بسمه تعالی .

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی دانشجویان .

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان رساله/پایان نامه: برآورد ناپارامتری تابع چگالی دومتغیره

نام نویسنده: مهدی امیری

نام استاد(ان) راهنما: دکتر حسن دوستی

نام استاد(ان) مشاور: دکتر مهدی عمادی

دانشکده : علوم ریاضی	**گروه: آمار**	**رشته تحصیلی: آمار ریاضی**
تاریخ تصویب: ۱۳۸۷/۱۲/۶		**تاریخ دفاع: ۱۳۸۸/۶/۱۵**
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد ●	**دکتری ○**	**تعداد صفحات: ۱۱۸**

چکیده رساله/پایان نامه : در این پایان‌نامه برآورد ناپارامتری تابع چگالی دو متغیره براساس مجموعه داده‌هایی از توزیع توأم و نیز مجموعه داده‌هایی از توزیع‌های حاشیه‌ای را بدست می آوریم. روش پایه مفصل را توسعه می‌دهیم که دارای ویژگی‌های مناسبی، حتی زمانیکه داده‌های حاشیه‌ای نیز موجود نباشند، می‌باشد. برای مثال هنگامی که تابع چگالی مفصل به اندازه‌ی کافی هموار باشد یا توزیع‌های حاشیه‌ای تقریباً مستقل باشند، روش پایه‌ی مفصل نرخ همگرایی مناسبی را نتیجه می‌دهد. برای برآورد تابع چگالی توأم از برآوردگر موجکی تابع چگالی مفصل استفاده می‌کنیم که در بسیاری از زمینه‌های مورد علاقه‌ی آماری می‌تواند در مرزها نامتناهی باشد. همچنین برآوردگر موجکی تابع رگرسیون تصادفی را معرفی می‌کنیم.

از روش آستانه‌سازی موجکی برای برآورد احتمال‌های چندجمله‌ای بهره می‌گیریم. از نتایج این برآوردگر، سازگاری با پراکندگی یا ناهمواری در داده‌ها است. رفتار مجانبی این برآوردگر را با استفاده از معیار پرکاربرد MSSE بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که MSSE این برآوردگر دارای نرخ بهینه‌ی همگرایی است.

کلید واژه:

۱. مفصل

۲. موجک

۳. آستانه‌سازی

۴. داده های رسته‌ای

۵. جدول توافقی

امضای استاد راهنما:

تاریخ:

