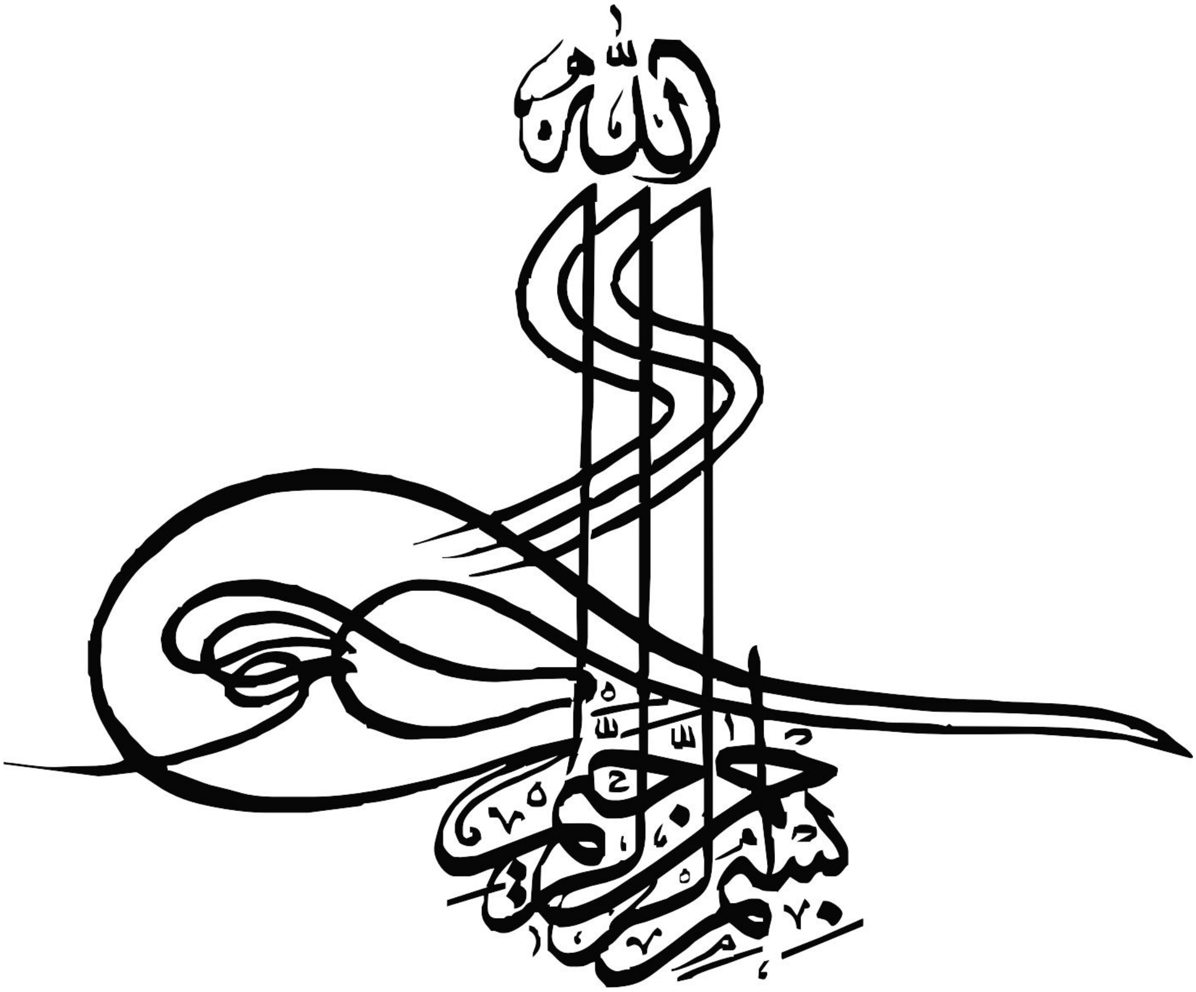
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان :

تعمیم خواصی از جبرهای باناخ به جبرهای بنیادی

از:

زهرا اسلامی میاندهی

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل انصاری پیری

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به دو وجود مقدس

که ناتوان شدند تا من به توانایی برسم

موهایشان سپید شد تا من رو سفید شوم

و عاشقانه سوختند تا گرما بخش وجودم و روشنگر راهم باشند

پدرم و مادرم

با تقدیر و تشکر شایسته از

استاد فرهیخته جناب آقای دکتر اسماعیل انصاری که با نکته های دلاویز و گفته های بلند، صحیفه های سخن را علم پرور نمودند و همواره راهنما و راه گشای من در اتمام این پایان نامه بودند.

