دانشگاه تهران
دانشکدهٔ علوم

گروه ریاضی و علوم کامپیوتر

عنوان:

مقدمه‌ای بر فرمهای تفاضل متناهی غیر استاندارد

نگارش :

علی اشرفی

استاد راهنما: دکتر منوچهر پارسائی

استاد مشاور: دکتر مهدی دهقان

پایان‌نامهٔ دورهٔ کارشناسی ارشد

در

ریاضی کاربردی

پائیز ۱۳۷۹

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

۱۳۷۹/۱۰/۲۰

بسمه تعالی

اداره کل تحصیلات تکمیلی دانشگاه

احتراماً به اطلاع میرساند که جلسه دفاع از پایان نامه دوره **کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی آقای علی اشرفی**
تحت عنوان:

مقدمه‌ای بر فرم‌های تفاضل متناهی غیراستاندارد

در تاریخ **۷۹/۸/۹** در **دانشکده علوم دانشگاه تهران** برگزار گردید.

هیأت داوران بر اساس کیفیت پایان نامه، مقالات انتشار یافته، استماع دفاعیه و نحوه پاسخ به سؤالات، **پایاننامه** ایشان را برای دریافت درجه **کارشناسی ارشد** در رشته ریاضی کاربردی معادل با ۶ واحد با نمره ۱۹٫۲۵ نوزده و بیست و پنج صدم با درجه عالی مورد ارزشیابی قرار داد.

هیأت داوران

سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱. استاد راهنما	دکتر منوچهر پارسایی	استادیار	تهران	
۲. استاد مشاور	دکتر مهدی دهقان	استادیار	امیرکبیر	
۳. استاد داور	دکتر هایده اهرابیان	استادیار	تهران	
۴. استاد داور	دکتر داود رستمی	استادیار	تهران	

معاون گروه در امور تحصیلات تکمیلی	مدیر گروه	سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده
رحیم زارع نهندی	عمید رسولیان	رسول اخروی

۳۱۵۱۹

فهرست مطالب

تقدیر و سپاس

خداوندا! ای هستی بخش جهان و خالق انسان، سپاس شایستهٔ توست که به من توفیق آموختن علم ودانش عطاکردی. برآستان مقدست سجده شکر بجا میاورم.

در ابتدا لازم است از استاد ارجمند جناب آقای دکتر منوچهر پارسائی که استاد راهنمای اینجانب در نگارش این پایان نامه بوده‌اند سپاسگزاری نمایم. همچنین از اساتید محترم جناب آقای دکتر مهدی دهقان از دانشگاه امیرکبیر، سرکار خانم دکتر هایده اهرابیان و دکتر داود رستمی که داوری این پایان نامه را به عهده داشته‌اند کمال تشکر را دارم.

از کلیه اعضای خانواده‌ام که از ابتدای تحصیلاتم همیشه مشوق و یاورم بوده اند، بسیار متشکرم، توفیق و کامیابی آنان در تمام مراحل زندگیشان، آرزوی قلبی من است. مراتب سپاسگزاری عمیق خود را از دوستان عزیزم، آقایان محمدباقر اسدی ،محمّد ضمیریان، داود منصوری، محمّد دهقان و همچنین دانشجوی دورهٔ کارشناسی خانم تجملیان که از راهنماییهایشان استفاده زیادی بردم، ابراز میدارم.

در انتها از سرکار خانم قربانی برای دقت و حوصلهٔ فراوان که در تایپ و حروفچینی این پایان نامه از خود نشان داده‌اند، تشکر می‌نمایم.

علی اشرفی

مقدمه

مشکل عمده در مطالعهٔ سیستمهای دینامیکی، عدم وجود جوابهای تحلیلی دقیق برای معادلات دیفرانسیل است. بویژه اینکه، عموماً معادلات دیفرانسیل جزئی غیر خطی، نمی‌توانند بطور صریح حل شوند. یک راه برای بدست آوردن اطلاعات مفید در مورد رفتار جوابهای آنها استفاده از روشهای انتگرال گیری عددی است. از روشهای مهّم انتگرالگیری عددی، روش استفاده از تفاضلات متناهی، جهت ساخت مدلهای گسسته برای معادلات دیفرانسیل است. یکی از مشکلات عمده درکاربرد تکنیکهای عددی، این است که امکان دارد، فرم‌ها اصطلاحاً، دارای ناپایداریهای عددی باشند، این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که معادلهٔ تفاضل متناهی دارای جوابهایی باشد که با هیچ جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل اصلی، مطابقت نداشته باشند. بعنوان مثال، فرض کنید، جوابهای معادلات دیفرانسیل جزئی به مقادیر نامنفی محدود باشند، در این صورت هرگاه فرم تفاضل متناهی مربوط، جوابهایی با مقادیر منفی اختیار کند، آنگاه ناپایداریهای عددی وجود خواهند داشت. عموماً فرمهای تفاضل متناهی استاندارد دارای ناپایداریهای عددی هستند.