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

عنوان

برآورد ناپارامتری تابع چگالی دومتغیره

استاد راهنما

جناب آقای دکتر حسن دوستی

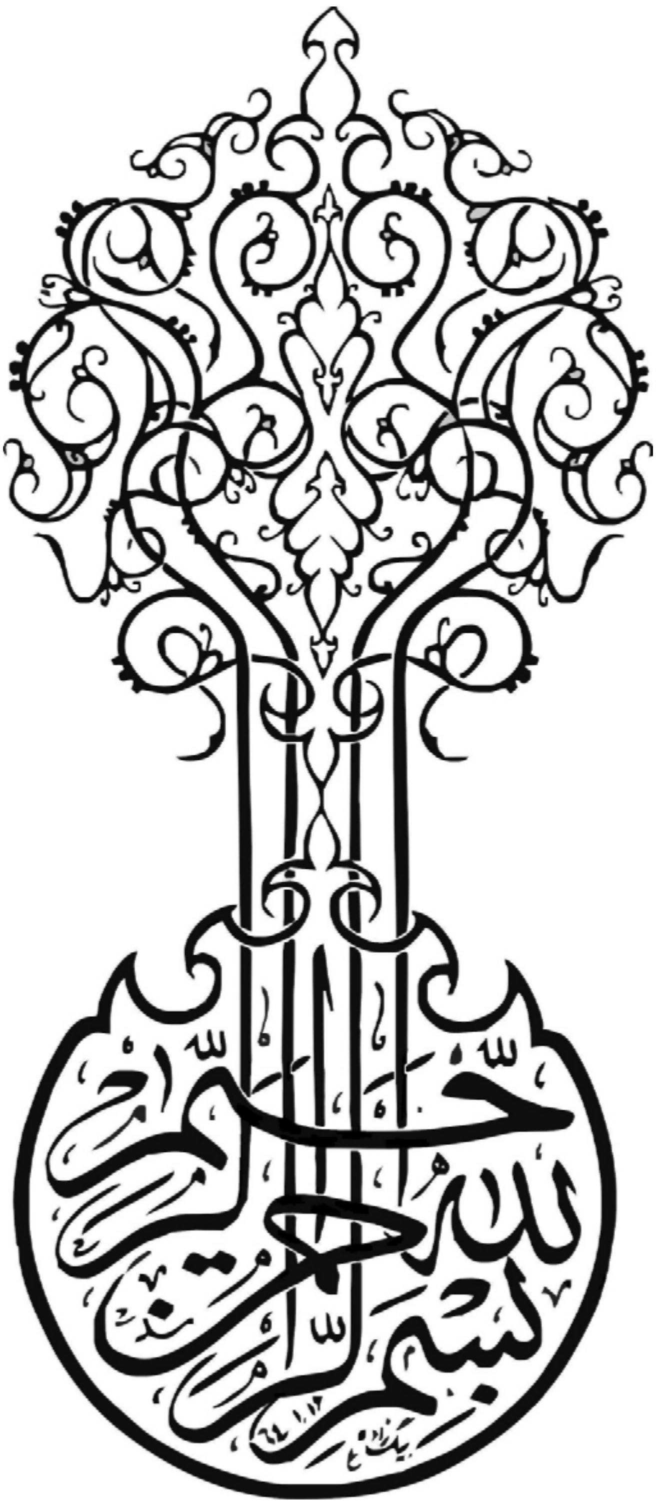
استاد مشاور

جناب آقای دکتر مهدی عمادی

نگارش

مهدی امیری

تابستان ۱۳۸۸


بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی .

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی دانشجویان .

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان رساله/پایان نامه: برآورد ناپارامتری تابع چگالی دومتغیره

نام نویسنده: مهدی امیری

نام استاد(ان) راهنما: دکتر حسن دوستی

نام استاد(ان) مشاور: دکتر مهدی عمادی

دانشکده : علوم ریاضی	گروه: آمار	رشته تحصیلی: آمار ریاضی
تاریخ تصویب: ۱۳۸۷/۱۲/۶		تاریخ دفاع: ۱۳۸۸/۶/۱۵
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد ●	دکتری ○	تعداد صفحات: ۱۱۸

چکیده رساله/پایان نامه : در این پایان‌نامه برآورد ناپارامتری تابع چگالی دو متغیره براساس مجموعه داده‌هایی از توزیع توأم و نیز مجموعه داده‌هایی از توزیع‌های حاشیه‌ای را بدست می آوریم. روش پایه مفصل را توسعه می‌دهیم که دارای ویژگی‌های مناسبی، حتی زمانیکه داده‌های حاشیه‌ای نیز موجود نباشند، می‌باشد. برای مثال هنگامی که تابع چگالی مفصل به اندازه‌ی کافی هموار باشد یا توزیع‌های حاشیه‌ای تقریباً مستقل باشند، روش پایه‌ی مفصل نرخ همگرایی مناسبی را نتیجه می‌دهد. برای برآورد تابع چگالی توأم از برآوردگر موجکی تابع چگالی مفصل استفاده می‌کنیم که در بسیاری از زمینه‌های مورد علاقه‌ی آماری می‌تواند در مرزها نامتناهی باشد. همچنین برآوردگر موجکی تابع رگرسیون تصادفی را معرفی می‌کنیم.

از روش آستانه‌سازی موجکی برای برآورد احتمال‌های چندجمله‌ای بهره می‌گیریم. از نتایج این برآوردگر، سازگاری با پراکندگی یا ناهمواری در داده‌ها است. رفتار مجانبی این برآوردگر را با استفاده از معیار پرکاربرد MSSE بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که MSSE این برآوردگر دارای نرخ بهینه‌ی همگرایی است.

کلید واژه: ۱. مفصل ۲. موجک ۳. آستانه‌سازی ۴. داده های رسته‌ای ۵. جدول توافقی	امضای استاد راهنما: تاریخ:

بسمه تعالي

Graduate Studies Thesis\Dissertation Information
Ferdowsi University of Mashhad

Title of Thesis\Dissertation: Nonparametric Bivariate Density Estimation

Author: Mehdi Amiri
Supervisor(s): Dr. Hasan Doosti
Advisor(s):Dr.mehdi Emadi

Faculty: School of Mathematical Sciences	**Department: Department of Statistics**	**Specialization: Mathematical Statistics**

