بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

مشبکه های نرم

مؤلف:
فاطمه افضلی

استاد راهنما:
دکتر ارشام برومند سعید

آذر ماه ۱۳۹۱

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: فاطمه افضلی	امضاء:
استاد راهنما: دکتر ارشام برومند سعید	امضاء:
استاد مشاور:	امضاء:
داور اول : نداریم	امضاء:
داور دوم: نداریم	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی:	امضاء:

تقدیم به

تقدیم به روان پاک پدرم:

که از نگاهش صلابت، از رفتارش محبت و از صبرش

ایستادگی را آموختم.

تقدیم به مادرم دریای بی کران فداکاری و عشق:

که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر.

تقدیم به همسرم اسطوره زندگی ام، پناه خستگی ام و امید

بودنم.

و تقدیم به تمامی عزیزانم.

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس پروردگار بی همتا که توفیق آموختن نا آموخته ها را به من ارزانی داشت.

با تقدیر و تشکر از استاد فرهیخته و بزرگوار جناب آقای دکتر ارشام برومند سعید که همواره راهنما و راهگشای این جانب در اتمام و اکمال این پایان نامه بوده اند.

مقدمه

برای حل مسائل پیچیده در زمینه مهندسی، علوم طبیعی، علوم پزشکی و علوم اجتماعی، ریاضیات کلاسیک موفقیت آمیز نبود به همین علت، تئوری ریاضیات از جمله تئوری مجموعه ها، تئوری مجموعه های نرم، تئوری مجموعه های نرم فازی و ... برای ارتباط با متغیرها به وجود آمد. تئوری مجموعه های نرم توسط مولودتسف [۱] در سال ۱۹۹۹ به عنوان یک شکل ریاضی جدید برای ارتباط با متغیرها معرفی شد. بعد از آن محققان زیادی روی تئوری مجموعه های نرم و کاربردهایش کار کردند. و پیشرفت های سریعی داشتند. از آن جمله، علی عرفان [۲] در سال ۲۰۰۹ عمل های جدیدی را روی مجموعه های نرم مورد مطالعه قرار داد و نعیم چگمان [۳] و فاروق کارآسلان [۴] در سال ۲۰۰۷ نیز برروی مجموعه های نرم مطالعه کردند و سپس آن را با مفاهیمی از مجموعه های فازی ارتباط دادند. آنها همچنین مفاهیمی از گروه های نرم را تعریف کردند و گزاره های مربوط به آن را نتیجه گرفتند. ساختار مشبکه های نرم توسط ناگاراجان [۵] در سال ۲۰۱۱ و لی [۶] در سال ۲۰۱۰ ساخته شد.

---

[۱] D. A. Molodtsov

[۲] Ali Irfan

[۳] Naim Cagman

[۴] Faruk Karaaslan

[۵] R. Nagarajan

[۶] F. Li

در این پایان نامه مشبکه های نرم را مورد بررسی قرار دادیم .بدین ترتیب که در فصل اول، بخش اول، ابتدا به یادآوری تعریف مشبکه، زیر مشبکه، مشبکه مدولار، مشبکه توزیع پذیر، همریختی مشبکه ای و... می پردازیم. در بخش دوم وسوم مشبکه های نرم را به ترتیب از دیدگاه اول و دوم تعریف می کنیم و سپس زیر مجموعه یک مجموعه نرم، متمم یک مجموعه نرم، مجموعه نرم تهی و مجموعه نرم مطلق را در هر دو دیدگاه معرفی می کنیم. و در بخش سوم مجموعه نرم فازی را تعریف می کنیم.