همچنین از داوران گرامی جناب آقای دکتر حسین سهله و دکتر عباس سهله که داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند سپاسگذارم.

فهرست مطالب

چکیده:

تعمیم خواصی از جبرهای باناخ به جبرهای بنیادی

زهرا اسلامی میاندهی

در این پایان نامه، هدف ما تعمیم " قضیه گلسن ، خان ـ زلازکو " برای جبرهای بنیادی موضعا ضربی است. برای این منظور، ابتدا فضای دوگان جبرهای توپولوژیکی بنیادی موضعا ضربی را مورد مطالعه قرار می دهیم.سپس نتایجی را برای تابعک های خطی و خطی ضربی، روی این جبرها بدست می آوریم. و با بررسی موضعا فشردگی فضای حامل از جبرهای بنیادی موضعا ضربی این پایان نامه را به اتمام می رسانیم..

کلید واژه:
تابعک های خطی و ضربی ، جبرهای توپولوژیکی بنیادی موضعا ضربی ، فضای حامل .

Abstract:

An extetion of some poropertise of Banach algebras to fundamental algebras

Zahra Eslami Miandehi

In this dissertation, we aim to extend the "Gleason, Kahane - Zelazko Theorem" for fundamental locally multiplicative topological algebras. To achieve this, we study the dual space of fundamental locally multiplicative topological algebras and prove some resulte for linear and multiplicative linear functionals on these algebras. An investigation on locally compactness of the carrier space of fundamental locally multiplicative topological algebras is the last part of this dissertation.

Key words:
Multiplicative linear functionals , fundamental locally multiplicative topological algebras , carrier space.

J پیشگفتار:

یکی از مسائل مهم در ریاضیات بحث مربوط به تجزیه چندجمله‌ای ها می‌باشد. خانواده چندجمله‌ای ها تشکیل یک جبر می‌دهند بنابراین ریاضی‌دانان پا را فراتر قرار داده و تجزیه را به جبرها توسیع دادند. برای اولین بار کهن در سال ۱۹۵۹ نشان داد اعضای جبرهای توپولوژیکی که نرمدار و کامل هستند تحت شرایطی تجزیه می‌شوند، که به قضیه تجزیه کهن معروف شد. سپس سایر ریاضی دانان با الهام گرفتن از کار کهن قضیه تجزیه را در سایر جبرهای توپولوژیکی نتیجه گرفتند.

زلازکو برای جبرهای توپولوژیکی موضعاً کراندار تحت همان شرایط نشان داد قضیه تجزیه برقرار است.در سال ۱۹۸۱ دیکسون قضیه تجزیه را برای جبرهای مترپذیر، کامل و موضعاً محدب تحت شرایطی مشابه شرایط قبل نتیجه گرفت.

در ادامه این سوال مطرح شد که آیا با حذف شرط موضعاً محدب،لزوماً قضیه تجزیه برقرار است یا خیر. در سال ۱۹۹۰ دکتر انصاری با ارائه مفهوم جدید "بنیادی" نشان داد که با حذف شرط موضعاً محدب، قضیه تجزیه همچنان برقرار است. در حقیقت جبرهای بنیادی تعمیم یافته جبرهای موضعاً محدب و موضعاً کراندار هستند. به عبارت دیگر هر جبر موضعاً محدب، بنیادی است و همچنین هر جبر موضعاً کراندار نیز بنیادی می‌باشد.جبرهای بنیادی هم وجود دارند که موضعاً کراندار و موضعاً محدب نیستند.

بعد این سوال مهم مطرح شد که علاوه بر قضیه تجزیه چه قضایای دیگری از جبرهای باناخ به جبرهای بنیادی قابل تعمیم است که عنوان این پایان نامه را تشکیل می‌دهد. این پایان نامه بر اساس [۶] است و شامل سه بخش می‌باشد. در فصل اول به تعاریف و قضایای مقدماتی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی موردنیاز است.