Approval Date: Sep 6, 2009	**Defence Date:Feb24,2009**
M.Sc. ● **Ph.D.** ○	**Number of Pages:118**

Abstract:

In this thesis,we estimate a bivariate density nonparametrically from a dataset from the joint distribution and datasets from one or both marginal distributions.
We develop a copula-based solution, which has potential benefits even when the marginal datasets are empty.For example, if the copula density is sufficiently smooth in the region where we wish to estimate it, the joint density can be estimated with a high degree of accuracy. Similar improvements in performance are available if the marginals are close to being independent. We use wavelet estimators to approximate the copula density, which in cases of statistical interest can be unbounded along boundaries. We propose a wavelet estimator for regression function with random design.
we introduce a wavelet threshold estimator to estimate multinomial probabilities. The advantages of the estimator are its adaptability to the roughness and sparseness of the data. The asymptotic behavior of the estimator is investigated through an often-used criteria: the mean sum of squared error (MSSE). We show that the MSSE of the estimator achieves the optimal rate of convergence.

Signature of Supervisor: **Date:**	**Key Words:** **1. Copula** **2.Wavelet** **3. Thresholding** **4. Cayegorical data** **5. Contingency table**

تقدیم به ساحت مقدس علی ابن موسی الرضا(ع)

پدر و مادر مهربان و بزرگوارم

و هر آنکه در راه علم تلاش می کند

تشکر و قدردانی

سپاس مخصوص خدایی است که ستایشگران نمی‌توانند حق سپاسش را ادا کنند و حسابگران از شمارش نعمت‌های بی پایانش عاجزند و تلاشگران در ادا کردن حقش فرو مانند. خدایی که افکار بلند، به قله عظمتش دست نیابند و افراد ژرف نگر، به عمق ذاتش پی نبرند. سپاس می‌گویم او را که به من توفیق اتمام دوره‌ای دیگر از تحصیلاتم را عنایت فرمود و اگر فضل او نبود، هرگز موفق به انجام این مهم نمی‌شدم.

سپاس و تقدیر بی پایان خود را تقدیم استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر حسن دوستی می‌نمایم که راهنمایی‌های ارزنده و مساعدت‌های بی دریغ ایشان، کلید موفقیت من در انجام این رساله بوده است. همچنین سپاس و قدردانی خود را به اساتید محترم، جناب آقای دکتر حسینعلی نیرومند و سرکارخانم دکتر نرگس حسینیون که زحمت داوری این پایان نامه را داشته و مرا از نظرات عالمانه خود بهره‌مند کرده‌اند و جناب آقای دکتر مهدی عمادی که مشاوره اینجانب را به عهده داشتند، تقدیم می‌نمایم.

از تمام مسئولین و کارکنان محترم دانشکده، اداره آموزش، گروه محترم آمار و بخش کتابخانه کمال تشکر را دارم. همچنین بر خود لازم می‌دانم که از خانواده عزیزم، به ویژه پدر و مادر مهربانم که در تمامی سال‌های تحصیل همواره پشتیبان و یاریگر من بوده‌اند، سپاس‌گزاری نمایم. همین طور از دوستان گرامی، آقایان علی دست برآورده، امیر شاهینی که به بنده در انجام این رساله کمک کرده‌اند و آقای محمد شیرازیان که از راهنمایی‌های ایشان در نگارش پایان نامه کمال استفاده را برده‌ام، تشکر می‌نمایم.

از خداوند متعال برای تمامی این عزیزان، سلامتی و توفیق روزافزون را خواستارم.

مهدی امیری

شهریورماه ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

پیشگفتار

نظریه‌ی موجک‌ها شاخه‌ای از تحلیل هارمونیک و از پدیده‌های جدید علم ریاضی است که کاربردهای زیادی در ریاضیات و مخابرات و سایر علوم دارد. این نظریه علی رغم عمر کوتاه خود، به سرعت رشد کرده و تقریباً در هر زمینه‌ای که تحلیل فوریه حضور داشته، به رقابت با آن برخاسته است. مهم‌ترین عرصه‌ی این رقابت در فشرده سازی و مخابره‌ی علائم و تصاویر است. ابزار مورد نیاز برای این هدف‌ها تبدیل‌های موجکی است.

اخیراً موضوع تحلیل موجکی مورد توجه زیاد ریاضی‌دانان و مهندسان قرار گرفته است. برخی به آن به عنوان پایه‌ای جدید برای نمایش توابع می‌نگرند و عده‌ای آن را به عنوان تکنیکی برای تحلیل زمان بسامدی به حساب می آورند و گروهی نیز آن را شاخه‌ی جدیدی از ریاضیات می دانند.