در فصل دوم، بخش اول، مشبکه نرم را از دیدگاه اول تعریف می کنیم و سپس به بیان زیر مشبکه نرم، مشبکه توزیع پذیرنرم و مشبکه مدولار نرم می پردازیم وروی خواص جبری این مفاهیم متمرکز می شویم و برای توضیح بیشتر آنها چند مثال می آوریم.همچنین همریختی مشبکه ای نرم را تعریف می کنیم و خواص مربوطه اش را به دست می آوریم به علاوه ایده آل مشبکه نرم را تعریف کرده وبا ذکر مثال شرح می دهیم. در بخش دوم این فصل مشبکه نرم را از دیدگاه دوم تعریف می کنیم و مشبکه نرم کامل، زیر مشبکه نرم، زنجیر نرم، مشبکه نرم توزیع پذیر و مشبکه نرم مدولار را معرفی کرده و خواص مربوط به آنها را مورد بحث قرار می دهیم.

در فصل سوم ابتدا مفهومی از مشبکه نرم فازی را تعریف کرده در ادامه زیر مشبکه نرم فازی، مشبکه نرم فازی کامل، مشبکه نرم فازی مدولار، مشبکه نرم فازی توزیع پذیر و زنجیر نرم فازی را مورد مطالعه قرار می دهیم و خواص اساسی آنها را بررسی می کنیم و برای شرح بیشتر آنها مثال هایی می آوریم.

چکیده

مولودتسف مفهومی از مجموعه های نرم را معرفی کرد که می تواند به عنوان یک روش ریاضی جدید برای ارتباط با متغیرها در نظر گرفته شود. در این پایان نامه ابتدا مطالعه مشبکه نرم را با استفاده از تئوری مجموعه نرم آغاز می کنیم. سپس مفاهیمی از مشبکه نرم، مشبکه توزیع پذیر نرم، مشبکه مدولار نرم و ... از دو دیدگاه معرفی می کنیم و چندین خواص مربوطه و چند قضیه اختصاصی را بررسی می کنیم. در آخر مشبکه نرم فازی را معرفی و مطالعه می کنیم.

کلمات کلیدی: *مجموعه نرم، مشبکه نرم، مجموعه نرم فازی، مشبکه نرم فازی، مشبکه توزیع پذیر نرم و مشبکه مدولار نرم.*

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

۱.۱ مشبکه ها

تعریف ۱.۱.۱. [۱۰, ۱۹] یک مجموعه غیر تهی همراه با یک رابطه جزئا مرتب یک مجموعه جزئا مرتب نامیده می شود.

مثال ۲.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه دلخواه باشد. مجموعه توانی $P(X)$ که شامل همه زیر مجموعه های X است با رابطه ترتیبی شمول یک مجموعه جزئا مرتب است.

تعریف ۳.۱.۱. [۱۰, ۱۹] مشبکه L یک مجموعه جزئاً مرتب است که هر جفت از اعضایش کوچکترین کران بالا $(\vee)$ و و بزرگترین کران پایین $(\wedge)$ را دارد و آن را با $(L, \vee, \wedge)$ نمایش می دهند.

تعریف ۴.۱.۱. [۱۰]فرض کنید P یک مجموعه مرتب باشد آنگاه P یک زنجیر است اگر، برای هر $x, y \in P$ یا $x \leq y$ یا $y \leq x$ باشد.

مثال ۵.۱.۱. هر زنجیر یک مشبکه است چرا که $x \vee y = max\{x, y\}$ و $x \wedge y = min\{x, y\}$.

تعریف ۶.۱.۱. [۱۰, ۱۹] زیر مجموعه غیر تهی R از L یک زیر مشبکه از L گفته می شود اگر، $a, b \in R$ نتیجه دهد $a \wedge b, a \vee b \in R$.

مثال ۷.۱.۱. هر زیر مجموعه ی تک عضوی از یک مشبکه یک زیر مشبکه است.

تعریف ۸.۱.۱. [۱۰, ۱۹] زیر مجموعه غیر تهی I از L یک ایده آل از L گفته می شود اگر، (۱) $a, b \in I$ نتیجه دهد $a \vee b \in I$. (۲) برای هر $a, b \in L$ که $a \leq b$ و $b \in I$ نتیجه دهد که $a \in I$. مفهوم دوگان یک ایده آل فیلتر است.