فصل دوم شامل سه بخش است که در بخش اول مفهوم جبرهای بنیادی را ارائه می‌دهیم و نتایجی از جبرهای باناخ را که به جبرهای بنیادی تعمیم داده‌ایم را بیان و اثبات می‌کنیم.در بخش دوم روابط بین جبرهای بنیادی موضعاً ضربی و جبرهای توپولوژیکی موضعاً کراندار را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و ثابت می‌کنیم هر جبر توپولوژیکی موضعاً کراندار یک جبر بنیادی موضعاً ضربی است.با آوردن یک مثال نشان می‌دهیم لزوما یک جبر بنیادی موضعاً ضربی، موضعاً کراندار نیست.در بخش سه، یک نرم روی زیر فضایی از فضای دوگان جبرهای بنیادی موضعاً ضربی معرفی می‌کنیم.

فصل سوم شامل دو بخش است که در بخش اول نشان می‌دهیم نگاشت نمایی را می‌توان برای جبرهای بنیادی

موضعاً ضربی، مترپذیر و کامل ، تعریف کرد و در بخش دوم که کار اصلی ما در این پایان نامه است تعمیم قضیه گلسن ،خان - زلاسکو به جبرهای بنیادی موضعاً ضربی می‌باشد و در آخر با بررسی موضعاً فشردگی فضای حامل جبرهای بنیادی موضعا ضربی، این رساله را به پایان می‌رسانیم.

لازم به ذکر است که در این پایان نامه همه تعریف‌ها، لم‌ها، قضایا، ملاحظه‌ها و نتایج، شماره متوالی دارند. بعنوان مثال، در بخش ۳ از فصل اول، چهارمین عنوان دارای شماره ۱-۳-۴ می‌باشد.

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی می‌پردازیم که برای درک بهتر فصل‌های دیگر مورد نیاز است.

۱-۱ تعاریف و قضایای آنالیز مختلط

مفاهیم این بخش از [۲] گرفته شده است.

تعریف ۱-۱-۱. تابع f را روی حوزه‌ی $\mathbb{C}$ تحلیلی گویند، هرگاه f در هر نقطه‌ی $\mathbb{C}$ مشتق‌پذیر باشد. و در نقطه zتحلیلی گویند، اگر در یک همسایگی z تحلیلی باشد.

تعریف ۱-۱-۲. فرض‌کنید z یک عدد مختلط باشد.عامل اولیه z را با نماد $E_p(z)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$E_p(z) = (1 - z)\ exp(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}).$$

برای $P = 0$نیز تعریف می‌کنیم $E_0(z) = 1 - z$.

تابع $E_p(\frac{z}{a})$ یک صفر ساده در نقطه‌ی $z = a$ دارد وهیچ صفر دیگری ندارد.

تعریف ۱-۱-۳. فرض‌کنید f یک تابع تام با صفرهای$\{a_1, a_2, \ldots\}$ باشد، که طبق مرتبه شان تکرار شده‌اند و طوری مرتب شده‌اند که $|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$. آنگاه f از رتبه متناهی است، اگر عدد صحیح p باشد به طوری‌که

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-(p+1)} < \infty.$$

اگر p کوچکترین عدد صحیحی باشد که در رابطه بالا صدق کند، آنگاه f از رتبه‌ی p است.

تعریف ۱-۱-۴. فرض‌کنید f یک تابع تام با صفرهای $\{a_1, a_2, \ldots\}$ باشد. آنگاه $p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p\ (\frac{z}{a_n})$ به شکل استاندارد برای f است.

تعریف ۱-۱-۵. یک تابع تام از رده متناهی است، اگر از رتبه متناهی بوده و به صورت $f(z) = z^m\ e^{g(z)}\ p(z)$ باشد که p به شکل استاندارد است وg یک چند جمله‌ای است. اگر p رتبه f باشد و q درجه چند جمله‌ای g باشد آنگاه $\mu = max(p, q)$ رده‌ی f نامیده می‌شود.

توجه داریم که رده ی f عدد صحیح خوش تعریفی است، زیرا اگر p به شکل استاندارد باشد g به طور منحصر به فردی مشخص می شود.

