فهرست مندرجات

فهرست جداول

۱

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)

۱.۱ پیشگفتار

شاید که در حدود پنجاه سال پیش *فارل* سنگ بنای تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها را گذشت، خودش هم فکر نمی‌کرد که در کمتر از نیم قرن این بحث چنان پیشرفتی کند که در بیشتر شاخه‌های علوم،از ریاضیات گرفته تا علوم فنی و مهندسی و مدیریت و اقتصاد و غیره به عنوان یک تکنیک کارآمد در سال ۱۹۷۸ توسط *چارنز،کوپر و رودز* تا کنون، هزاران مقاله در این خصوص در جهان ارائه شده است و مدل های مختلف و متنوعی برای اندازه‌گیری کارائی واحدهای تصمیم‌گیری به وجود آمده است . ده‌ها کتاب در این خصوص نوشته شده، چندین نرم‌افزار مرتبط طراحی و تهیه گردیده ،وسمینارهای متعدد جهانی ، منطقه‌ای و ملی در زمینه تحلیل پوششی داده‌ها برگزار شده است . همچنین صدها پایان نامه و رساله در مقاطع فوق لیسانس و دکتری، این تکنیک را از نظر بنیادی و کاربردی توسعه داده است. که همه‌ی اینها نشان از اهمیت این تکنیک ریاضی در دنیای امروزاست.

۲.۱ مقدمه

مساله ارزیابی عملکرد واحدها از دیرباز مورد توجه مدیران بوده است . برخورد علمی با این مطلب از اواخر جنگ جهانی دوم شروع وگسترش چشم‌گیری داشته است . فرماندهان نظامی واقف شدند که هر گونه تصمیم‌گیری فردی بدون بکار بردن روشهای علمی مشکل آفرین می‌باشد . ازاین رو اولین گروه از دانشمندان برای تصمیم گیری در مورد مسائل جنگی دعوت شدند که می‌توان گفت اولین پایه گذاران علم تحقیق در عملیات می‌باشد .

امروزه با توجه به پیچیدگی مسائل ،حجم بسیار بالای اطلاعات ، اثرات عوامل خارجی بر عملکرد و محدود بودن واحدها در رابطه با تصمیم‌گیری‌های مناسب ، تغییرات ناگهانی خط مشی و....از عواملی است که بدون برخورد علمی با آنان راهکار مناسبی در جهت بهره‌وری بهتر عاید نمی‌گردد.

چرا ارزیابی می‌کنیم و چگونه ارزیابی کنیم ؟

دبیرستان الف و ب را در نظر بگیرید . دبیرستان الف در امتحانات پایان سال ودر امتحانات ورودی دانشگاه قبولی‌هایی به ترتیب ۱۰۰درصد و ۹۰درصد داشته است . آیامی‌توان گفت دبیرستان الف کار است ؟ اگر ملاک همین دو شاخص باشد آیا میتوان گفت دبیرستان مذکور بالایی کارایی را دارد ؟(بافرض این که هیچکدام از دبیرستان های کشور درصد قبولی فوق را در کنکور و امتحانات پایان سال ندارد)

واضح است که جواب منفی است ، اطلاعات موجود نشان می‌دهد که در این دبیرستان بهترین دانش آموزان را انتخاب نمود ، بهترین فضای آموزشی را داشته ،از مجرب ترین کادر آموزشی استفاده نمود و مجهزترین آزمایشگاه در اختیار مدرسه بوده و مشکلاتی آموزشی و اجرایی از قبیل کمبود نیرو و....ندارد .

اگر فقط دو شاخص قبولی در کنکور و قبولی در امتحان‌نهایی مورد توجه ارزیاب باشد، در این صورت می توان گفت که ارزیاب هیچ توجهی به امکانات مدرسه ننموده است .حال دبیرستان ب را در نظر بگیرید که دو شیفته اداره می‌شود .

اگر مدرسین ، حق‌التدریس های جوان و تازه کار باشندو مدرسه هیچ کدام ازامکانات پیشرفته از قبیل آزمایشگاه و ... را نداشته باشد ولی با توجه به نکات ذکر شده این دبیرستان در امتحانات نهایی ۴۰ درصد و در کنکور۳۰ درصد قبولی داشته است .