مثال ۹.۱.۱. در $P(X)$ همه زیر مجموعه های متناهی ایده آل هستند.

تعریف ۱۰.۱.۱. زیر مجموعه غیر تهی G از L یک فیلتر از L گفته می شود اگر، (۱) $a, b \in G$ نتیجه دهد $a \wedge b \in G$ (۲) برای هر $a, b \in G$ که $a \geq b$ و $b \in G$ نتیجه دهد $a \in G$.

تعریف ۱.۱.۱۱. [۱۰, ۱۹] مشبکه $(L, \vee, \wedge)$ توزیع پذیر گفته می شود اگر،
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ و $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ برای هر
$x, y, z \in L$.

مثال ۱.۱.۱۲. مشبکه ی مجموعه توانی $P(X)$ توزیع پذیر است.

تعریف ۱.۱.۱۳. [۱۰, ۱۹] مشبکه $(L, \vee, \wedge)$ مدولار گفته می شود اگر، $x \leq z$ نتیجه دهد برای هر $y \in L$، $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

یادآوری ۱.۱.۱۴. مشبکه M_3 و N_5 در شکل ۱-۱ و ۱-۲ به ترتیب نشان داده شده است که مشبکه M_3 مدولار است ولی توزیع پذیر نیست زیرا با توجه به شکل ۱-۱ داریم:

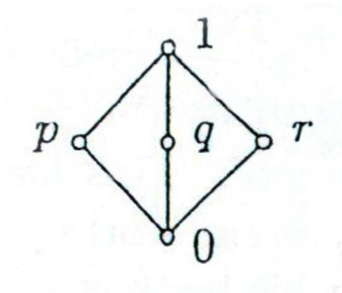
$$p \wedge (q \vee r) = p \wedge 1 = p \neq 0 = 0 \vee 0 = (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

مشبکه N_5 مدولار نیست زیرا با توجه به شکل ۱-۲ داریم:

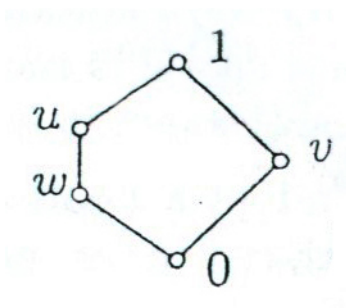
$$u \geq w \Rightarrow u \wedge (v \vee w) = u \wedge 1 = u > w = 0 \vee w = (u \wedge v) \vee w$$

از طرفی مشبکه N_5 توزیع پذیر هم نیست زیرا با توجه به شکل ۱-۲ داریم:

$$u \wedge (v \vee w) = u \wedge 1 = u \neq w = 0 \vee w = (u \wedge v) \vee (u \wedge w)$$



شکل ۱-۱ مشبکه $M_۳$



شکل ۱ - ۲ مشبکه $N_۵$

تعریف ۱۵.۱.۱. [۱۰, ۱۹] نگاشت f از مشبکه $(L_۱, \vee_۱, \wedge_۱)$ به مشبکه $(L_۲, \vee_۲, \wedge_۲)$ همریختی مشبکه ای گفته می شود اگر، $f(a \vee_۱ b) = f(a) \vee_۲ f(b)$ و $f(a \wedge_۱ b) = f(a) \wedge_۲ f(b)$ برای هر $a, b \in L_۱$. اگر این نگاشت یک به یک و پوشا باشد آنگاه یکریختی مشبکه ای نامیده می شود.