تعریف ۱-۱-۶. یک تابع تام f از مرتبه متناهی است اگر عدد ثابت a و یک $r_0 > 0$ باشد به طوری که برای $|z| > r_0$ داشته باشیم:

$$|f(z)| < exp(|z|)^{\alpha} \ .$$

اگر f از مرتبه متناهی نباشد آن را از مرتبه نامتناهی می‌نامیم.

اگر f از مرتبه متناهی باشد آنگاه عدد

$$\lambda = inf\{ \ \alpha \ : \ |f(z)| < ezp(|z|)^{\alpha} \ \} \ .$$

مرتبه ی f نامیده می شود.

قضیه ۱-۱-۷. (*قضیه تجزیه هادامارد*[۱]): *فرض‌کنید f یک تابع تام از مرتبه متناهی λ باشد، آنگاه f رده متناهی $\mu \leq \lambda$ دارد.*

۱-۲ فضاهای متری

مفاهیم این بخش از [۱] گرفته شده است.

تعریف ۱-۲-۱. یک متر بر مجموعه Xیک تابع به صورت $d : X \times X \longrightarrow R$ است، به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

۱. $d(x,y) \geq \circ$.

۲. $x = y \iff d(x,y) = \circ$.

۳. $d(x,y) = d(y,x)$.

۴. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

در این صورت زوج(X,d) را فضای متری می‌گوییم.

تعریف ۱-۲-۲. فضای متری (X,d) را کامل می‌گوییم هر گاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

[۱] Hadamard factorization theorem

۱-۳ فضاهای توپولوژیکی

مفاهیم این بخش از [۱۴] گرفته شده است.

تعریف ۱-۳-۱. فرض‌کنید X یک مجموعه باشد $\tau \subseteq P(X)$ را یک توپولوژی بر X گوییم، هرگاه:

۱. X و ϕ متعلق به τ باشد.

۲. τ نسبت به اجتماع دلخواه اعضایش بسته باشد.

۳. τ نسبت به اشتراک متناهی اعضایش بسته باشد.

در این صورت زوج (X,τ)را فضای توپولوژی گوییم.

تعریف ۱-۳-۲. فضای توپولوژیکی (X,τ) را فشرده گوییم هر گاه به ازای هر خانواده $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ که $X = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ ، مجموعه متناهی $F \subseteq I$ موجود باشد به طوری‌که $X = \bigcup\limits_{i\in F} A_i$.

تعریف ۱-۳-۳. فضای توپولوژیکی X را فشرده موضعی گوییم هرگاه هر نقطه آن یک همسایگی با بستار فشرده داشته باشد.

تعریف ۱-۳-۴. فضای توپولوژی X را هاسدورف گوییم هر گاه به ازای هر دو نقطه متمایز x,y متعلق به X همسایگی‌های U و Vبه ترتیب شامل y,x موجود باشند به قسمی که $U\cap V = \phi$.

تعریف ۱-۳-۵. تعریف فضای برداری توپولوژیکی:

فضای برداری توپولوژیکی X ، یک فضای برداری روی میدان F همراه با یک توپولوژی با خواص زیر است.

۱. به ازای هر $x \in X$ مجموعه ی تک عضوی $\{x\}$ بسته باشد.

۲. عمل جمع یعنی نگاشت $+ : X\times X \longrightarrow X$ با ضابطه $+(a,b) = a+b$ پیوسته باشد.

۳. عمل ضرب اسکالر یعنی $\times : F\times X \longrightarrow X$ با ضابطه $\times(a,x) = ax$ پیوسته باشد.

تعریف ۱-۳-۶. اگر X فضای برداری باشد،تابع $\rho : X \longrightarrow R^* \cup \{۰\}$ را یک α نرم می‌گوییم، اگر $۰ < \alpha < ۱$ و شرایط زیر برقرار باشد.

۱)$\forall x \in A \ : \rho(x)_\alpha \geq ۰$.

۲)$\forall x \in A \quad \rho(x)_\alpha = ۰ \Leftrightarrow x = ۰$.

۳)$\forall x,y \in A \ : \rho(x+y)_\alpha \leq \rho(x)_\alpha + \rho(y)_\alpha$.