از جمله کسانی که اقدام به رفع این مشکل روشهای انتگرال گیری پرداخته است، دکترمیکنز[1] می‌باشد. دستورهای ارائه شده توسط ایشان، برای ساخت فرم‌های تفاضل متناهی ساختاری متفاوت با مدلهای گسسته متداول دارد. ابتدا، آن دسته از معادلات دیفرانسیل که دارای جوابهای تحلیلی صریح می‌باشند، مورد بررسی قرارگرفته و با توجه به جوابهای تحلیلی آنها فرم‌های تفاضل متناهی دقیق، برای آن معادلات ارائه شده است. سپس، با استفاده از ساختار فرم‌های تفاضل متناهی دقیق، دستوراتی جهت ساخت فرم‌های تفاضل متناهی برای معادلات دیفرانسیل دلخواه پیشنهاد شده است. با بکارگیری این دستورات، انتظار می‌رود که ناپایداریهای عددی رخ ندهند. از ویژگیهای مهّم فرم‌های تفاضل متناهی غیر استاندارد، این است که جوابهایشان همانند جوابهای تحلیلی معادلات دیفرانسیل در محدودیتهای یکسانی صدق می‌کنند.

هدف اصلی این پایان نامه، جمع بندی کلی ازکارهای انجام شده در مجموعه مقالات دکتر میکنز[۳, ۲, ۱]، که سعی شده است، با شرح و بسط آنها طرح جامعی برای ساخت چنین فرم‌هایی ارائه شود.

1) Michens

در فصل اوّل، دستورهای مدل بندی تفاضلات متناهی استاندارد ارائه شده و این دستورها برای چندین مثال بکار برده شده است. در فصل دوّم، مفهوم ناپایداریهای عددی بیان و وجود آنها برای چندین مثال نشان داده شده است. در فصل سوّم، ابتدا مفهوم فرم‌های تفاضل متناهی دقیق بیان، سپس دستورهای ساخت مدلهای تفاضل متناهی غیر استاندارد ارائه شده است و در پایان فصل نیز بهترین فرم‌های تفاضل متناهی تعریف می‌شود و برای چند مثال این فرم‌های تفاضل متناهی ساخته می‌شوند. در فصل چهارّم، فرم های تفاضل متناهی غیر استاندارد برای ردهٔ خاصی از معادلات دیفرانسیل جزئی واکنش-پخش بررسی شده‌اند، بطوریکه این فرم ها دارای خاصیت مهّم حافظ مثبت بودن هستند.

فصل اول

مروری بر فرم‌های تفاضل متناهی استاندارد

۱.۱. انتگرال گیری عددی

مشکل عمده، در مطالعهٔ سیستم های دینامیکی، عدم وجود جوابهای تحلیلی دقیق برای معادلات دیفرانسیل است. یک راه، برای بدست آوردن اطلاعات مفید در مورد رفتار جوابهای آنها، استفاده از انتگرال گیری عددی است. در این روش، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل که شامل متغیرهای مستقل و وابسته هستند ، توسط مدلی که متغیرهایش ممکن است گسسته باشند، جایگزین می‌شوند. عموماً، در این مدل متغیرهای مستقل تناظری یک به یک با اعداد صحیح دارند، در حالی که متغیرهای وابسته می توانند مقادیر حقیقی نیز اختیار کنند. هدف اصلی، استفاده از یک راهکار ویژه برای ساختن مدلهای گسسته برای معادلات دیفرانسیل، مثلاً استفاده از روشهای تفاضل متناهی می باشد.

نکتهٔ مهمّی که اغلب در فرمول بندی مدلهای گسسته معادلات دیفرانسیل نادیده گرفته می‌شود، این است که روشهای انتگرال گیری عددی باید همیشه بکمک دانش بدست آمده از مطالعهٔ جوابهای خصوصی معادلات دیفرانسیل ساخته شوند. برای مثال اگر معادلات دیفرانسیل دارای جواب ثابت با خاصیت پایداری ویژه‌ای باشد، مدل گسسته نیز باید این جواب ثابت را با همان خاصیت پایداری داشته باشد.

