بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

بررسی روش آنالیز هوموتوپی برای حل معادلات تابعی غیرخطی

استاد راهنما: دکتر سید محمد مهدی حسینی

استاد مشاور: دکتر فرید(محمد) مالک قائینی

پژوهش و نگارش: سید محمد حسینی

تیرماه ۱۳۸۸

تقدیم به:

روح پدرم و مادر بزرگوارم

قدردانی و تشکر

سپاس یزدان پاک را.

اکنون که با عنایت خداوند سبحان کار تدوین این پایان‌نامه به اتمام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم از تمامی عزیزانی که در به ثمر رسیدن این پژوهش مرا همراهی نمودند تشکر و قدردانی کنم.

از زحمات بی دریغ استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر سید محمد مهدی حسینی که پیمودن این مسیر بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان میسر نبود خالصانه سپاسگذاری می‌کنم.

با تقدیر و تشکر از استاد مشاور گرامی جناب آقای دکتر فرید (محمد) مالک قائینی که با راهنمایی‌های ارزشمندشان بنده را مورد بذل عنایت خود قرار دادند.

از استاتید گرامی جناب آقای دکتر سید مهدی کرباسی و جناب آقای دکتر سید ابوالفضل شاهزاده فاضلی که داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند، خاضعانه سپاسگذارم.

از خانواده‌ی عزیزم، که همیشه همراه و مشوق من بوده‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم و برایشان از درگاه خداوند متعال توفیق و سعادتمندی آرزومندم.

از کلیه اساتیدی که در دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد از محضر آنان کسب فیض نمودم، همچنین سرکار خانم عابدینی و سرکار خانم عباسی‌زاده و تمامی همکلاسی‌های عزیزم تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از دوستان عزیزم، بخصوص محمد حیدری، محمدرضا حدادی، محسن گورابی، فرهاد دهقانی‌زاده، مهدی زارع‌زاده، منصور زارعی و محمدحسین حیدری که همیشه کنار من بوده‌اند تشکر و قدردانی می‌کنم و برایشان آرزوی توفیق و بهروزی دارم.

سید محمد حسینی

تیرماه ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل به طور مختصر به مفاهیمی که در این پایان‌نامه به آن‌ها نیاز است اشاره می‌کنیم. ابتدا با معادلات دیفرانسیل آشنا می‌شویم. در ادامه با تعریف فضای توپولوژیک به بیان مفهوم هوموتوپی در توپولوژی پرداخته، چندجمله‌ای‌های چبیشف را معرفی کرده و بسط توابع به‌وسیله‌ای آن‌ها را شرح می‌دهیم. در نهایت شکل کلی دستگاه معادلات جبری غیرخطی را نشان داده و حل عددی آن را توسط روش نیوتن-رافسون بیان می‌کنیم.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۲.۱. یک معادله دیفرانسیل معادله‌ای است شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن و هدف از حل آن معادله یافتن تابع مجهول است. چنانچه در این معادله دیفرانسیل مشتقات توابع فقط نسبت به یک متغیر ظاهر شوند آن را یک معادله دیفرانسیل معمولی[۱] می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱. چنانچه در یک معادله دیفرانسیل مشتقات توابع نسبت به چند متغیر ظاهر شده باشند آن را یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی[۲] می‌نامند.

تعریف ۳.۲.۱. بزرگترین مرتبه‌ی مشتق ظاهر شده در یک معادله دیفرانسیل معمولی را مرتبه آن معادله می‌نامند. شکل کلی یک معادله معمولی مرتبه n - ام به صورت

$$f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = \circ$$

می‌باشد.