مثال ۱۶.۱.۱. نگاشت $\varphi_۳$ در شکل ۱-۳ یک همریختی مشبکه ای است زیرا به طور مثال داریم:

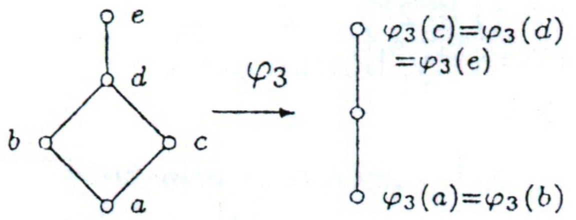
$$\varphi_۳(b \vee_۱ c) = \varphi_۳(b) \vee_۲ \varphi_۳(c)$$

$$\varphi_۳(d) = \varphi_۳(c) = \varphi_۳(d)$$

و

$$\varphi_3(b \wedge_1 c) = \varphi_3(b) \wedge_2 \varphi_3(c)$$

$$\varphi_3(a) = \varphi_3(b) = \varphi_3(a)$$



شکل ۱ - ۳

نتیجه ۱۷.۱.۱. [۱۰, ۱۹] *یک مشبکه توزیع پذیر است اگر و فقط اگر، هیچ زیر مشبکه ای یکریخت با M_3 و N_5 نداشته باشد.*

برهان. برهان رجوع شود به قضیه ۴.۱۰ مرجع شماره [۱۰]

نتیجه ۱۸.۱.۱. [۱۰, ۱۹] *یک مشبکه مدولار است اگر و فقط اگر، هیچ زیر مشبکه ای یکریخت با N_5 نداشته باشد.*

برهان. برهان رجوع شود به قضیه ۴.۱۰ مرجع شماره [۱۰]

یادآوری ۱۹.۱.۱. فرض کنید L یک مشبکه همراه با ۰ و ۱ باشد برای هر $a \in L$ گویند $b \in L$ یک متمم از a است اگر، $a \wedge b = 0$ و $a \vee b = 1$. اگر a یک متمم منحصر به فرد داشته باشد این متمم را با a' نمایش می دهند.

تعریف ۲۰.۱.۱. [۱۰] جبر بولی ساختاری مانند $(B; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ است به طوری که **(۱)** $(B; \vee, \wedge)$ یک مشبکه توزیع پذیر است. **(۲)** $a \vee 0 = a$ و $a \wedge 1 = a$ برای هر $a \in B$ **(۳)** $a \vee a' = 1$ و $a \wedge a' = 0$ برای هر $a \in B$.

تعریف ۲۱.۱.۱. [۱۰] زیر مجموعه A از جبر بولی B یک زیر جبر از B است اگر، A زیر مشبکه ای از B شامل ۰ و ۱ باشد و برای هر $a \in A$ داشته باشیم $a' \in A$.

مثال ۲۲.۱.۱. برای هر مجموعه X فرض کنید $A' = X \backslash A$ برای هر $A \subseteq X$ آنگاه ساختار $(P(X), \cup, \cap, ', \phi, X)$ یک جبر بولی است.

تعریف ۲۳.۱.۱. [۱۰] جبر $F = (F, \vee)$ همراه با یک عمل دوتایی یک نیم مشبکه است اگر، **(۱)** $a \vee a = a$ ، **(۲)** $a \vee b = b \vee a$ ، **(۳)** $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

مثال ۲۴.۱.۱. $(P(X), \cup)$ همراه با رابطه ترتیبی شمول یک نیم مشبکه است.

۲.۱ مجموعه های نرم از دیدگاه اول

تعریف ۱.۲.۱. [۱۹] فرض کنید U یک مجموعه ی متناهی غیر تهی از اشیاء باشد که جهانی نامیده می شود و E یک مجموعه ی غیر تهی باشد که پارامتر نامیده می شود. زوج مرتب (F, E) یک مجموعه ی نرم روی U نامیده می شود که F یک نگاشت از E به مجموعه ی همه ی زیر مجموعه های مجموعه ی U است. یعنی $F : E \longrightarrow P(U)$.

مثال ۲.۲.۱. [۱۴]فرض کنید:

U مجموعه ای از خانه های مورد نظر باشد.

E مجموعه ای از پارامترها. هر پارامتر یک کلمه یا یک جمله است.

$E =$ { خوب مرمت شده، مدرن، محیط سر سبز، ارزان، چوبی، زیبا، گران }.