۴)$\forall \lambda \in \mathbb{C} \ : \ \rho(\lambda x)_\alpha = |\lambda|^\alpha \cdot \rho(x)_\alpha$.

برای $\alpha = ۱$ ، ρرا یک نرم روی X می‌نامیم.

تعریف ۱-۳-۷. اگر (X, τ) یک فضای برداری توپولوژیکی باشد، β یک پایه موضعی در نقطه $x \in X$ برای توپولوژی τ است هرگاه به ازای هر همسایگی از x مانند v عضوی مانند $B \in \beta$ شامل x و زیر مجموعه v موجود باشد.

تعریف ۱-۳-۸. فضای برداری توپولوژیکی X را محدب موضعی می‌گوییم، هرگاه شامل یک پایه موضعی برای صفر باشد که هر عضو پایه محدب است.

تعریف ۱-۳-۹. زیر مجموعه E از فضای برداری توپولوژیکی X را کراندار گوییم هرگاه E زیر مجموعه مضارب بالای هر همسایگی صفر باشد،به عبارت دیگر:

$$\forall V \in \mathcal{N}(\circ) \ , \ \exists s > \circ \ , \ \forall t \ (t > s \implies E \subset tV) \ .$$

تعریف ۱-۳-۱۰. فضای برداری توپولوژیکی X را کراندار موضعی می‌گوییم، اگر صفر دارای یک همسایگی کراندار باشد.

قضیه ۱-۳-۱۱. *فضای برداری توپولوژیکیX ،کراندار موضعی است اگر و فقط اگر یک α نرم موجود باشد که توپولوژی فضا را تولید کند.*$(\circ < \alpha < ۱)$

تعریف ۱-۳-۱۲. فضای برداری توپولوژیکی (X, τ) مترپذیر است، اگر بتوان متری مانند d روی X تعریف کرد به طوری که توپولوژی حاصل از این متر با توپولوژی τ-سازگار باشد.

تعریف ۱-۳-۱۳. متر d را روی فضای برداری توپولوژیکی X پایا گویند،هر گاه

$$\forall x, y, z \in X \qquad d(x+z \ , \ y+z) = d(x, y) \ .$$

۱-۴ آنالیز تابعی

مفاهیم این بخش از [۱۴] گرفته شده است.

یکی از مهمترین و اساسی‌ترین مفاهیم در ریاضیات بخصوص آنالیز بحث تابعک‌ها[۱] به ویژه تابعکهای خطی [۲] می‌باشد.

[۱]functionals [۲]linear functionals

تعریف ۱-۴-۱. اگر X فضای برداری توپولوژیکی باشد، T یک تابعک خطی از X به میدان زمینه Φ است، اگر در شرط زیر صدق کند.

$$\forall \alpha \in \mathbb{F} \;;\; \forall x, y \in X \quad T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y) \;.$$

قضیه ۱-۴-۲. *اگر Y, X فضاهای برداری توپولوژیکی باشند، تابع تصویر $\pi : X \times Y \longrightarrow X$ با ضابطه $\pi(x, y) = x$، خطی، پیوسته و باز است.*

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم π خطی است.

$$\begin{aligned} \pi(\alpha(x, y) + (x', y')) &= \pi(\alpha x + x',\ \alpha y + y') \\ &= \alpha x + x' = \alpha \pi(x, y) + \pi(x', y') \;. \end{aligned}$$

π پیوسته است، زیرا اگر u مجموعه بازی در X باشد چون $\pi^{-1}(u) = u \times Y$ در $X \times Y$ باز است، بنابراین π پیوسته می‌باشد.

حال ثابت می‌کنیم π باز است.

فرض کنیم w در $X \times Y$ باز باشد و $x \in \pi(w)$ اختیار می‌کنیم.در این صورت $y \in Y$ موجود است به طوری‌که $(x, y) \in w$.گردایه β متشکل از مجموعه‌هایی به صورت $u \times v$ که u در X و v در Y باز است، تشکیل یک زیر پایه موضعی برای $X \times Y$ می‌دهد.پس $u \in X$و $v \in Y$ وجود دارند به طوری‌که $(x, y) \in u \times v \subset w$. در نتیجه:

$$\pi(x, y) \in \pi(u, v) \subset \pi(w) \;.$$

بنابراین $x \in u \subset \pi(w)$. □

تعریف ۱-۴-۳. $B \subset X$ متعادل (بالانس) است، اگر برای λ ای که $|\lambda| \leqslant ۱$ داشته باشیم $\lambda B \subset B$.