۱.۲. دستورهای مدل بندی تفاضلات متناهی استاندارد

جهت نشان دادن چگونگی ساخت مدلهای تفاضل متناهی گسسته برای معادلات دیفرانسیل، این مطلب را با معادلهٔ دیفرانسیل اسکالر معمولی زیر، که در آن $f(y)$ عموماً تابعی غیر خطی است، شروع می کنیم:

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \qquad (۱.۲.۱)$$

برای یک شبکهٔ یکریخت، با اندازه گام $\Delta t = h$ متغیرهای مستقل و وابسته را بصورت زیر، جایگزین می‌کنیم:

$$t \to t_k = hk \qquad (۱.۲.۲)$$

$$y(t) \to y_k \qquad (۱.۲.۳)$$

که k یک عدد صحیح است، یعنی:

$$k \in \{\cdots, -۱, -۱, ۰, ۱, ۲, \cdots\} \qquad (۱.۲.۴)$$

و y_k تقریبی برای $y(t_k)$ است. متشابهاً تابع $f(y)$ را بصورت زیر جایگزین می‌کنیم:

$$f(y) \rightarrow f_k \qquad (۱.۲.۵)$$

بطوریکه درآن، f_k تقریبی برای $f[y(t_k)]$ است.

برای مشتق مرتبهٔ اوّل، هر یک از فرم‌های زیر مناسب هستند:

$$\frac{dy}{dt} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{y_{k+۱} - y_k}{h} \\ \dfrac{y_{k+۱} - y_{k-۱}}{۲h} \\ \dfrac{y_k - y_{k-۱}}{h} \end{cases} \qquad (۱ \cdot ۲ \cdot ۶)$$

این نمایشهای گسسته برای مشتق مرتبهٔ اوّل، بترتیب فرمهای اویلرپیشرو، تفاضل مرکزی و اویلر پسرو نامیده میشوند. که بطور مستقیم از تعریف مشتق اوّل نتیجه میشوند، یعنی:

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{h \rightarrow ۰} \begin{cases} \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h} \\ \dfrac{y(t+h) - y(t-h)}{۲h} \\ \dfrac{y(t) - y(t-h)}{h} \end{cases} \qquad (۱ \cdot ۲ \cdot ۷)$$

یک مدل تفاضل متناهی استاندارد، برای معادلهٔ دیفرانسیل اسکالر معمولی بوسیله جایگذاری معادلات (۱.۲.۲) و (۱.۲.۶) در معادلهٔ (۱.۲.۱) بدست می‌آید.

بنابراین، یک فرم تفاضل متناهی ساده برای معادلهٔ (۱.۲.۱) بصورت زیر است :

$$\frac{y_{k+۱} - y_k}{h} = f(y_k) \qquad (۱.۲.۸)$$

مدلهای گسسته دیگر، عبارتنداز:

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{h} = f(y_k) \qquad (1.2.9)$$

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = f(y_k) \qquad (1.2.10)$$

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = f(\frac{y_{k+1} + y_{k-1}}{2}) \qquad (1.2.11)$$

توجه می کنیم که همهٔ نمایشهای گسسته در حد تقریبی زیر، به معادلهٔ دیفرانسیل اولیه تقلیل می‌یابند.

$$h \to 0 \quad , \quad k \to \infty \quad t_k = t = \text{ثابت} \qquad (1.2.12)$$

همانطوری که دیده میشود، ساخت فرمهای تفاضل متناهی استاندارد منحصر بفرد نیست. برای تکمیل بحث، نمایش استاندارد گسسته برای مشتق مرتبهٔ دو را ارائه میدهیم که عبارت است از:

$$\frac{d^2y}{dt^2} \to \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \qquad (1.2.13)$$

در بخش آینده، از دستورهای مدل بندی تفاضل متناهی استاندارد، برای ساخت نمایش گسستهٔ چندین معادلهٔ دیفرانسیل جزئی و معمولی نسبتاً ساده استفاده می‌کنیم.

۱.۳. مثالها

۱.۳.۱ معادلهٔزوال[1]

معادلهٔ دیفرانسیل زوال، بصورت زیر است :

$$\frac{dy}{dt} = -y \qquad (1.3.1)$$

فرم اویلر پیشرو، برای معادلهٔ (۱.۳.۱) عبارت است از:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = -y_k \qquad (1.3.2)$$

همچنین، مدل گسستهٔ دیگری می‌تواند، بوسیلهٔ استفادهٔ یک عبارت متقارن برای جملهٔ y در معادلهٔ (۱.۳.۱)

1) Decay Equation

ساخته شود.