یکی از مهم‌ترین کاربردهای موجک‌ها در پردازش و انتقال اطلاعات، خصوصاً فشرده‌سازی تصاویر است. برای این کار تاکنون از تبدیل‌های فوریه استفاده می‌شده ولی در حال حاضر تبدیل‌های موجکی در حال رقابت با آن‌ها هستند و حتی در مواردی نظیر انگشت نگاری، برتری خود را نشان داده اند. همچنین علی رغم اینکه بیش از یک دهه از ورود موجک‌ها در علم آمار نمی گذرد، نتایج تئوری و عملی ارزشمندی پیرامون نقش موجک‌ها در تحقیقات آماری به چاپ رسیده است.

موجک‌ها بنا به خواص متعددشان در تحقیقات آماری مورد توجه ویژه قرار گرفته اند. اولین بار موجک‌ها را دونوهو و جانستون در سال ۱۹۹۲ در تحقیقات آماری بکار بردند. در چند سال اخیر کتاب‌ها و مقالات متعددی که در زمینه کاربرد موجک‌ها در شاخه‌های مختلف آمار به چاپ رسیده است که اهمیت موضوع را نشان می دهد.

مطالب این پایان‌نامه در ۴ فصل گردآوری شده است.

فصل اول مربوط به پیش‌نیازهاست و به یادآوری مفاهیمی از موجک، نحوه‌ی پیدایش آن ها و مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های آتی اختصاص دارد.

در فصل دوم بطور مختصر به معرفی روش‌های برآورد تابع چگالی می‌پردازیم. عمده‌ی مطالب این فصل به معرفی و مرور مفاهیمی از برآورد تابع چگالی به‌روش موجک اختصاص دارد. همچنین بطور مختصر به بررسی ساختار کوواریانس ضرایب تجربی موجک هار می‌پردازیم.

در فصل سوم ابتدا به معرفی مفصل‌ها می‌پردازیم. سپس از برآورد موجکی تابع چگالی مفصل برای برآورد تابع چگالی توأم استفاده می‌کنیم. همچنین یک کران خطا برای برآوردگر تابع چگالی مفصل بدست می‌آوریم و از برآورد تابع چگالی توأم برای برآورد تابع رگرسیون تصادفی بهره می‌گیریم.

در فصل چهارم ابتدا بطور مختصر به یادآوری مفاهیم و مقدماتی از داده‌های رسته‌ای و توزیع‌های چندجمله‌ای می‌پردازیم. سپس با استفاده از ایده‌ی برآورد موجکی تابع چگالی برای برآورد احتمال‌های چندجمله‌ای در جدول‌های توافقی می‌پردازیم. یک کران خطا برای برآوردگر احتمال‌های چندجمله‌ای بدست می‌آوریم. همچنین به مقایسه‌ی روش برآورد احتمال‌های چندجمله‌ای و برآورد تابع چگالی می‌پردازیم.

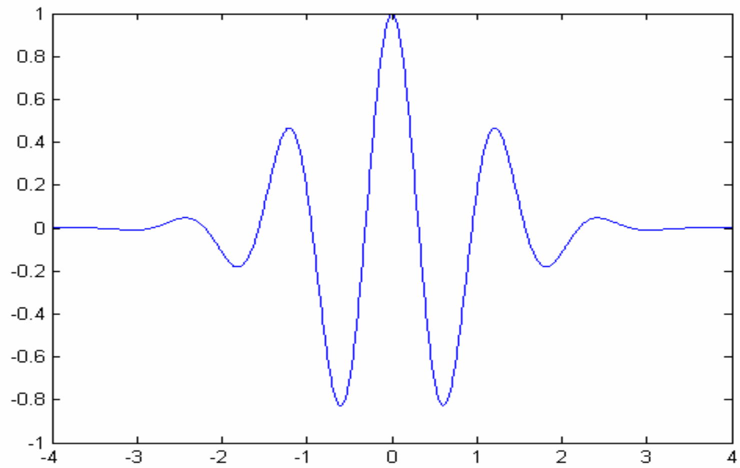
مواردی مانند اثبات قضیه و لم که صورت آن‌ها موجود بوده و فقط اثبات آن‌ها در این پایان‌نامه انجام شده را با علامت * و مواردی که در این پایان‌نامه معرفی شده است با علامت ** مشخص گردیده است.