کدام یک ازدبیرستان‌هاخوب عمل نموده یا به عبارت دیگر کارایی بهتری دارد؟

واضح است که به این سادگی نمی‌توان جواب این سوال را داد و نیازمند بررسی دقیق‌تر و استفاده از روش‌های علمی معتبر می‌باشد.

۳.۱ تعاریف

۱.۳.۱ تعریف تحلیل پوششی داده‌ها(DEA)

تحلیل پوششی داده‌ها تکنیکی برای ارزیابی کارایی [1] نسبی یک مجموعه از واحدهای تصمیم گیرنده است که با استفاده از برنامه ریزی ریاضی انجام می‌شود.

۲.۳.۱ تعریف واحد تصمیم گیرنده

[2] واحد تصمیم‌گیرنده اساسی ترین ابزار تحلیل پوششی داده‌هااست وبه سازمانی گفته می‌شود که وظیفه آن تبدیل ورودی به خروجی است و در تحلیل پوششی داده‌ها مورد ارزیابی قرار می‌گیرد .

۳.۳.۱ تعریف ورودی

[3] ورودی عاملی است که با افزایش آن ضمن، حفظ سایر عوامل اندازه کارایی کاهش می‌یابد و بالعکس با کاهش آن ، ضمن حفظ سایر عوامل اندازه کارایی افزایش می‌یابد.

---

[1] Efficiency

[2] Decision Making Unit(DMU)

[3] input

۴.۳.۱ تعریف خروجی

[۴] خروجی عاملی است که با آن ، ضمن حفظ سایر عوامل اندازه کارایی افزایش می‌یابد و بالعکس با کاهش آن ، ضمن حفظ سایر عوامل اندازه کارایی می‌یابد.[۵]

۵.۳.۱ تعریف مجموعه امکان تولید (PPS)

[۶] مجموعه n واحد تصمیم گیرنده $\{(x_j \ , y_j); j = ۱, \cdots, n\}$ را در نظر بگیرید. $X_j = (x_{۱j}, \cdots, x_{mj})$ بردار ورودی و $Y_j = (y_{۱j}, \cdots, y_{sj})$ بردار خروجی DMU_j است و فرض کنید برای هر $j = ۱, \cdots, n$ ، $x_j \underset{\neq}{\geqq} ۰$ و $y_j \underset{\neq}{\geqq} ۰$ باشد. یعنی در بردار x_j و y_j لااقل یک مولفه مثبت وجود دارد. هر زوج (x,y) را یک فعالیت [۷] می‌نامیم. مجموعه زیر را مجموعه امکان تولید گوییم:

$T = \{(x, y) \ |$ ورودی x خروجی y را تولید کند. $\}$

پنج اصل موضوعه زیر برای مجموعه امکان تولید برقرار است:

اصل اول: شمول مشاهدات

[۸] تمامی فعالیت‌های مشاهده شده در T قرار دارند یعنی برای هر $j = ۱, \cdots, n$ داریم:

$$(x_j \ , \ y_j) \in T$$

[۴] Output

[۵] تعاریف ارائه شده برای وردی و خروجی در برخی موارد صادق نیستند . برای مثال اگر خروجی کارخانه‌ای گازهای آلاینده باشد با کاهش افزایش آلودگی کارایی بالا نمی‌رود

[۶] Production Possibility Set

[۷] Activity

[۸] Inclusion of Observatiom

اصل دوم: بی‌کرانی اشعه

اگر فعالیت (x,y) متعلق به T باشد و t عددی مثبت باشد. آن گاه فعالیت (tx,ty) نیز به T تعلق دارد. به این خاصیت فرض بازده به مقیاس ثابت [۹] نیز گفته می‌شود.

اصل سوم: تحدب و بسته بودن

[۱۰] مجموعه T یک مجموعه محدب و بسته است.

اصل چهارم: امکان پذیری

[۱۱] اگر فعالیت (x,y) به T تعلق داشته باشد و $x \geq \bar{x}$ و $y \leq \bar{y}$ باشد. آن گاه فعالیت $(\bar{x}, \bar{y})$ نیز به T تعلق دارد. یعنی هر فعالیت با ورودی بزرگتر مساوی از x در تمام مولفه‌ها و خروجی کوچکتر مساوی از y در تمام مولفه‌ها به T تعلق دارد.