بعنوان مثال:

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h}=-(\frac{y_{k+1}+y_k}{2}) \qquad (1.3.3)$$

استفاده از تفاضل مرکزی برای مشتق مرتبهٔ اوّل میدهد:

$$\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}=-y_k \qquad (1.3.4)$$

یک فرم تفاضل مرکزی دیگر، می تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}=-(\frac{y_{k+1}+y_k+y_{k-1}}{3}) \qquad (1.3.5)$$

بطور مشابه، یک مدل اویلر پیسرو، عبارت است از:

$$\frac{y_k-y_{k-1}}{h}=-y_k \qquad (1.3.6)$$

که میتواند بصورت زیر نیز، نوشته شود:

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h}=-y_{k+1} \qquad (1.3.7)$$

معادله‌های بالا را می‌توان بصورتهای زیر نوشت:

معادلهٔ (۱.۳.۲) : $$y_{k+1}=(1-h)y_k \qquad (1.3.8)$$

معادلهٔ (۱.۳.۳) : $$y_{k+1}=\frac{(1-h/2)}{(1+h/2)}y_k \qquad (1.3.9)$$

معادلهٔ (۱.۳.۴) : $$y_{k+2}+2hy_{k+1}-y_k=0 \qquad (1.3.10)$$

معادلهٔ (۱.۳.۵) : $$(1+\frac{2h}{3})y_{k+2}+(\frac{2h}{3})y_{k+1}-(1-\frac{2h}{3})y_k=0 \qquad (1.3.11)$$

معادلهٔ (۱.۳.۶) : $$y_{k+1}=(\frac{1}{1+h})y_k \qquad (1.3.12)$$

توجه کنید که معادلات (۱.۳.۸) و (۱.۳.۹) و (۱.۳.۱۲) معادلات تفاضلی مرتبهٔ اوّل هستند، در حالیکه معادلات (۱.۳.۱۰) و (۱.۳.۱۱) معادلات تفاضلی خطی مرتبهٔ دوم هستند. بعلاوه، واضح است که همه معادلات از یک مرتبه به ازای اندازهٔ گام ثابت h، دارای ضرایب ثابت مختلف هستند. این دلالت دارد بر اینکه معادلات (۱.۳.۹) و (۱.۳.۱۲) جوابهای مختلف دارند. بنابراین، هر یک از مدلهای گسستهٔ بالا برای معادلهٔ زوال جوابهای عددی یکتایی میدهند، که، از مدلهای دیگر متفاوت هستند. همین طور، واضح است که هر یک از مدلهای

گسسته دارای ضرایبی هستند،که به اندازهٔ گام h وابسته هستند، این باعث می شود که رفتارهای جوابها، با مقدار h تغییر کنند.

۱.۳.۲ معادلهٔلژیستیک[1]

معادلهٔ دیفرانسیل لژیستیک بصورت زیر است:

$$\frac{dy}{dt} = y(1-y) \qquad (1.3.13)$$

فرم اویلر پیشرو برای معادلهٔ دیفرانسیل لژیستیک عبارت است از:

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = y_k(1-y_k) \qquad (1.3.14)$$

فرمهای تفاضل مرکزی و اویلر پسرو، بترتیب زیر هستند:

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = y_{k+1}(1-y_{k+1}) \qquad (1.3.15)$$

$$\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h} = y_k(1-y_k) \qquad (1.3.16)$$

سه معادلهٔ بالا می توانند، بصورت زیر نوشته شوند:

معادلهٔ (۱.۳.۱۴) : $$y_{k+1} = (1+h)y_k - h(y_k)^2 \qquad (1.3.17)$$

معادلهٔ (۱.۳.۱۵) : $$h(y_{k+1})^2 + (1-h)y_{k+1} - y_k = 0 \qquad (1.3.18)$$

معادلهٔ (۱.۳.۱۶) : $$y_{k+1} = y_k + 2hy_{k+1}(1-y_{k+1}) \qquad (1.3.19)$$

۱.۳.۳ معادلهٔیک‌بعدی‌وزش[2]

معادلهٔ یک بعدی وزش، بصورت زیر است:

$$u_t + u_x = 0 \qquad (1.3.20)$$

1) Logistic Equation 2) Unidiretional wave Equation

بطوریکه،

$$u = u(x,t) \quad \text{و} \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{و} \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (۱.۳.۲۱)$$