در این حالت یک مجموعه ی نرم تعریف می کنیم که هدفش خانه های گران، زیبا و مانند آن است. مجموعه (F, E) جذابیت خانه ها را توصیف می کند.

مثالی با جزئیات بیشتر برای بحث مان در نظر می گیریم. فرض کنید ۶ خانه در جهان U وجود دارد که با $U = \{h_1, h_2, ..., h_6\}$ و $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ داده شده که:

$e_۱$ برای پارامتر "گران" به کار می رود.

$e_۲$ برای پارامتر "زیبا" به کار می رود.

$e_۳$ برای پارامتر "چوبی" به کار می رود.

$e_۴$ برای پارامتر "ارزان" به کار می رود.

$e_۵$ برای پارامتر "محیط سر سبز" به کار می رود. فرض کنید:

$$F(e_۱) = \{h_۲, h_۴\},\ F(e_۲) = \{h_۱, h_۳\},\ F(e_۳) = \{h_۳, h_۴, h_۵\},$$
$$F(e_۴) = \{h_۱, h_۳, h_۵\},\ F(e_۵) = \{h_۱\}.$$

مجموعه نرم (F, E) یک خانواده پارامتری $\{F(e_i), i = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ از زیر مجموعه های مجموعه U است و یک گردایه از توصیف تقریبی از یک شی را به ما می دهد. نگاشت F را که "خانه های (٠)" است در نظر بگیرید که نقطه (٠) با یک پارامتر $e \in E$ پر می شود بنابراین، $F(e_۱)$ یعنی "خانه های (گران)" که تابع ارزشش مجموعه $\{h_۲, h_۴\}$ است. بنابراین، می توانیم مجموعه نرم (F, E) را به صورت یک گردایه از تقریب ها به صورت زیر ببینیم:

$(F, E) = \{$ خانه های گران $= \{h_۲, h_۴\}$,

خانه های زیبا $= \{h_۱, h_۳\}$,

خانه های چوبی $= \{h_۳, h_۴, h_۵\}$,

خانه های ارزان $= \{h_۱, h_۳, h_۵\}$,

خانه های سرسبز $= \{h_۱\}\}$.

که هر تقریب دو بخش دارد:

(۱) یک پارامتر (P) و

(۲) یک تقریب مجموع ارزش V (یا به طور ساده مجموع ارزش V نامیده می شود).

برای مثال، برای تقریب ((خانه های گران=$\{h_۲, h_۴\}$)) داریم:

(۱) نام خبری اش خانه های گران است؛ و

(۲) تقریب مجموعه ارزش یا مجموعه ارزشش $\{h_2, h_4\}$ است.

بنابراین، یک مجموعه نرم (F, E) می تواند به صورت یک گردایه از تقریب های زیر نمایش داده شود. $(F, E) = \{P_1 = V_1, P_2 = V_2, ..., P_n = V_n\}$.

مجموعه همه مجموعه های نرم روی U را با $S(U)$ نمایش می دهند.

تعریف ۳.۲.۱. [۱۹] فرض کنید (F, A) و (G, B) دو مجموعه نرم روی مجموعه جهانی مشترک U باشد. گوییم (F, A) یک زیر مجموعه نرم از (G, B) است اگر، (۱) $A \subseteq B$، (۲) برای هر $e \in A$، $F(e) \subseteq G(e)$.

مثال ۴.۲.۱. فرض کنید $A = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E$ و $B = \{e_1, e_2, e_3, e_5\} \subset E$ واضح است که، $A \subset B$. فرض کنید (F, A) و (G, B) دو مجموعه نرم روی مجموعه جهانی مشترک $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ باشد به طوری که، $G(e_1) = \{h_2, h_4\}$ ، $G(e_2) = \{h_1, h_3\}$ ، $G(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$ ، $G(e_5) = \{h_1\}$ و $F(e_1) = \{h_2, h_4\}$ ، $F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$ و $F(e_2) = \{h_1\}$ بنابراین برای هر $e \in A$، $F(e) \subseteq G(e)$.