[۱] Ordinary differential equation
[۲] Partial differential equation

تعریف ۴.۲.۱. در یک معادله‌ی دیفرانسیل که با تابع مجهول y است، چنانچه هیچ جمله غیرخطی از y و مشتقات آن در معادله موجود نباشد معادله را خطی و در غیر این‌صورت معادله را غیرخطی می‌نامند. شکل کلی یک معادله‌ی خطی مرتبه n - ام به صورت

$$a_{\circ}\left(x\right)y^{(n)}+a_{۱}\left(x\right)y^{(n-۱)}+\ldots+a_{n}\left(x\right)y=a_{n+۱}\left(x\right)$$

است، که ضرایب $a_{i}\left(x\right), i=\circ,۱,\ldots,n+۱$ توابعی معلوم هستند که در بازه‌ای مانند I تعریف شده‌اند. که اگر $a_{n+۱}\left(x\right)\equiv\circ$ باشد معادله همگن و در حالت $a_{n+۱}\left(x\right)\neq\circ$ معادله غیرهمگن نامیده می‌شود.

معادلات دیفرانسیل خطی معمولی را می‌توان به کمک روش‌های تحلیلی حل کرد، اما اغلب با معادلات دیفرانسیل غیرخطی‌ای مواجه هستیم که نمی‌توان جواب تحلیلی آن‌ها را به‌دست آورد.

تعریف ۵.۲.۱. در یک معادله دیفرانسیل چنانچه مقدار تابع و مشتقات آن به عنوان شرایط جنبی تنها در یک نقطه داده شده باشند آن را یک مساله مقدار اولیه می‌نامند. شکل کلی یک مساله مقدار اولیه مرتبه n - ام به صورت

$$f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=\circ$$

$$y\left(a\right)=\alpha_{\circ}\ ,\ \ y'(a)=\alpha_{۱},\ \ ,\ \ \ldots\ \ ,\ \ y^{(n-۱)}\left(a\right)=\alpha_{n-۱}$$

است، که در آن a و $\alpha_{i}, i=\circ,۱,\ldots,n-۱$ها ثابت‌های داده شده‌ای هستند.

مثال ۱.۲.۱. حرکت یک آونگ ساده در حال نوسان تحت مفروضات ساده معینی را می‌توان با معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}}+\frac{g}{L}\sin(\theta)=\circ$$

توصیف کرد، که در آن L طول آونگ، g ثابت ثقل زمین، $\theta(t)$ زاویه آونگ با وضیعت قائم یا حالت تعادل آن در لحظه t است. اگر وضیعت آونگ در شروع حرکت را با $\theta(t_{\circ})=\theta_{\circ}$ و سرعت در آن نقطه را با $\theta'(t_{\circ})=\theta'_{\circ}$ مشخص کنیم، با یک مساله مقدار اولیه مواجه هستیم. به‌علاوه به ازای مقادیر کوچک θ، تقریب $\theta\approx\sin(\theta)$ برای ساده کردن این مساله به معادله خطی

$$\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}}+\frac{g}{L}\theta=\circ$$

به کار می‌رود.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید $f: E \to R^n$ روی E مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f \in C^1(E)$، اگر مشتق f یعنی

$$Df: E \to L(R^n)$$

روی E پیوسته باشد، که $L(R^n)$ فضای شامل تمام عملگرهای خطی روی R^n است.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید E زیر مجموعه بازی از R^n باشد. گوییم تابع $f: E \to R^n$ در شرط لیپشیتز روی E صدق می‌کند، هرگاه ثابت مثبت k چنان موجود باشد که برای هر $x, y \in E$ داشته باشیم:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

تعریف ۸.۲.۱. تابع f روی E به طور موضعی لیپشیتز گفته می‌شود، هرگاه برای هر $x_0 \in E$، یک همسایگی x_0 یعنی $N_\varepsilon(x_0) \subset E$ و ثابت $K_0 > 0$ چنان موجود باشند که برای هر $x, y \in N_\varepsilon(x_0)$ داشته باشیم:

$$|f(x) - f(y)| \leq K_0|x - y|.$$

لم ۱.۲.۱. فرض کنید E یک زیر مجموعه بازی از R^n و $f: E \to R^n$ باشد. اگر $f \in C^1(E)$ آنگاه f روی E به طور موضعی لیپشیتز است.