اصل پنجم : کمینه برونیابی

[۱۲] مجموعه T کوچکترین مجموعه‌ای است که در اصول موضوعه فوق صدق می‌کند.

با توجه به اصول موضوعه فوق مجموعه T_c به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_c = \{(x, y) \ \mid \geq \sum_{j=1}^{n} x_j \ \lambda_j \ , \ y \leq \sum_{j=1}^{n} y_j \ \lambda_j \ , \ \lambda_j \geq 0 \ , \quad j = 1, \cdots, n\}$$

اگر اصل بی‌کرانی اشعه را حذف کنیم اصول باقیمانده مجموعه T_v را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

---

[۹] Constant Returns to Scale(CRS)

[۱۰] Convexity

[۱۱] Monotonicity

[۱۲] Minimum Extrapolation

$$T_v = \{(x,y) \ \mid \geq \sum_{j=1}^{n} x_j \ \lambda_j \ ,$$
$$y \leq \sum_{j=1}^{n} y_j \ \lambda_j \ , \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \ , \ \ \lambda_j \geq 0 \ , \ \ \ j = 1, \cdots, n\}$$

۱.۳.۶ مدل CCR

[۱۳] در ساده‌ترین حالتی که DMU یک ورودی و یک خروجی دارد کارایی به صورت ساده زیر تعریف می‌شود:

کارایی = خروجی / ورودی

در بیشتر موارد DMUها چندین ورودی و خروجی دارند که این ورودی‌ها و خروجی‌ها واحدهای متفاوتی دارند. در این حالت اندازه کارایی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Efficiency = \frac{u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_s y_s}{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_m x_m} \tag{1}$$

که در آن u,v به ترتیب بردار وزن ورودی‌ها و خروجی‌ها هستند.

تعریف بالا نیازمند در اختیار داشتن یک مجموعه از وزن‌هااست که تعریف کارایی را پیچیده می‌سازد. به ویژه اگر یک مجموعه مشترک از وزن‌ها بین تمام DMUهای تحت ارزیابی به کار برده شود. زیرا ممکن است برخی از DMUهایی که مقدار کارایی پایینی به دست آورده‌اند، بر مناسب بودن وزن‌ها اعتراض داشته باشند.

---

[۱۳] Charnes, Cooper and Rhodes

این مسئله همچنین می‌تواند بدین صورت در نظر گرفته شود که هر کدام از DMUها وزن‌های اختصاصی مربوط به خودشان را داشته باشند و بنابراین هر کدام در چارچوب قوانینی مشترک برای تمام DMUها، این وزن‌ها را معرفی کنند.

چارنز، کوپرو رودز در سال ۱۹۷۸ مدل زیر را برای محاسبه کارایی DMU_o پیشنهاد کردند:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & h_o = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{io}} & & \\
s.t \quad & \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_j \, x_{ij}} \leq 1 & & j = 1, \cdots, n \\
& u_r \, , \, v_i \geq 0 & & r = 1, \cdots, s \, ; \, i = 1, \cdots, m
\end{aligned}
\tag{2}
$$

که در آن : $y_{rj}=$ مقدار خروجی rام از DMU_j

$x_{ij}=$ مقدار ورودی iام از DMU_j

$u_r=$ وزن اختصاص داده شده به خروجی rام

$v_i=$ وزن اختصاص داده شده به ورودی iام

$n=$ تعدد DMUها

$s=$ تعداد خروجی‌ها

$m=$ تعداد ورودی‌ها

در مدل بالا وزن‌های u_r و v_i مجهول هستند . چارنز، کوپر و رودز تابع هدف این مدل را به عنوان مقدار کارایی DMU_o تعریف کردند.

مدل ۲ وزن‌ها را به گونه‌ای مشخص می‌کند که کارایی DMU_o (تابع هدف) ماکزیمم شود، با این محدودیت که کارایی تمام DMUها از بالا به ۱ محدود باشد. چون بنابر قیود مدل ۲ کارایی تمام DMUها و از جمله DMU_o از بالا به ۱ محدود شده است، بنابراین برای DMU_o مقدار کارایی حداکثر ۱ حاصل می‌شود.