متغیرهای گسسته فضا و زمان، یعنی x و tرا بشکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$t_k = (\Delta t)k \quad , \quad x_m = (\Delta x)m \qquad (۱.۳.۲۲)$$

بطوریکه،

$$k \in \{\cdots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \cdots\} \qquad (۱.۳.۲۳a)$$

$$m \in \{\cdots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \cdots\} \qquad (۱.۳.۲۳b)$$

از اینرو، تقریب گسسته $u(x,t)$، بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$u(x,t) \to u_m^k \qquad (۱.۳.۲۴)$$

و مشتقات مرتبهٔ اوّل گسستهٔ متناظر آن، بشکل زیر هستند:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \to \begin{cases} \dfrac{u_m^{k+۱} - u_m^k}{\Delta t} \\ \dfrac{u_m^k - u_m^{k-۱}}{\Delta t} \\ \dfrac{u_m^{k+۱} - u_m^{k-۱}}{۲\Delta t} \end{cases} \qquad (۱.۳.۲۵)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \to \begin{cases} \dfrac{u_{m+۱}^k - u_m^k}{\Delta x} \\ \dfrac{u_m^k - u_{m-۱}^k}{\Delta x} \\ \dfrac{u_{m+۱}^k - u_{m-۱}^k}{۲\Delta x} \end{cases} \qquad (۱.۳.۲۶)$$

بوسیلهٔ انتخابهای متفاوت برای مشتق گسسته نسبت به زمان و مشتق گسسته نسبت به فضا، چندین مدل گسسته، می تواند ساخته شود. چهار حالت متفاوت، بصورت زیر، نشان داده شده است:

(i) اویلر پیشرو برای مشتق زمان و اویلر پیشرو برای مشتق فضا:

$$\frac{u_m^{k+1}-u_m^k}{\Delta t}+\frac{u_{m+1}^k-u_m^k}{\Delta x}=0 \qquad (۱.۳.۲۷)$$

(ii) اویلر پیشرو برای مشتق زمان و اویلر پسرو برای مشتق فضا:

$$\frac{u_m^{k+1}-u_m^k}{\Delta t}+\frac{u_m^k-u_{m-1}^k}{\Delta x}=0 \qquad (۱.۳.۲۸)$$

(iii) اویلر پیشرو برای مشتق زمان و تفاضل مرکزی برای مشتق فضا:

$$\frac{u_m^{k+1}-u_m^k}{\Delta t}+\frac{u_{m+1}^k-u_{m-1}^k}{2\Delta x}=0 \qquad (۱.۳.۲۹)$$

(iv) یک فرم ضمنی با اویلر پیشرو برای مشتق زمان و اویلر پسرو برای مشتق فضا:

$$\frac{u_m^{k+1}-u_m^k}{\Delta t}+\frac{u_m^{k+1}-u_{m-1}^{k+1}}{\Delta x}=0 \qquad (۱.۳.۳۰)$$

واضح است که مدلهای گسسته دیگری نیز می تواند ساخته شود.

همهٔ معادلات بالا معادلات تفاضلی جزئی خطی با ضرایب ثابت هستند(برای Δt و Δx ثابت).

۱.۳.۳ معادلهٔپخش[1]

معادلهٔ دیفرانسیل جزئی پخش، در فرم بی بعد، بصورت زیر است:

$$u_t=u_{xx}, \qquad u=u(x,t) \qquad (۱.۳.۳۱)$$

فرم صریح استاندارد برای این معادله، بوسیلهٔ عبارت زیر داده می‌شود:

$$\frac{u_m^{k+1}-u_m^k}{\Delta t}=\frac{u_{m+1}^k-2u_m^k+u_{m-1}^k}{(\Delta x)^2} \qquad (۱.۳.۳۲)$$

در حالیکه فرم ضمنی استاندارد،برای این معادله، بشکل زیر است:

$$\frac{u_m^{k+1}-u_m^k}{\Delta\ t}=\frac{u_{m+1}^{k+1}-2u_m^{k+1}+u_{m-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \qquad (۱.۳.۳۳)$$

هر دو معادلات (۱.۳.۳۲) و (۱.۳.۳۳) معادلات تفاضلی جزئی خطی از مرتبهٔ اول برای متغیرگسستهٔ زمان و مرتبهٔ دوّم برای متغیرگسستهٔ فضا هستند. ولی آنها همسان نیستند و جوابهای آنها، مقادیر عددی متفاوت برای معادلهٔ پخش می‌دهند.

1) Diffusion Equation