قضیه ۱-۴-۴. ۱. *هر همسایگی صفر در فضای برداری توپولوژیکی X،شامل یک همسایگی متعادل از صفر است.*

۲. *هر همسایگی محدب از صفر شامل یک همسایگی محدب و متعادل از صفر است.*

برهان. برای مشاهده اثبات به قضیه(۱۴۰۱) از [۱۴] می‌توان رجوع کرد.

تعریف ۱-۴-۵. مجموعه $A \subseteq X$ را جاذب گوییم هرگاه برای هر $x \in A$ ، $\lambda > ۰$ ای موجود باشد به طوری‌که $\lambda^{-۱} x \in A$.

نتیجه ۱-۴-۶. *هر همسایگی صفر از فضای برداری توپولوژیکی X، جاذب است و هر مجموعه جاذب در X شامل عضو صفر می‌باشد.*

لم ۱-۴-۷. *اگر X یک فضای برداری توپولوژیکی و U یک همسایگی صفر باشد، آنگاه همسایگی متقارن V از صفر موجود است به طوری‌که $V+V\subseteq U$.*

قضیه ۱-۴-۸. *اگر X فضای برداری توپولوژیکی و $\Lambda : X \longrightarrow F$ تابعکی خطی باشد که $\Lambda \neq 0$ آنگاه موارد زیر هم ارزند.*

۱. Λ پیوسته است.

۲. $\mathcal{N}(\Lambda)$ مجموعه ای بسته است.

۳. $\mathcal{N}(\Lambda)$ در X چگال نیست.

۴. Λ روی همسایگی V از صفر کراندار است.

برهان. برای مشاهده اثبات به قضیه(۱۸۰۱)، از [۱۴] می‌توان رجوع کرد.

قضیه ۱-۴-۹. *فرض کنید Y, X فضاهای برداری توپولوژیکی و $\Lambda : X \longrightarrow Y$ نگاشت خطی باشد، اگر X متریذیر باشد در این صورت گزاره های زیر هم ارزند.*

۱. اگر $\{x_n\} \subseteq X$ و $x_n \to 0$ آنگاه مجموعه $\{\Lambda x_n \to 0 \;\; n = 1, 2, \ldots\}$ کراندار است.

۲. اگر $x_n \to 0$ آنگاه $\Lambda x_n \to 0$.

۳. نگاشت Λ پیوسته است.

برهان. برای مشاهده اثبات می‌توان به قضیه (۳۲۰۱)، از [۱۴]رجوع کرد.

قضیه ۱-۴-۱۰. *اگر X فضای برداری توپولوژیکی و d یک متر پایا روی X باشد،آنگاه*

$$\forall x \in X \;\; ; \;\; \forall n \in \mathbb{N} \qquad d(nx, 0) \leq nd(x, 0)$$

برهان:

$$\begin{aligned} d(nx,0) &\leq d(nx,(n-1)x) + d((n-1)x,0) \\ &\leq d(nx,(n-1)x) + d((n-1)x,(n-2)x) + d((n-2)x,0) \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} d(kx\ , (k-1)x) = \sum_{k=1}^{n} d(x + (k-1)x\ , (k-1)x + 0)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} d(x, 0) = nd(x, 0)\ .$$

تعریف ۱-۴-۱۱. فضای دوگان، فضای برداری توپولوژیکی X،فضای همه تابعک‌های خطی و پیوسته روی X است که آن را با X^* نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۴-۱۲. فرض کنید X^* دوگان فضای نرمدار X باشد.توپولوژی تولید شده توسط X^* روی X که هر $\Lambda \in X^*$ در آن پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف روی X می‌نامیم و آن را با $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهیم.

توجه ۱-۴-۱۳. اگر $x_0 \in X$ ، $\varepsilon > 0$ ، $\Lambda \in X^*$ باشد آنگاه:

$$U(\Lambda, x_0, \varepsilon) = \{\ x\ : |\Lambda(x) - \Lambda(x_0)| < \varepsilon\ \}\ .$$

یک همسایگی باز از x_0 نسبت به توپولوژی ضعیف است.

