وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تربیت معلم آذربایجان

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان :

برخی نتایج نظریه نقطه ثابت در فضاهای $CAT(0)$

استاد راهنما :

دکتر شهرام رضاپور

پژوهشگر :

زهره صابرپور

اردیبهشت/ ۱۳۹۰

تبریز / ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگان شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حق او گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشه تیزگام در راه شناسایی او لنگ است و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ، صفتهای او تعریف‌ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، در وقت ناگنجیدنی و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، به رحمتش بادها را بپراکنید و با فرسنگها لرزه‌ی زمین را در مهار کشید.

پاک خدایا، چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو و چه خرد است بزرگی آن در کنار قدرت تو. چه باعظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان و چه اندک است در کنار نعمت‌های آن جهان.

خدایا اگر در پرستش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما، که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات امام علی (ع)

تقدیم به

پدر بزرگوارم که در میان ما نیست،

(روحش شاد)

و مادر عزیز و خواهر مهربانم که موفقیّت هایم

را مدیون زحمات بی دریغ ایشان، هستم.

تشکر و قدردانی

پروردگارا

به من توانی عطا کن تا به آنچه مرا از دانش بخشیده‌ای، شکرگزار باشم و به آنان که زوایای تاریک اندیشه‌ام را با آموزگاری خویش روشن نموده‌اند و مشوق و یاریگرم بوده‌اند، اجر فراوان ده. مرا شایستگی عطا فرما در بازمانده حیات خویش سزاوار دانشی فزونتر از جانب تو باشم، عنایتی عطا کن تا آموخته‌هایم بی‌سود نباشد و بتوانم به یاری علمی که داده‌ای بنده‌ای شایسته برای تو و یاوری برای بندگان تو باشم.