در ابتدا چارنز، کوپر و رودز DMUهایی را که برای آن‌ها مقدار کارایی ۱ حاصل شده باشد، به عنوان DMUهای کارا در نظر گرفتند.

کارایی تمام DMUهای مجموعه تحت ارزیابی با حل مدلی مشابه مدل بالا برای هر DMU به دست می‌آید. در حالت کلی وزن‌های بدست آمده برای یک DMU با DMUهای دیگر تفاوت دارد. این تفاوت یک ضعف و همچنین یک توانایی این روش است.

ممکن است پس از حل مدل ۲ برای DMUای که عملکرد بدی دارد، جواب بهینه حاصل کارا بودن DMU را نشان دهد یعنی تابع هدف ۱ به دست آمده باشد. اما این کارایی بیشتر به انتخاب وزن‌ها مربوط بوده و در اصل DMUی تحت ارزیابی ناکارا است. بنابراین تفاوت وزن‌ها در DMUهای مختلف ضعف روش محسوب می‌شود.

از نقطه نظر دیگر این انعطاف پذیری در انتخاب وزن‌ها یک نقطه قوت مدل است زیرا چنانچه یک DMU با انتخاب وزن‌های دلخواهش ناکارا شده باشد این ناکارایی قابل توجیه یا اعتراض نیست. یعنی این استدلال که وزن‌ها برای آن DMU نامناسب بوده، قابل دفاع نیست. زیرا مدل ۲ بهترین وزن‌های ممکن برای DMUی تحت ارزیابی را به آن اختصاص می‌دهد.

مدل ۲ یک برنامه ریزی خطی کسری [۱۴] است اما به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود:

اگر قرار دهیم $\frac{1}{q} = \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{io}$ مدل زیر را به دست می‌آوریم:

[۱۴] Fractional Linear Program

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{r=1}^{s} q\ u_r\ y_{ro} \\
s.t \quad & \sum_{i=1}^{m} q\ v_i\ x_{io} = 1 \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r\ y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i\ x_i j \leq 0 \qquad j = 1, \cdots, n \\
& u_r \geq 0 \qquad r = 1, \cdots, s \\
& v_i \geq 0 \qquad i = 1, \cdots, m \\
& q \geq 0
\end{aligned} \tag{3}
$$

با ضرب طرفین دسته قیود نامساوی در q و تغییر متغیر $qu_r = \bar{u_r}$ و $qv_i = \bar{v_i}$ مدل زیر که فرم مضربی [15] مدل CCR نامیده می‌شود، بدست می آید:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{r=1}^{s} \bar{u_r}\ y_{ro} \\
s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} \bar{v_i}\ x_{io} = 1 \\
& \sum_{r=1}^{s} \bar{u_r}\ y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} \bar{v_i}\ x_{ij} \leq 0 \qquad j = 1, \cdots, n \\
& \bar{u_r} \geq 0 \qquad r = 1, \cdots, s \\
& \bar{v_i} \geq 0 \qquad i = 1, \cdots, m
\end{aligned} \tag{4}
$$

حال می‌توان به جای $\bar{u_r}$ ، u_r و به جای $\bar{v_i}$، v_i را قرار داد.

تابع هدف در بالا با قبول اینکه در ماکزیمم سازی یک کسر اندازه نسبی صورت و مخرج مهم است و اندازه واقعی آن‌ها مهم نیست، خطی شده است. برای مثال عدد کسری $\frac{3}{6}$ را در

[15] Multiplier Form

نظر بگیرید.

در این کسر مساوی ۳ بودن صورت یا مساوی ٦ بودن مخرج اهمیتی ندارد. آن چه مهم است دو برابر بودن مخرج نسبت به صورت است. به طوری که ما آن را با کسر $\frac{۵۰}{۱۰۰}$ یا هر کسر دیگری که این نسبت بین صورت و مخرج در آن حفظ شده، برابر می‌دانیم.