در حقیقت گردایه $\{U(\Lambda, x_0, \varepsilon)\ :\ \ x_0 \in X,\ n > 0\ , \Lambda \in X^*\}$ تشکیل یک زیر پایه برای x_0 نسبت به توپولوژی ضعیف در X می دهد $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$. و تابعک‌های خطی $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ موجودند به طوری‌که :

$$B = \bigcap_{1}^{m} \{x \in X :\ |\Lambda_i(x) - \Lambda_i(x_0)| < \varepsilon_i\}\ .$$

تشکیل پایه‌ای برای x_0 نسبت به توپولوژی ضعیف در X می‌دهد.

تعریف ۱-۴-۱۴. فرض کنید X یک مجموعه و $\mathcal{F}$خانواده‌ای غیر تهی از نگاشت‌های $f : X \to Y_f$ باشد، که هر Y_f یک فضای توپولوژیکی است.τ را مجموعه اجتماع‌های همه اشتراک‌های متناهی مجموعه‌های $f^{-1}(V)$ که $f \in \mathcal{F}$ و V باز در Y_f است تعریف می‌کنیم. آنگاه τ یک توپولوژی روی X است. در حقیقت کوچکترین توپولوژی روی X است که هر $f \in \mathcal{F}$ را پیوسته نگاه می‌دارد.τ را $\mathcal{F} - topology$ روی X می‌گوییم.

تعریف ۱-۴-۱۵. فرض کنید X فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد. در این صورت $(X^*, X - topology)$ یک فضای برداری توپولوژیکی است.X توپولوژی رویX^* را توپولوژی ضعیف ستاره گویند.

توپولوژی ضعیف ستاره کوچکترین توپولوژی روی X^* است که همه اعضای X را به عنوان تابعک خطی بر X^* به توی ϕ پیوسته نگاه می‌دارد.

ملاحظه ۱-۴-۱۶. *اگر $\varepsilon > 0$، $x \in X$ و $\Lambda_0 \in X^*$ داده شده باشند. آنگاه*

$$U(\Lambda_0, x, \varepsilon) = \{\Lambda \in X^* :\ |\varphi(x)(\Lambda) - \varphi(x)(\Lambda_0)| < \varepsilon\}\ .$$

یک همسایگی باز از Λ_0 در X^* در توپولوژی ضعیف ستاره است.

قضیه ۱-۴-۱۷. *(قضیه باناخ الاقلو[۱]):اگر V یک همسایگی صفر در فضای برداری توپولوژیکی X باشد و*

$$K = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda(x)| \leqslant ۱ \quad \forall x \in V\} .$$

در این صورت K ضعیف ستاره فشرده است.

برهان. برای مشاهده اثبات به قضیه (۳ ۰ ۱۵)،از [۱۴] می‌توان رجوع کرد.

۱-۵ جبرهای باناخ

مفاهیم این بخش از [۱۰] گرفته شده است.

تعریف ۱-۵-۱. یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$، یک فضای خطی A روی میدان $\mathbb{F}$ است که در آن نگاشت ضرب از$A \times A$ به A تعریف شده است و برای هر $x, y, z \in A$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$ در خواص زیر صدق می‌کند:

۱. $x(yz) = (xy)z$.

۲. $x(y + z) = xy + xz$ و $(x + y)z = xz + yz$.

۳. $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$.

ملاحظه ۱-۵-۲. *اگر $\mathbb{F}$ میدان اعداد حقیقی باشد A را یک جبر حقیقی گوییم و اگر $\mathbb{F}$ میدان اعداد مختلط باشد A را جبر مختلط می‌گوییم.*

تعریف ۱-۵-۳. تابعک T را روی جبر A ضربی گوییم هر گاه برای هر $x, y \in A$؛ $T(xy) = T(x)T(y)$

تعریف ۱-۵-۴. جبر A را جابه جایی‌گوییم هرگاه به ازای هر y, x عضو Aداشته باشیم $xy = yx$.

تعریف ۱-۵-۵. یک زیر جبر از A چون B یک زیر فضای برداری از A است به طوری‌که برای هرx و y عضو B ، $xy \in B$ باشد.