فصل اول

مختصری درباره‌ی موجک‌ها

۱-۱ مقدمه

در این فصل بطور مختصر تاریخچه‌ی موجک‌ها، خواص موجک‌ها و پایه‌های موجکی، نحوه‌ی تولید پایه‌های موجکی، توابع موجکی و روابط بین آن‌ها و قضایای مهم مربوط به موجک‌ها را بیان می‌کنیم. در این فصل سعی شده است، مطالبی برای کسانی که علاقه‌مند به تحقیق در زمینه‌ی کاربرد موجک‌ها در آمار هستند، گنجانیده شود که پس از مطالعه‌ی این فصل، اطلاعات کافی حاصل شود. اصطلاح موجک‌ها نخستین بار در ژئوفیزیک توسط مارلت[۱] و همکاران (۱۹۸۴) بکار گرفته شد و اولین موجک توسط آن‌ها ساخته شد.



شکل ۱-۱ نمودارنخستین موجک ساخته شده توسط مارلت

موجک‌ها ابزاری هستند که نوسان می‌کنند و به‌سرعت کاهش می‌یابند. از این رو موجک (موج کوچک) نامیده می‌شوند و ابزاری قابل انعطاف با محتوای غنی ریاضی و توانایی سطح بالای کاربردی هستند و برای تجزیه و تحلیل یک تابع نوسانی از زمان یا مکان که موج[۲] نامیده می‌شود، بکار می‌روند. تحلیل فوریه نیز تحلیل موج است که در آن سیگنال بر حسب موج‌های سینوسی با فرکانس‌های مختلف بسط داده می‌شود. استفاده از بسط فوریه برای توابع با سیگنال‌های گذرا که روی بخش بزرگی از دامنه‌ی خود صفر هستند، مناسب نمی‌باشد؛ زیرا تعداد زیادی از مؤلفه‌های فوریه (موج‌های سینوسی) لازم است تا بتوان یک ناپیوستگی را نمایش داد. موجک‌ها برای تحلیل پدیده‌های گذرا یا توابعی که در بعضی زمان‌ها تغییرات سریع یا تند دارند، مناسب‌تر می‌باشند؛ زیرا

[1] Morlet
[2] wave

موجکها بر خلاف موجهای سینوسی، دورهی محدود دارند و سیگنالهای با تغییرات تند یا سریع را بهتر تحلیل میکنند. پس از معرفی موجکها، برتری آن نسبت به روش فوریه را در چند مورد بیان میکنیم.

این ابزار ریاضی جدید و قدرتمند در در تحقیقات آمار و احتمال نیز مورد توجه ویژه قرار گرفته است. نخستین بار موجکها در آمار توسط دونوهو و جانستون[3] (1992) استفاده شد. در دههی گذشته متون بسیاری دربارهی نقش موجکها در آمار به رشته تحریر در آمده است. در این میان میتوان به کتابهای والتر[4] (۱۹۹۴)، ویداکوویک[5] (۱۹۹۹)، آنتونیادیس و اوپنهایم[6] (۱۹۹۵)، اوگدن[7] (۱۹۹۷)، وورنل[8] (۱۹۹۶)، پرسیوال و والدن[9] (۲۰۰۰)، هاردل[10] و همکاران (۱۹۹۸) و نیسون[11] (۲۰۰۶) اشاره نمود که تحقیقات جامعی پیرامون نقش موجکها در آمار را ارائه کردهاند. با توجه به قدرتمندی این ابزار ریاضی و کاربردهای گوناگون آن در شاخههای گوناگون آمار و احتمال، مقالات بسیار متنوعی در مجلات مختلف میتوان یافت.

۱-۲ فضاهای برداری، تعاریف

یک فضای برداری حقیقی، مجموعهای از بردارها به همراه دو عمل جمع برداری و ضرب عدد در بردار است. $\mathbb{R}^1$، فضای یک بعدی و متناظر با یک خط راست است. $\mathbb{R}^2$ فضای معمولی $X-Y$ را نشان میدهد. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ متشکل از بردارهای ستونی با nمؤلفه است که مؤلفههای آن اعداد حقیقی هستند.

تعریف ۱-۲-۱ زیرفضای برداری، زیرمجموعهای از فضای برداری است که تحت جمع برداری و ضرب اسکالر دو بردار بسته باشد، یعنی فضا را بهوجود آورد.