قضیه ۱.۲.۱. (وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول)
فرض کنید $E = \{(x, y)|\ a < x < b,\ -\infty < y < \infty\}$ و تابع f بر E پیوسته باشد. هرگاه f نسبت به متغیر y در شرط لیپشیتز صدق کند آنگاه مساله مقدار اولیه

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y) \\ y(a) &= \alpha \end{aligned}$$

دارای جواب یگانه‌ی $y(x)$ به ازای $a \leq x \leq b$ است.

۳.۱ توپولوژی و هوموتوپی

منشا پیدایش مفهوم فضای توپولوژیک[۱]، بررسی خط اعداد حقیقی و فضای اقلیدسی و توابع پیوسته روی این فضاها بوده است. در این بخش، فضای توپولوژیک را تعریف می‌کنیم. تعریف فضای توپولوژی که اکنون تعریفی استاندارد است، با تلاش ریاضیدانان مختلفی مانند اویلر[۲]، هاسدورف[۳]، فرشه[۴] و دیگران در طی دهه‌های اولیه قرن ۱۹ انجام شد که تعریف‌های گوناگونی را پیشنهاد کردند ولی توافق آن‌ها بر سر مناسب‌ترین تعریف، پس از زمان طولانی حاصل شد.

تعریف ۱.۳.۱. یک توپولوژی روی یک مجموعه ناتهی X، گردایه‌ای ناتهی چون τ از زیر مجموعه های X است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف : X و $\varnothing$ عضو τ هستند،

ب : اجتماع هر زیر گردایه دلخواه از اعضای τ عضو τ است،

ج : اشتراک هر زیر گردایه‌ی متناهی از اعضای τ به τ تعلق دارد.

تعریف ۲.۳.۱. مجموعه‌ی X همراه با توپولوژی τ، یک فضای توپولوژیک نامیده می‌شود به علاوه فضای X با توپولوژی τ را با (X,τ) نمایش می‌دهیم. عناصر τ را زیر مجموعه‌های باز X می‌نامیم.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید (X,τ_1) و (Y,τ_2) دو فضای توپولوژیک باشند. نگاشت $f: X \longrightarrow Y$ را یک نگاشت پیوسته گویند هرگاه به ازای هر زیر مجموعه‌ی باز Y مانند p، مجموعه‌ی $f^{-1}(p)$ در X باز باشد.

مثال ۱.۳.۱. اگر X یک مجموعه دلخواه باشد، آنگاه مجموعه‌ی توانی آن (مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های X) یک توپولوژی روی X تعریف می‌کندکه این توپولوژی، توپولوژی گسسته نامیده می‌شود.

در ادامه به تعریف هوموتوپی، که یک مفهوم اساسی در توپولوژی و مشتقات علم هندسه است، می‌پردازیم.

---
[۱] Topological space
[۲] Euler
[۳] Hausdorff
[۴] Frechet

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید $I=[0,1]$ بازه‌ی واحد حقیقی، X و Y فضاهای توپولوژیک و f_1 و f_2 دو نگاشت پیوسته از X بتوی Y باشند. اگر نگاشت پیوسته‌ای چون $F:I\times X\to Y$ موجود باشد به طوری که به ازای هر x عضو X:

$$F(0,x)=f_1(x),\quad F(1,x)=f_2(x)$$

آنگاه نگاشت‌های f_1 و f_2 را هموتوپ و نگاشت F را یک هموتوپی بین f_1 و f_2 می‌گوئیم و هموتوپ بودن f_1 و f_2 را با $f_1\sim f_2$ نمایش می‌دهیم.

به عبارت دیگر هر هموتوپی، یک خانواده تک پارامتری از توابع پیوسته تعریف شده از فضای X به‌توی Y است. اگر t پارامتر معرف زمان باشد، هنگامی که زمان از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند، هموتوپی F نمایشگر دگردیسی (تغییر شکل) پیوسته‌ی f_1 به f_2 است.