تعریف ۱-۵-۶. فرض کنید K یک زیر مجموعه از جبر A باشد.کوچک ترین زیر جبر B از A که شاملK باشد را زیر جبر تولید شده توسط مجموعه K می‌گوییم.

[۱] Banach Alaoğlu

جبر نرمدار

تعریف ۱-۵-۷. نرم ρ روی جبر A یک نرم جبری نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x, y \in A$

$$\rho(xy) \leq \rho(x)\ \rho(y)\ .$$

دوتایی (A, ρ) را یک جبر نرمدار می‌گوییم.

تعریف ۱-۵-۸. فضای نرمدار X را باناخ گوییم هر گاه متر تعریف شده توسط نرم، آن را به یک فضای متری کامل تبدیل کند.

تعریف ۱-۵-۹. جبر نرمدار (A, P) به طوری‌که فضای نرمدار A با نرم P کامل باشد را یک جبر نرمدار کامل یا جبر باناخ می‌گوییم.

تعریف ۱-۵-۱۰. اگر X یک فضای نرمدار باشد و (x_n) دنباله‌ای در X ، آنگاه سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ را جمع پذیر گوییم هرگاه به نقطه ای در X همگرا باشد.یعنی $x \in X$ موجود باشد که $x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

تعریف ۱-۵-۱۱. عنصر e از جبر A را عضو همانی A می‌نامیم اگر $e \neq 0$ و برای هر a داشته باشیم $a = ea = ae$. جبر A را که دارای عنصر همانی است یک جبر یکدار می‌نامیم.

تعریف ۱-۵-۱۲. اگر A یک جبر باشد، مجموعه‌ی همه‌ی عضوهای معکوس‌پذیر A را با $Inv(A)$ نشان می‌دهیم و مجموعه‌ی عضوهای A که معکوس ناپذیرند را با $Sing(A)$ نشان می‌دهیم لذا خواهیم داشت:

$$Sing(A) = A \setminus Inv(A)\ .$$

تعریف ۱-۵-۱۳. فرض‌کنید A یک جبر باشد، ضرب کواسی [1] در A به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\forall a, b \in A \quad a \circ b = a + b - ab\ .$$

لذا داریم $a \circ 0 = 0 \circ a = a$ به عبارتی در ضرب کواسی صفر عنصر همانی ضرب روی جبر A است.
اگر x عضوی از جبر A باشد، x دارای معکوس کواسی راست است اگر عضوی مانند $y \in A$ یافت شود به طوری که $x \circ y = 0$. و دارای معکوس کواسی چپ است اگر عضوی از Aمانند z یافت شود به طوری‌که $z \circ x = 0$.

تعریف ۱-۵-۱۴. فرض‌کنید A یک جبر باشد، $x \in A$ را کواسی معکوس‌پذیر می‌گوییم هرگاه دارای معکوس کواسی چپ و راست باشد.یعنی

$$\exists a \in A\ :\ \ a \circ x = x \circ a = 0\ .$$

[1] Quasi-Inverses

مجموعه‌ی همه‌ی اعضای کواسی معکوس‌پذیر A را با $q-Inv(A)$ نشان می‌دهیم و هم چنین تعریف می‌کنیم

$$q-Sing(A)=A\setminus q-Inv(A)\ .$$

تعریف ۱-۵-۱۵. فرض‌کنید aعضوی از جبر A با میدان $\mathbb{C}$ باشد، در این صورت طیف a را با $SP_A(a)$ یا $SP(A,a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

۱. اگر جبر A یکدار باشد

$$SP_A(a)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \lambda\cdot e-a\in Sing(A)\}\ .$$

۲. اگر جبر A یکدار نباشد

$$SP_A(a)=\{0\}\bigcup\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \lambda^{-1}a\in q-Sing(A)\}\ .$$

تعریف ۱-۵-۱۶. اگر $(A,\|\cdot\|)$ یک جبر نرمدار باشد،شعاع طیفی [1] عنصر $a\in A$ را با $r(a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$r(a)=inf\ \{\ \|a^n\|^{\frac{1}{n}}\ \ :\ n\in\mathbb{N}\ \}\ .$$

[1] spectral radius