فرم برداری مدل مضربی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max \quad & U^t\, Y_o \\ s.t. \quad & V^t\, X_o = ۱ \\ & U^t\, Y_j - V^t\, X_j \leq ۰ \qquad j = ۱, \cdots, n \\ & U \geq ۰ \\ & V \geq ۰ \end{aligned} \tag{۵}$$

قبلا بیان شد چارنز، کوپر و رودز DMUای که تابع هدف مدل ۲ برای آن ۱ به دست آمده باشد به عنوان DMUی کارا تعریف کردند. این تعریف دقیق نیست. کارایی قوی [۱۶] به صورت زیر تعریف می‌شود:

فرض کنید $(U^*\ ,\ V^*)$ جواب بهینه مدل ۴ باشد. DMU_o را CCR− کارا (کارای قوی) گویند اگر $\sum_{r=۱}^{s} u_r^*\, y_{ro} = ۱$ و لااقل یک جواب بهینه $(U^*\ ,\ V^*)$ وجود داشته باشد که $(U^*\ ,\ V^*) > ۰$ در غیر این صورت DMU_o ناکارا است.

[۱۶] Strong Efficient

DMU_o را کارایی ضعیف [17] گویند اگر و فقط اگر $\sum_{r=1}^{s} u_r^* \, y_{ro} = 1$ و همه مولفه‌های U^* و V^* در تمام جواب‌های بهینه مثبت اکید نباشد. کارایی ضعیف در واقع ناکارایی است.

از آن جا که مدل ۴، n قید نامساوی با مقدار سمت راست ۰ دارد و n تعداد DMUها عدد بزرگی است، مدل ۱—۴ از تبه گنی درجه بالایی برخوردار است و همچنین با توجه به تعداد متغیرهای سط تابع هدف، دوگان این مسئله نیز تبه گنی درجه بالایی دارد.

این تبه گنی همزمان در پرایمال و دوگان موجب ایجاد جواب‌های بهینه چندگانه در هر دو مسئله می‌شود.

بنابراین چنانچه در بهینگی $\sum_{r=1}^{s} u_r^* \, y_{ro} = 1$ باشد ولی $(U^* \, , \, V^*)$ حداقل یک مولفه ۰ داشته باشد نمی‌توان ناکارایی DMU_o را نتیجه گرفت زیرا ممکن است جواب بهینه دیگری با $(\bar{U^*} \, , \, \bar{V^*} > 0)$ موجود باشد.

برای رفع این مشکل به جای حل مدل ۴ مدل زیر را حل می‌کنیم:

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{ro} & \\
s.t. & \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{io} = 1 & \\
 & \sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{ij} \leq 0 & j = 1, \cdots, n \\
 & u_r \geq \epsilon \qquad r = 1, \cdots, s & \\
 & v_i \geq \epsilon \qquad i = 1, \cdots, m &
\end{array}
\tag{6}
$$

[17] Weak Efficient

که در آن ϵ یک عدد غیر ارشمیدسی است و به صورت عدد مثبت کوچکتر از هر عدد حقیقی مثبت تعریف می‌شود. این بدان معنی است که ϵ یک عدد حقیقی نیست.

به جای حل مدل ۴ می‌توان دوگان آن را حل کرد که فرم پوششی [۱۸] مدل CCR نامیده می‌شود و به صورت زیر است:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \theta & \\
s.t. & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, \lambda_j \le \theta\, x_{io} & i = 1, \cdots, m \\
& \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\, \lambda_j \ge y_{ro} & r = 1, \cdots, s \\
& \lambda_j \ge 0 & j = 1, \cdots, n
\end{array}
\tag{7}
$$

این مسئله همواره دارای جواب شدنی $\theta = 1$ برای هر $\lambda_o = 1$ و $\lambda_j = 0$ برای $j \neq o$ می‌باشد.

بنابر قضیه مکمل زائد اگر پرایمال و دوال شدنی باشند جواب بهینه دارند و مقادیر تابع هدف بهینه آن‌هابا هم برابر است پس مدل ۷ نیز جواب بهینه دارد و در بهینگی $0 < \theta^* \le 1$.

در واقع برای ارزیابی DMU_o با مدل ۷ ضمن حفظ خروجی‌های DMU_o سعی بر حداکثر کاهش شعاعی ورودی‌های آن با نسبت θ داریم تا جائیکه از PPS خارج نشویم.

به عبارت دیگر درون PPS دنبال یک DMU (مجازی یا حقیقی) هستیم که با ورودی‌های کمتر همان مقدار خروجی‌ها را تولید کند که در صورت وجود چنین DMUای، DMU_o ناکارا است.