زهره صابرپور

اردیبهشت ۱۳۹۰

فهرست مندرجات

چکیده iii

پیشگفتار iv

۱ تعاریف و مفاهیم اساسی ۱

۱.۱ تعاریف مقدماتی ۱

۲.۱ قضایا و لم های مورد نیاز ۱۴

۲ $\Delta-$ همگرایی و وجود نقطه ثابت در فضاهای $CAT(0)$ ۱۶

۱.۲ $\Delta-$ همگرایی در فضاهای $CAT(0)$ ۱۶

۲.۲ مجموعه نقاط ثابت در فضای $CAT(0)$ ۲۷

۳.۲ نقطه ثابت چند تابعی در فضای $CAT(0)$ ۳۰

۳ تقریب های پایا برای انواع نگاشت ها در فضای $CAT(0)$ ۳۶

۱.۳ تقریب های پایا در فضای $CAT(0)$ ۳۶

۲.۳ تقریب های پایا برای نگاشت های تعویض پذیر در فضای $CAT(0)$ ۴۵

۴ نقاط ثابت، بهترین تقریب برای انواع نگاشت‌ها روی $R-$ درخت‌ها ۴۹

۱.۴ چند ویژگی از $R-$ درخت ها ۴۹

۲.۴ نقاط ثابت، تقریب پایا و بهترین تقریب چند تابعی غیر توسیعی ۵۰

۳.۴ نقاط ثابت و بهترین تقریب چند تابعی های تقریباً نیم پیوسته پایینی ۵۵

۴.۴ وجود و یکتایی بهترین نقاط تقریب در فضاهای متریک ژئودزیک ۶۲

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۷۱

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۷۳

کتاب‌نامه ۷۵

چکیده

در این رساله، به بررسی چند نتیجه نقطه ثابت روی فضاهای $CAT(0)$ و $R-$ درخت ها می‌پردازیم. فضاهای $CAT(0)$ از دیدگاه‌های فیزیکی و هندسی حاصل شده و مربوط به تئوری خمینه‌ها می‌باشند. به علاوه، به بررسی برخی از قضایای تقریب مرتبط با تئوری نقطه ثابت نیز می‌پردازیم. در این راستا، ابتدا مسیر ژئودزیک را تعریف و بر اساس آن، فضاهای $CAT(0)$ و $R-$ درخت ها را تعریف می‌کنیم. در فصل اول، تعاریف، مقدمات و قضایای مورد نیاز این رساله را ارایه می‌نماییم. در فصل دوم، $\Delta-$ همگرایی در فضای $CAT(0)$ را بررسی و بر اساس آن، چند قضیه نقطه ثابت برای برخی نگاشت های غیر توسیعی، شبه غیر توسیعی و چند تابعی ها بیان می‌کنیم. در فصل سوم به ارایه نتایجی درباره تقریب های پایای نگاشت ها و چند تابعی های تعویض پذیر خواهیم پرداخت. بالاخره، در فصل چهارم چند قضیه تقریب مرتبط با تئوری نقطه ثابت را برای چند تابعی ها و نگاشت های غیر توسیعی و نگاشت های تقریباً نیم پیوسته پائین روی $R-$ درخت ها ارایه خواهیم نمود.

کلمات کلیدی: فضای $CAT(0)$، $R-$ درخت، نقطه ثابت، نگاشت غیر توسیعی، $\Delta-$ همگرایی، نگاشت تقریباً نیم پیوسته پائین.

پیشگفتار

واژه $CAT(0)$ برگرفته از نام سه ریاضیدان به نام های کاراتان [۱]، الکساندر[۲] و توپوگانف [۳] می‌باشد که بنیانگذار مفهوم این فضاها هستند و نماد (0) نمایشگر عدد انحنای خمیدگی این فضاهاست. این فضاها از دیدگاه‌های فیزیکی و هندسی حاصل شده‌اند. در واقع هر فضای $CAT(0)$ خمینه ای هومئومورف با صفحه است به طوریکه هر مسیر در $\mathbb{R}^2$، قطعه ای ژئودزیک متناظر در آن خمینه دارد که فاصله دو نقطه از یک مسیر در $\mathbb{R}^2$ بیشتر از فاصله متناظر آن در مسیر ژئودزیک باشد. اگر چه از لحاظ تاریخی کارهای بسیاری در فیزیک کوانتوم و هندسه منیفلد در دهه های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ درباره مطالب اولیه فضاهای $CAT(0)$ وجود دارند، اما گرستن [۴] برای اولین بار مقاله ای در سال ۱۹۹۴ در مجله *Proc. Amer. Math. Soc.* چاپ کرد و نشان داد که گروه اتومورفیسم های یک گروه آزاد، یک گروه $CAT(0)$ نیست([۱۷]). همچنین وی مقاله ای درباره دیورژانس های ژئودزیک در فضاهای $CAT(0)$ در همان سال چاپ کرد([۱۶]). بین سال های ۱۹۹۳ تا ۲۰۰۵ حدود هشتادمقاله درباره فضاهای $CAT(0)$ چاپ شده که تمامی آن ها به جبر، هندسه و توپولوژی جبری مربوط هستند. به عنوان مثال، در سال ۱۹۹۳ آنکل [۵] منیفلدهای انعکاسی را در فضاهای $CAT(0)$ بررسی کرد([۴]). در سال ۲۰۰۵ رابرت بل [۶] در مقاله ای ثابت کرد که گروه‌های آرتینی سه بعدی FC،