---

[3] Donoho & Johnstone
[4] Walter
[5] Vidakovic
[6] Antoniadis & Oppeinheim
[7] Ogden
[8] Wornel
[9] Persival & Walden
[10] Haardle
[11] Nason

تعریف ۱-۲-۲ گوییم تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ متعلق به فضای $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}\right)$ است اگر

$$\int\left|f\left(x\right)\right|^2 dx<\infty$$

در این فضا ضرب داخلی و نرم بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$<f\ ,\ g>=\int_R f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}\ dx$$

$$\left\|f\right\|_2=\sqrt{\int\left|f\left(x\right)\right|^2 dx}$$

و بطور کلی به‌ازای $p>0$ فضای $\mathbf{L}^p\left(\mathbb{R}\right)$ را با

$$\mathbf{L}^p\left(\mathbb{R}\right)=\left\{f\in\mathbb{R}\to\mathbb{C}\middle|\ \int_{\mathbb{R}}\left|f\left(x\right)\right|^p dx<\infty\right\}$$

و نرم روی این فضا را با $\left\|f\right\|_p=\left(\int\left|f\left(x\right)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۲-۳ فضای $\mathbf{L}^\infty\left(\mathbb{R}\right)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{L}^\infty\left(\mathbb{R}\right)=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\middle|\quad ess\sup\left|f\right|<\infty\right\}$$

که $ess\sup\left|f\right|=\inf\left\{\alpha\middle|\ \left|f\right|<\alpha\quad a.e\right\}$.

تعریف ۱-۲-۴ مجموعه‌ی توابع $\left\{\varphi_k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ را یک دستگاه یکامتعامد[12] (ONS) می‌نامند هرگاه

$$\left\langle\varphi_{k_1}\ ,\ \varphi_{k_2}\right\rangle=\delta_{k_1,k_2}$$

که $\delta_{m,n}$ دلتای کرونکر[13] نامیده می‌شود و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_{m,n}=\begin{cases}1 & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}.$$

[12] orthonormal system

[13] kroneker

تعریف ۱-۲-۵ یک ONS مانند $\left\{\varphi_k \ , k\in\mathbb{Z}\right\}$ یک پایه‌ی یکا متعامد[14] (ONB) برای زیرفضای $\mathbf{V}$ از فضای $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}\right)$ گفته می‌شود، اگر هرتابع $f\in\mathbf{V}$ نمایشی به فرم زیر داشته باشد:

$$f\left(x\right)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k\ \varphi_k\left(x\right)$$

بطوری‌که $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|a_k\right|^2<\infty$.

تعریف ۱-۲-۶ تکیه‌گاه تابع f را با $Supp\ f$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Supp\ f=\left\{x:f\left(x\right)\neq 0\right\}$$

۱-۳ موجک

ساده‌ترین پایه‌ی موجکی توسط آلفرد هار[15] (۱۹۱۰) ساخته شد. او نشان داد که هر تابع پیوسته روی بازه‌ی $\left[0\ ,\ 1\right]$ را می‌توان با

$$f_n\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}\langle\phi_i,f\rangle\ \phi_i\left(x\right)$$

تقریب زد که توابع ϕ_i به‌ازای $0\leq k\leq 2^j-1$ ، $j\geq 0$ و $n=2^j+k$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_0\left(x\right)=I\left(0\leq x\leq 1\right)$$