برای تعریف دقیق کارایی ابتدا با افزودن متغیرهای کمکی s^- و s_+ به قیود مسئله ۷ آن را به فرم استاندارد زیر در می آوریم:

---

[۱۸] Envelopment Form

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \theta \\
s.t. \quad & \theta\, x_{io} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, \lambda_j - s_i^- = 0 \qquad & i = 1, \cdots, m \\
& \sum_{i=1}^{n} y_{rj}\, \lambda_j - s_r^+ = y_{ro} \qquad & r = 1, \cdots, s \\
& \lambda_j \geq 0 & j = 1, \cdots, n \\
& s_i^- \geq 0 & i = 1, \cdots, m \\
& s_r^+ \geq 0 & r = 1, \cdots, s
\end{aligned}
\tag{8}
$$

حال تعریف کارایی را به صورت زیر ارائه می‌دهیم:

۷.۳.۱ تعریف کارایی در مدل پوششی

فرض کنید $(\theta^* \,,\, \lambda^* \,,\, s^{-^*} \,,\, s^{-^*})$ جواب بهینه مدل ۸ در ارزیابی DMU_o باشد که در آن $s^{-^*} = (s_1^{-^*}, \cdots, s_m^{-^*})$ و $s^{+^*} = (s_1^{+^*}, \cdots, s_m^{+^*})$. در این صورت:

۱) اگر در همه جواب‌های بهینه مدل ۸، $\theta^* = 1$، $s^{-^*} = 0$ و $s^{+^*} = 0$ آن گاه DMU_o را CCR کارا (کارای قوی) گوییم.

۲) اگر در برخی از جواب‌های بهینه مدل ۸، $\theta^* = 1$، $s^{-^*} \neq 0$ و $s^{+^*} \neq 0$ آن گاه DMU_o را کارای ضعیف گوییم.

۳) اگر $\theta^* < 1$ آن گاه DMU_o را به طور اکید ناکارا گوییم.

پس از حل مدل ۸ نیز نمی‌توان کارایی قوی را بدست آورد زیرا همان‌طور که در قیود ورودی آن مشاهده می‌شود این مدل تبه گنی حداقل از درجه m دارد.

در دوگان آن نیز تبه گنی درجه بالایی دیده می‌شود و این تبه گنی همزمان در پرایمال و دوال احتمال وجود جواب‌های چندگانه را بسیار زیاد می‌کند یعنی چنانچه در ارزیابی DMU_o داشته باشیم $\theta^* = 1$ و تمام متغیر کمکی‌ها صفر باشند.

نمی‌توان به طور قطع اظهار کرد DMU_o کارای قوی است زیرا ممکن است جواب بهینه‌ای وجود داشته باشد که متغیرهای کمکی آن دارای مولفه مثبت باشند. لذا برای رفع این مشکل از مدل دو مرحله‌ای استفاده می‌کنیم:

مدل دو مرحله‌ای:

در مرحله اول مدل ۷ را حل می‌کنیم. فرض کنیم جواب بهینه $(\theta^* \ , \ \lambda^*)$ بدست آید اگر $\theta^* < 1$ باشد DMU_o ناکارا است اما اگر $\theta^* = 1$ باشد مدل زیر را حل می‌کنیم:

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ & \\
s.t. & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\ \lambda_j + s_i^- = \theta^*\ x_{io} & i = 1, \cdots, m \\
& \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\ \lambda_j - s_r^+ = y_{ro} & r = 1, \cdots, s \\
& \lambda_j \geq 0 & j = 1, \cdots, n \\
& s_i^- \geq 0 & i = 1, \cdots, m \\
& s_r^+ \geq 0 & r = 1, \cdots, s
\end{array} \qquad (۹)
$$

حال اگر تابع هدف مدل دوم صفر شود بنابه نامنفی بودن متغیرهای کمکی باید تمام متغیرهای کمکی در تمام جواب‌های بهینه صفر باشند و در نتیجه بنابه تعریف کارایی، DMU_o کارای قوی است. در غیر این صورت اگر جواب بهینه بزرگتر از صفر باشد DMU_o کارای ضعیف است.