[۱] Carathan
[۲] Alexander
[۳] Topoganov
[۴] Gersten
[۵] Ancel
[۶] R. Bell

فضای $CAT(0)$ می‌باشند([۵]). بالاخره برای نخستین بار در سال ۲۰۰۴ فضاهای $CAT(0)$ توسط کِرک [7] وارد آنالیز شد([۲۱]). وی قضایای نقطه ثابت را در فضاهای $CAT(0)$ و $R-$ درخت ها بررسی نمود. پس از وی ریاضیدانان متعددی درباره قضایای مختلف آنالیز، به ویژه نظریه نقطه ثابت در فضاهای $CAT(0)$ کارهایی انجام داده اند، که تاکنون کمتر از شصت مقاله در این زمینه به چاپ رسیده است، که این رقم خود بیانگر پیچیدگی موجود در این فضاهاست. در ایران نیز افرادی مانند رازانی، فرجزاده، امینی هرندی، احمدی کاکاوندی و صلاحی فرد در این زمینه کارهایی انجام داده اند. در حالت کلی، مطالعاتی در فضاهای $CAT(K)$ صورت گرفته است. برای نمونه، در سال ۲۰۰۲ ناگانو [8] یک قضیه را برای فضاهای $CAT(1)$ ثابت کرد([۲۷]). همچنین در سال ۲۰۰۷، بریدی[9] فضاهای $CAT(-1)$ را مورد مطالعه قرار داد ([۷]). در این رساله، با بررسی اغلب مقالاتی که توانستیم به آن ها دسترسی پیدا کنیم، سعی کردیم یک نظام بندی خاصی برای فضاهای $CAT(0)$ به وجود آوریم که البته با توجه به بررسی های پراکنده ای که در مورد این فضاها صورت گرفته بود، انجام این کار به راحتی میسر نبود. شایان ذکر است تلاش ما برای جمع بندی نتایج نظریه نقطه ثابت در فضاهای $CAT(0)$ و $R-$ درخت ها می‌باشد. این رساله شامل چهار فصل است.

در فصل اول، به بیان تعاریف مقدماتی پرداخته و مفاهیم اولیه را معرفی می‌کنیم. همچنین برخی نتایج مورد نیاز از مقالاتی را که به آن ها دسترسی نداشتیم و در فصل های بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت، بیان می‌کنیم.

در فصل دوم، به بررسی نتایجی که به $\Delta-$ همگرایی در فضاهای $CAT(0)$ مربوط هستند، می‌پردازیم. سپس به بررسی خواص مجموعه نقاط ثابت در فضاهای $CAT(0)$ مانند محدب بودن پرداخته و قضایایی را درباره وجود نقطه ثابت برخی چند تابعی ها در فضای $CAT(0)$ بررسی خواهیم نمود.

در فصل سوم، به موضوع تقریب های پایا در فضاهای $CAT(0)$ خواهیم پرداخت که مقالات مربوطه اغلب از کارهای پروفسور شهزاد [10] از عربستان می‌باشد. این موضوع ارتباط ظریف و خاص بین

---

[7] Kirk
[8] Nagano
[9] Brady
[10] Shahzad

نظریه تقریب و نقطه ثابت است. در واقع در این فصل به دنبال نقاط ثابتی خواهیم بود که همزمان بهترین نقطه تقریب نیز باشند. در این راستا نکته جالب توجه، نحوه ارائه مفروضات قضایا می‌باشد که با چه ظرافتی چنین نتایجی حاصل می‌شوند. این نتایج برای ترکیب توابع و چند تابعی ها ارائه می‌شوند که دربخش دوم از فصل سوم، تعویض پذیری آن ها نیز جزو شرایط قضایا خواهد بود.

درفصل چهارم، به بررسی نتایج متعددی از نظریه نقطه ثابت روی $R-$ درخت ها می‌پردازیم. در این خصوص، لازم به ذکر است که ارتباط تنگاتنگی بین گراف های درخت و $R-$ درخت ها وجود دارد و شاید بتوان $R-$ درخت ها را نگاه آنالیزی به گراف های درخت دانست. در هر حال، در این فصل به بررسی نقاط ثابت نگاشت های غیر توسیعی و تعویض پذیر و نیز چند تابعی های تقریباً نیم پیوسته پایینی خواهیم پرداخت. بالاخره در انتها، وجود و یکتایی نقاط تقریب در فضاهای ژئودزیک متریک را نیز مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

در راستای مطالعه مقالات فضاهای $CAT(0)$ سعی نمودیم خود نتایجی تازه به دست آوریم که با توجه به عدم چاپ آن ها، از ارائه آن ها در این رساله خودداری نمودیم.

شایان ذکر است که مقالات اصلی این رساله عبارتند از مراجع [۳]، [۸]، [۱۲]، [۱۴]، [۱۵]، [۲۲]، [۲۳]، [۲۴]، [۲۶]، [۲۸]، [۲۹]، [۳۰]، [۳۱].