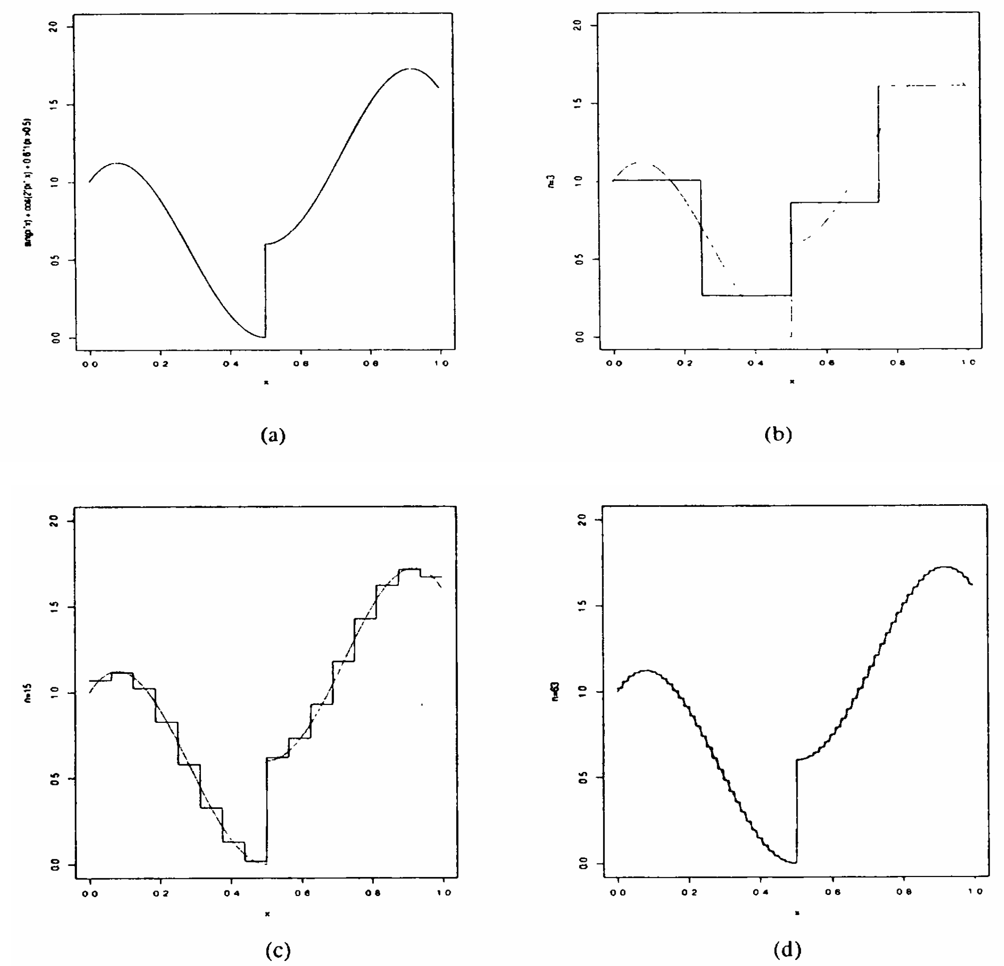
$$\phi_1\left(x\right)=I\left(0\leq x\leq\frac{1}{2}\right)-I\left(\frac{1}{2}<x\leq 1\right)$$

$$\phi_j\left(x\right)=2^{\frac{j}{2}}\phi_1\left(2^jx-k\right)$$

او همچنین نشان داد $f_n\xrightarrow{u.c}f$.

[14] Orthonormal basis
[15] Alfred Haar

نمودار تابع $f(x)=\sin(\pi x)+\cos(2\pi x)+0/6\,I\left(x>1/2\right)$ برای $x\in[0\ ,\ 1]$ و سه تقریب f_{3}, f_{15}, f_{63} از این تابع در شکل ۱–۲ نشان داده شده است. این نمودارها گویای ساختار پله‌ای تقریب هار می‌باشند.



شکل ۱–۲ (**a**) نمودار تابع f (**b**) تقریب f_{3} (**c**) تقریب f_{15} (**d**) تقریب f_{63}

اولین تعریف موجک را مارلت و همکاران (۱۹۸۴) بصورت زیر ارائه دادند:

تعریف ۱–۳–۱ موجک به تابع ψ از فضای $\mathbf{L}^{2}(\mathbb{R})$ گفته می‌شود که تبدیل فوریه‌ی آن، Ψ ، به‌ازای تقریباً همه مقادیر ω ، در رابطه‌ی

$$\int_{0}^{\infty}\left|\Psi(t\omega)\right|^{2}\frac{dt}{t}=1$$

صدق کند. اما اخیراً موجک به تابع ψ از فضای $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ گفته می‌شود که تبدیلات مکان و مقیاس آن بصورت زیر تشکیل یک پایه‌ی یکامتعامد برای فضای $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ دهد.

$$\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\psi\left(2^j x - k\right) \quad , j,k \in \mathbb{Z}$$

موجک‌ها توابع پایه‌ی یکامتعامد با ویژگی‌های مناسبی هستند که تبدیلات مکان و مقیاس تابع موجک مادر ψ می‌باشند.

تعریف ۱-۳-۲ برای مقادیر صحیح غیر منفی m، موجک مادر را از مرتبه‌ی m می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

الف. اگر $m = 0$ آن‌گاه $\psi(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ و هرگاه $m \geq 1$ آن‌گاه تابع ψ و مشتق‌های آن تا مرتبه‌ی m متعلق به $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ باشند.