برای آشنایی بیشتر با هموتوپی‌ها، یک نوع هموتوپی ساده ولی در عین حال پر کاربرد را در مثال زیر معرفی می‌کنیم.

مثال ۲.۳.۱. فرض کنیم f_1 و f_2 دو نگاشت از X بتوی Y باشند. قرار می‌دهیم:

$$F(t,x)=tf_1(x)+(1-t)f_2(x)$$

واضح است که F یک هموتوپی بین f_1 و f_2 است. در این پایان‌نامه به طور مکرر این هموتوپی را به کار می‌بریم. هموتوپی F، هموتوپی مستقیم الخط و در برخی مواقع هموتوپی محدب نامیده می‌شود.

لم ۱.۳.۱. رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه هم ارزی است.

برهان. برای اثبات کافی است نشان دهیم سه خصوصیت رابطه هم ارزی برقرار است.
الف : به ازای هر تابع مفروض مانند f قرار می‌دهیم $F(t,x)=f(x), 0\leq t\leq 1$. بنابراین $f\sim f$.
ب : فرض کنید $f_1\sim f_2$ و F هموتوپی بین f_1 و f_2 باشد. حال قرار می‌دهیم $G(t,x)=F(1-t,x), 0\leq t\leq 1$، در این‌صورت G یک هموتوپی بین f_2 و f_1 است، یعنی $f_2\sim f_1$.

ج : فرض کنیم $f_1 \sim f_2$ با هوموتوپی F_1 و $f_2 \sim f_3$ با هوموتوپی F_2، نشان می‌دهیم که $f_1 \sim f_3$.
برای این کار کافی است نگاشت $G : I \times X \to Y$ را به صورت

$$G(t,x) = \begin{cases} F_1(2t, x), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F_2(2t-1, x), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

تعریف کنیم، واضح است که $f_1 \sim f_3$ با هوموتوپی G. $\square$

۴.۱ چندجمله‌ای‌ها و بسط چبیشف

در ابتدا چندجمله‌ای‌های ژاکوبی[۱] را معرفی می‌کنیم که چندجمله‌ای‌های چبیشف[۲] نوع اول حالت خاصی از آن‌ها هستند و در ادامه چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول را بیان کرده و تقریب توابع به‌وسیله‌ی آن‌ها را شرح می‌دهیم.

چندجمله‌ای‌های ژاکوبی که به چندجمله‌ای‌های فوق هندسی نیز معروف هستند جواب معادله دیفرانسیل ژاکوبی

$$(1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]\, y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0$$

می‌باشند که با $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ نمایش داده می‌شوند.
با در نظر گرفتن جواب معادله دیفرانسیل ژاکوبی به صورت سری

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (x-1)^r$$

رابطه بازگشتی

$$[\gamma - \nu(\nu+\alpha+\beta+1)]\, a_\nu - 2(\nu+1)(\nu+\alpha+1)a_{\nu+1} = 0$$

را برای $\nu = 0, 1, \cdots$ داریم، که در آن

$$\gamma = n(n+\alpha+\beta+1).$$

Jacobi polynomials[۱]
Chebyshev polynomials[۲]

با حل رابطه‌ی بازگشتی فوق به ازای $\alpha, \beta > -۱$ داریم:

$$P_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{(-۱)^n}{۲^n n!}(۱-x)^{-\alpha}(۱+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(۱-x)^{\alpha+n}(۱+x)^{\beta+n}\right].$$

چند جمله‌ای‌های ژاکوبی، یک دستگاه متعامد در بازه‌ی $[-۱,۱]$، نسبت به تابع وزن

$$w(x) = (۱-x)^{\alpha}(۱+x)^{\beta}$$

تشکیل می‌دهند و در رابطه‌ی

$$\int_{-۱}^{۱} P_m(\alpha,\beta)P_n(\alpha,\beta)(۱-x)^{\alpha}(۱+x)^{\beta}dx = \frac{۲^c}{۲n+c}\frac{\Gamma(n+\alpha+۱)\Gamma(n+\beta+۱)}{n!\Gamma(n+c)}\delta_{mn}$$

که در آن

$$c = \alpha+\beta+۱$$

و

$$\delta_{mn} = \begin{cases} ۱, & m=n, \\ ۰, & m\neq n. \end{cases}$$

صدق می‌کنند.

