌دهد [۱۰].

Algorithm ۳.۲ Local (LSITER,δ)

۱. Counter← ۱

۲. Length← $\delta(max_k\{u_k - l_k\})$

۳. for i=۱ to m do

۴. for k=۱ to n do

۵. $\lambda_1 \leftarrow U(0, 1)$

۶. while Counter < LSITER do

۷. $y \leftarrow x^i$

۸. $\lambda_2 \leftarrow U(0, 1)$

۹. if $\lambda_1 > 0.5$ then

۱۰. $y_k \leftarrow y_k + \lambda_2 * Length$

۱۱. else

۱۲. $y_k \leftarrow y_k - \lambda_2 * Length$

۱۳. end if

۱۴. if $f(y) < f(x^i)$ then

۱۵. $x^i \leftarrow y$

۱۶. Counter ← LSITER - 1

۱۷. end if

۱۸. Counter ← Counter+1

۱۹. end while

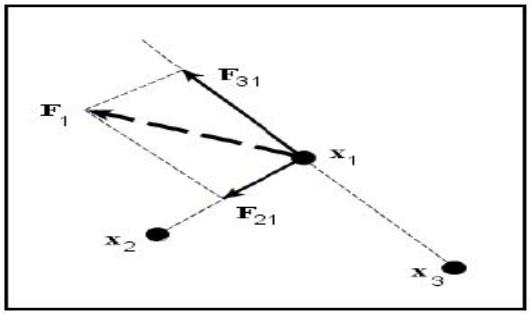
۲۰. end for

۲۱. end for

۲۲. $x^{best} \leftarrow \text{argmin}\{f(x^i), \forall i\}$

۴.۳.۲ محاسبه بردار نیروی کل

اصل برهمکنش[۱۶]، در نظریه الکترومغناطیس بیان می‌کند که نیروی اعمال شده بر یک نقطه از طرف نقاط دیگر با فاصله بین نقاط رابطهٔ عکس و با شارژ نقاط رابطه مستقیم دارد (شکل ۱.۲) [۲۲].



شکل ۱.۲. اصل برهمکنش $(F_{i1} = \frac{q_1 q_i}{4\pi E_0 E_r r^2} \vec{e_r} \quad i = 2, 3)$

در هر تکرار این الگوریتم، بارِ تمام نقاط را بر حسب تابع هدف آن‌ها محاسبه می‌کنیم. توجه داریم که مقدار بار هر نقطه یا ذره از یک تکرار به تکرار بعدی ثابت نیست و تغییر می‌کند.

مقدار بار هر نقطه q^i، نشان دهندهٔ قدرت نقطهٔ iام در جذب یا دفع بقیه نقاط موجود در جمعیت است. این بار از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۱۰]:

$$q^i = exp(-n\frac{f(x^i) - f(x^{best})}{\sum_{k=1}^{m}(f(x^k) - f(x^{best}))}), \quad \forall i \qquad (۲.۲)$$

[۱۶] Superposition Principle