تعریف ۵.۲.۱. [۱۹] فرض کنید (F, A) و (G, B) دو مجموعه نرم روی مجموعه جهانی مشترک U باشد. اجتماع دو مجموعه نرم (F, A) و (G, B) مجموعه نرم (H, C) است که $C = A \cup B$ و H به صورت زیر تعریف می شود:

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & \forall e \in A - B \\ G(e) & \forall e \in B - A \\ F(e) \cup G(e) & \forall e \in A \cap B \end{cases}$$

مثال ۶.۲.۱. [۱۴] مجموعه نرم (F, A) که "ارزش خانه ها" را و مجموعه نرم (G, B) که "جذابیت خانه ها" را توصیف می کند در نظر بگیرید:

فرض کنید : $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, .., h_{10}\}$، { ارزان، گران، خیلی گران } = A،

{ ارزان، زیبا، محیط سرسبز} = B

فرض کنید:

$F($ خیلی گران $) = \{h_2, h_4, h_7, h_8\}$, $F($ گران $) = \{h_1, h_3, h_5\}$,

$F($ ارزان $) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$, $G($ زیبا $) = \{h_2, h_3, h_7\}$, $G($ ارزان $) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$

$G($محیط سر سبز $) = \{h_5, h_6, h_8\}$.

بنابراین:

$H($ خیلي گران $) = \{h_2, h_4, h_7, h_8\}$, $H($ گران $) = \{h_1, h_3, h_5\}$,

$H($ زیبا $) = \{h_2, h_3, h_7\}$, $H($ سر سبز $) = \{h_5, h_6, h_8\}$, $H($ ارزان $) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$

تعریف ۷.۲.۱. [۱۹] فرض کنید (F, A) و (G, B) دو مجموعه نرم روي مجموعه جهاني مشترك U باشد. به طوري كه $A \cap B \neq \phi$. اشتراك (F, A) و (G, B) مجموعه نرم (H, C) است كه $C = A \cap B$ و $H(e) = F(e) \cap G(e)$ براي هر $e \in C$.

مثال ۸.۲.۱. اشتراك دو مجموعه نرم (F, A) و (G, B) مجموعه نرم (H, C) است كه $C = A \cap B$ بنابراين در مثال قبل $C = \{$ ارزان $\}$ و $H($ ارزان $) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$.

تعریف ۹.۲.۱. [۱۹] فرض کنید (F, A) و (G, B) دو مجموعه نرم روي مجموعه جهاني مشترك U باشد. آنگاه $(F, A)\ AND\ (G, B)$ با $(F, A) \wedge (G, B)$ نمايش داده مي شود و به صورت $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ تعريف مي شود كه $H((\alpha, \beta)) = F(\alpha) \cap G(\beta)$ براي هر $(\alpha, \beta) \in A \times B$.

مثال ۱۰.۲.۱. مجموعه نرم (F, A) که "ارزش خانه ها" را و مجموعه نرم (G, B) که "جذابیت خانه ها" را توصیف می کند در نظر بگیرید:

فرض کنید : $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, ..., h_{10}\}$، $A = \{$ ارزان ، گران ، خیلی گران $\}$ و $B = \{$ ارزان ، محیط سر سبز ، زیبا $\}$.

با توجه به مثال ۶.۲.۱ داریم: $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ که،