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول، توابع ویژه مساله‌ی اشتورم-لیوویل[۱] منفرد

$$\left(\sqrt{۱-x^۲}T_n'(x)\right)' + \frac{n^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}T_n(x) = ۰$$

هستند و با نماد $\{T_n\}_{n=۰}^{+\infty}$ نمایش داده می‌شوند.

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول، در روابط بازگشتی

$$\begin{cases} T_n(x) = ۲xT_{n-۱}(x) - T_{n-۲}(x), & n\geq ۲ \\ T_۰(x) = ۱, \\ T_۱(x) = x, \end{cases}$$

---

[۱] Sturm-Liouville

صدق می‌کنند، همچنین این چندجمله‌ای‌ها می‌توانند توسط روابط

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) = \cosh(n \arccos h(x))$$

نیز محاسبه شوند.

توجه می‌کنیم که چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول یک مورد خاص از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی $P_n^{(\alpha,\beta)}$ با $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ هستند. بنابراین این چندجمله‌ای‌ها نسبت به تابع وزن $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ روی بازه‌ی $[-1, 1]$ متعامدند و در رابطه‌ی

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi\delta_{mn} & m \neq 0, n \neq 0 \\ \pi\delta_{mn} & m = 0, n = 0 \end{cases} \tag{1.4.1}$$

صدق می‌کنند.

توابع ویژه از مسائل اشتورم-لیوویل تکین معین، را می‌توان برای تقریب توابع $C^{\infty}[a, b]$ پذیرفت [۱۶, ۲۶]. فرض کنید f یک تابع روی $[a, b]$ باشد. برای هر عدد طبیعی دلخواه N، قرار می‌دهیم:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{N} a_i T_i \left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}\right), \quad a \leq x \leq b$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در $\frac{T_j\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$ و انتگرال‌گیری از طرفین رابطه به‌دست آمده و استفاده از (۱.۴.۱) داریم:

$$a_i = \frac{2}{\pi c_i}\int_{-1}^{1} \frac{f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right)T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

که

$$c_i = \begin{cases} 2, & i = 0, \\ 1 & i \geq 1. \end{cases}$$

اگر $a \leq x \leq b$ و قرار دهیم $x = \frac{b-a}{2}\bar{x} + \frac{b+a}{2}$ آنگاه $-1 \leq \bar{x} \leq 1$.

۵.۱ دستگاه معادلات جبری غیرخطی

دستگاه معادلات جبری غیرخطی غالباً برخاسته از مدل‌سازی‌های عددی در بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی است. این دستگاه‌ها که از گسسته سازی مسائل مقدار مرزی با روش تفاضلات

متناهی و عناصر متناهی نیز حاصل می‌شوند، اغلب به طور تحلیلی قابل حل نیستند و از این رو به محاسبه‌ی جواب عددی آن‌ها روی می‌آوریم. در حقیقت یک نظریه کلی برای حل این دستگاه‌ها وجود ندارد، اما برخی روش‌های ارائه شده برای حل دستگاه‌های مورد بحث، عبارتند از:
روش نیوتن-رافسون [۱۵]، روش تکرار ساده [۱۵] و روش طیفی [۲۶].