ب. ψ و تمام مشتق‌های آن تا مرتبه‌ی m وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند، سریعاً نزولی باشند.

ج. برای $0 \leq k \leq m$ داشته باشیم $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x)\,dx = 0$.

د. مجموعه‌ی توابع $\left\{\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi\left(2^j x - k\right) \quad j,k \in \mathbb{Z}\right\}$ یک پایه‌ی یکامتعامد برای $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ باشد.

تابع $\psi_{j,k}$ به‌ازای هر $j,k \in \mathbb{Z}$ یک موجک نامیده می‌شود.

شرط الف بیانگر نظم موجک، شرط ب نشان دهنده‌ی کران موضعی و نوسان‌داری موجک و شرط ج خاصیت گشتاور صفر موجک نام دارد.

موجک‌های مادر بسیاری وجود دارند که از آن جمله می‌توان موجک هار، شانون، دوباشی، لیتل‌وود- پالی، و می‌یر را نام برد. تمام این نوع موجک‌ها در [۴۶] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. برای جزئیات بیشتر و توصیف ریاضی موجک‌ها می‌توان به [۳۱] و [۵] مراجعه کرد.

۱-۴ تحلیل چند ریزگی

تحلیل چند ریزگی یک روش عمومی برای ساختن پایه‌ی یکامتعامد موجک‌ها است. در این قسمت بطور مختصر به معرفی این مفهوم می‌پردازیم. تحلیل چند ریزگی را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد:

تعریف ۱-۴-۱ یک تحلیل چند ریزگی شامل یک خانواده از زیرفضاهای بسته‌ی $\mathbf{V}_j \in \mathbf{L}^{۲}\left(\mathbb{R}\right)$، $j \in \mathbb{Z}$ است بطوری‌که

$$\ldots \subset \mathbf{V}_{-۲} \subset \mathbf{V}_{-۱} \subset \mathbf{V}_{۰} \subset \mathbf{V}_{۱} \subset \mathbf{V}_{۲} \subset \ldots \qquad (۱.۱)$$

$$\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{V}_j} = \mathbf{L}^{۲}\left(\mathbb{R}\right) \quad , \quad \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{V}_j = \left\{۰\right\} \qquad (۲.۱)$$

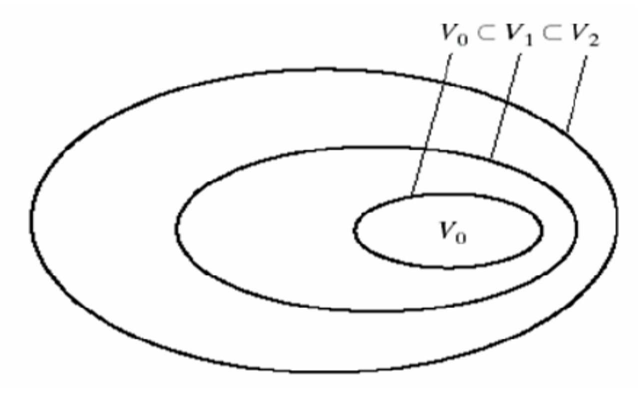
$$\mathbf{V}_j = \left\{h\left(x\right) = f\left(۲^j x\right) \quad , f \in V_{۰}\right\} \qquad (۳.۱)$$

به‌علاوه یک تابع مقیاس $\phi \in \mathbf{V}_{۰}$ وجود داشته باشد بطوری‌که $\left\{\phi\left(x-k\right) \ ,k \in \mathbb{Z}\right\}$، یک پایه‌ی یکامتعامد برای $\mathbf{V}_{۰}$ تشکیل دهد. تابع ϕ را موجک پدر می‌نامیم که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(x\right) \ dx = ۱.$$

از شرایط(۱. ۱)، (۱. ۲) و (۱. ۳) نتیجه می‌شود که $\left\{\phi_{j,k}\left(.\right) \ ,k \in \mathbb{Z}\right\}$ تشکیل یک پایه‌ی یکا متعامد برای $\mathbf{V}_j$ می‌دهد که اعضای این پایه بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_{j,k} = ۲^{\frac{j}{۲}} \phi\left(۲^j x - k\right)$$



شکل ۱-۳ نمایش فضاهای لانه‌ای $\mathbf{V}_j$