$H($ خیلی گران ، زیبا $) = \{h_۲, h_۷\},$

$H($ خیلی گران ، محیط سرسبز $) = \{h_۸\},$

$H($ خیلی گران ، ارزان $) = \phi,$

$H($ گران ، زیبا $) = \{h_۳\},$

$H($ گران ، محیط سرسبز $) = \{h_۵\},$

$H($ گران ، ارزان $) = \phi,$

$H($ ارزان ، زیبا $) = \phi,$

$H($ ارزان ، محیط سرسبز $) = \{h_۶\},$

$H($ ارزان ، ارزان $) = \{h_۶, h_۹, h_{۱۰}\}.$

تعریف ۱۱.۲.۱. [۱۹] فرض کنید (F, A) و (G, B) دو مجموعه نرم روی مجموعه جهانی مشترک U باشد. آنگاه $(F, A)\ OR\ (G, B)$ با $(F, A) \vee (G, B)$ نمایش داده می شود و به صورت $(F, A) \vee (G, B) = (H, A \times B)$ تعریف می شود که، $H((\alpha, \beta)) = F(\alpha) \cup G(\beta)$ برای هر $(\alpha, \beta) \in A \times B$.

مثال ۱۲.۲.۱. مثال ۶.۲.۱ را در نظر بگیرید داریم: $(F, A) \vee (G, B) = (H, A \times B)$ که،

$H($ خیلی گران ، زیبا $) = \{h_۲, h_۳, h_۴, h_۷, h_۸\},$

$H($ خیلی گران ، محیط سرسبز $) = \{h_۲, h_۴, h_۵, h_۶, h_۷, h_۸\},$

$H($ خیلی گران ، ارزان $) = \{h_۲, h_۴, h_۶, h_۷, h_۸, h_۹, h_{۱۰}\},$

$H($ گران ، زیبا $) = \{h_۱, h_۲, h_۳, h_۵, h_۷\},$

$H($ گران ، محیط سرسبز $) = \{h_۱, h_۳, h_۵, h_۶, h_۸\},$

$H($ گران ، ارزان $) = \{h_۱, h_۳, h_۵, h_۶, h_۹, h_{۱۰}\},$

$H($ ارزان ، زیبا $) = \{h_۲, h_۳, h_۶, h_۷, h_۹, h_{۱۰}\},$

$H($ ارزان ، محیط سرسبز $) = \{h_۵, h_۶, h_۸, h_۹, h_{۱۰}\},$

$H($ ارزان ، ارزان $) = \{h_6, h_9, h_{10}\}.$

تعریف ۱.۲.۱۳. [۱۹] فرض کنید (F,A) یک مجموعه نرم روی U باشد آنگاه متمم (F,A) برای هر $e \in A$، به صورت $F^c(e) = U - F(e)$ تعریف می شود و با (F^c, A) نمایش داده می شود.

مثال ۱.۲.۱۴. مثال ۱.۲.۲ را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
(F^c, A) = \{\text{خانه هایی که گران نیست} &= \{h_1, h_3, h_5, h_6\},\\
\text{خانه هایی که زیبا نیست} &= \{h_2, h_4, h_5, h_6\},\\
\text{خانه هایی که چوبی نیست} &= \{h_1, h_2, h_6\},\\
\text{خانه هایی که ارزان نیست} &= \{h_2, h_4, h_6\},\\
\text{خانه هایی که سرسبز نیست} &= \{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}\}.
\end{aligned}
$$

تعریف ۱.۲.۱۵. [۱۹] مجموعه نرم (F,A) یک مجموعه نرم پوچ روی U گفته می شود اگر، برای هر $e \in A$، $F(e) = \phi$ و با Φ نمایش داده می شود.

مثال ۱.۲.۱۶. فرض کنید:

U مجموعه ای از خانه های چوبی مورد نظر باشد.

A مجموعه ای از پارامترها.

فرض کنید ۵ خانه در جهان U وجود دارد که داده شده با: $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ و $A = \{$ آجری ، گلی ، فولادی ، سنگی $\}$ مجموعه نرم (F,A) "ساختمان خانه ها" را توصیف می کند که به صورت زیر تعریف می شود.

$F($آجری$)$ یعنی خانه هایی که از آجر ساخته شده باشد، $F($گلی$)$ یعنی خانه هایی که از گل ساخته شده باشد، F (فولادی) یعنی خانه هایی که از فولاد ساخته شده باشد و $F($سنگی$)$ یعنی خانه هایی که از سنگ ساخته شده باشد.