شکل کلی یک دستگاه از معادلات جبری غیرخطی عبارت است از:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \qquad\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \end{cases}$$

که در آن هر تابع f_i فضای n بعدی R^n را به خط حقیقی R می‌نگارد. اغلب مطلوب است که دستگاه را با یک تابع مثل F که R^n را به‌توی R^n می‌نگارد و به صورت زیر می‌باشد، نمایش داد:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)).$$

در اینجا روش نیوتن-رافسون را برای حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی با یک جفت معادله‌ی دو متغیره شرح می‌دهیم. دستگاه

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0, \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. فرض کنید (x_1, x_2) یک جواب تقریبی برای دستگاه فوق باشد و فرض کنید تصحیح‌های h_1 و h_2 را طوری محاسبه کرده باشیم که $(x_1 + h_1, x_2 + h_2)$ جواب تقریبی بهتری باشد. با استفاده از جملات خطی بسط تیلور دو متغیره داریم:

$$\begin{cases} 0 = f_1(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \approx f_1(x_1, x_2) + h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + h_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2), \\ 0 = f_2(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \approx f_2(x_1, x_2) + h_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) + h_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2). \end{cases}$$

این معادلات یک جفت معادله‌ی خطی برای تعیین h_1 و h_2 است. ماتریس ضرایب، ماتریس ژاکوبین $[f_1, f_2]$ در نقطه‌ی (x_1, x_2) می‌باشد که به صورت

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} (x_1, x_2)$$

تعریف می‌شود. برای به‌دست آوردن h_1 و h_2 لازم است که J نامنفرد باشد. اگر این شرط برقرار باشد، جواب عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = -J^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix},$$

در این‌صورت روش تکراری نیوتن-رافسون برای حل دستگاه دو معادله‌ی غیرخطی دو مجهولی عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^{k} \\ h_2^{k} \end{bmatrix}.$$

فصل ۲

روش آنالیز هوموتوپی

۱.۲ مقدمه

بیشتر پدیده‌های پیرامون ما دارای ماهیت غیرخطی بوده و با معادلات غیرخطی فرمول‌بندی می‌شوند. با توجه به این‌که با بوجود آمدن کامپیوترهای پیشرفته، حل مسائل خطی آسان و آسان‌تر شد اما هنوز بحث در مورد حل دقیق یک مساله‌ی غیرخطی کاری دشوار است. با وجود این‌که ما در حال حاضر کامپیوترهای پیشرفته و همچنین نرم افزارهایی مانند میپل[۱]، متمتیکا[۲] و شبیه آن‌ها را در اختیار داریم اما در اغلب موارد به‌دست آوردن جواب تحلیلی یک مساله غیرخطی داده‌شده مشکل است.

برخی از روش‌های تحلیلی برای حل مسائل غیرخطی مانند روش‌های اختلال موجودند که بسیار مشهور و پرکاربردند. به‌وسیله‌ی روش‌های اختلال، تعداد زیادی از خصوصیات مهم و جالب پدیده‌های غیرخطی آشکار شدند(کشف نهمین سیاره منظومه شمسی نیز مدیون همین روش بوده است).

روش‌های اختلال با استفاده از کمیت‌های اختلال، یک مساله غیرخطی را به تعدادی نامتناهی از زیر مسائل خطی تبدیل کرده و آن را به‌وسیله‌ی مجموعی از جواب‌های چندین زیر مساله خطی اولیه، تقریب می‌زنند. روش‌های اختلال دارای دو مشکل زیر می‌باشند:
الف : یک مساله‌ی غیرخطی در حالت کلی شامل کمیت‌های اختلال نمی‌باشد، این یک ضعف آشکار روش‌های اختلال می‌باشد.
ب : روش‌های اختلال تنها برای حل مسائل غیرخطی ضعیف (شامل پارامترهای هستند که از لحاظ مقداری بسیار کوچک/بزرگ می‌باشند) ارزشمند هستند.

تعداد کمی از روش‌های غیراختلالی برای حل مسائل غیرخطی موجودند. لیاپانوف[۳] با معرفی

[۱] Maple
[۲] Mathematica
[۳] Lyapunov