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اساسی

در این فصل ابتدا به بیان مفاهیم و تعاریف اساسی که در این رساله به آنها نیاز داریم، می‌پردازیم. سپس، در انتها چند قضیه و لم بدون ذکر اثبات آورده شده است.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ مسیر ژئودزیک:

فضای متریک X را در نظر بگیرید. مسیر ژئودزیک واصل بین دو عضو x,y، نگاشتی مانند $c:[0,r]\longrightarrow X$ است که $c(r)=y$، $c(0)=x$ و برای هر $t,s\in[0,r]$ داشته باشیم $d(c(t),c(s))=|t-s|$.

توجه کنید که نگاشت c یک ایزومتری است و $d(x,y)=r$.

تصویر c را قطعه ژئودزیکی واصل بین x,y می‌نامند و اگر منحصر به فرد باشد، آن را با $[x,y]$ نمایش می‌دهند.

برای هر $x,y\in X$، نقطه $z\in[x,y]$ را به صورت $z=(1-\alpha)x\oplus\alpha y$ نمایش می‌دهیم، که در آن $\alpha\in[0,1]$ و $d(x,z)=\alpha d(x,y)$ و $d(z,y)=(1-\alpha)d(x,y)$.

تعریف ۲.۱.۱ فضای ژئودزیک:

فضای متریک X را ژئودزیک نامند هرگاه بین هر دو نقطه آن، یک قطعه ژئودزیک منحصر به فرد موجود باشد.

تعریف ۳.۱.۱ پرتو ژئودزیک:

یک پرتو ژئودیک، زیر مجموعه‌ای از X است که با نیم خط $[0,\infty)$ ایزومتر باشد. $M \subseteq X$ را به طور ژئودزیک کراندار نامند هرگاه شامل هیچ پرتو ژئودزیکی نباشد.

تعریف ۴.۱.۱ زیر مجموعه محدب:

زیر مجموعه A از X را محدب نامند هرگاه به ازای هر $x,y \in A$، قطعات ژئودزیک واصل بین x,y در A قرار داشته باشند.

تعریف ۵.۱.۱ فضای متریک اکیداً محدب:

یک فضای ژئودزیک را اکیداً محدب نامند هرگاه برای هر $r > 0$ و $x,y,a \in X$ که $x \neq y$، $d(x,a) \leqslant r$ و $d(y,a) \leqslant r$، داشته باشیم $d(p,a) < r$، که در آن p نقطه دلخواه بین x و y است که $p \neq x$ و $p \neq y$.

توجه کنید بین هر دو نقطه از یک فضای ژئودزیک اکیداً محدب، دقیقاً یک قطعه ژئودزیک موجود است.

تعریف ۶.۱.۱ مثلث ژئودزیک:

مثلث ژئودزیک $\Delta(x_۱, x_۲, x_۳)$ در یک فضای ژئودزیک، شامل ۳ نقطه (رئوس) و قطعات ژئودزیک بین هر جفت از نقاطش می‌باشد.

مثلث مقایسه برای مثلث ژئودزیک Δ، مثلثی مانند

$$\bar{\Delta}(x_۱, x_۲, x_۳) := \Delta(\bar{x_۱}, \bar{x_۲}, \bar{x_۳})$$

در $\mathbb{R}^۲$ است که برای هر $۱ \leq i, j \leq ۳$ داشته باشیم $e(\bar{x_i}, \bar{x_j}) = d(x_i, x_j)$، که در آن e متریک اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ است.

تعریف ۷.۱.۱ فضای $CAT(۰)$:

فضای متریک ژئودزیک X را فضای $CAT(۰)$ نامند هرگاه برای هر مثلث ژئودزیک Δ در X و مثلث مقایسه آن $\bar{\Delta}$ در $\mathbb{R}^۲$، و نیز برای هر $x, y \in \Delta$ و $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta}$ داشته باشیم $d(x, y) \leq e(\bar{x}, \bar{y})$.

به عنوان مثال هر منیفلد ریمانی همبند، ساده و کامل با شعاع انحنای نامثبت، یک فضای $CAT(۰)$ است ([۱]).

هر فضای $CAT(۰)$ به طور منحصر به فرد ژئودزیک است ([۶]).

با یک بررسی ساده می‌توان دید که هر زیر فضا از یک فضای $CAT(۰)$، یک فضای $CAT(۰)$ است اگر و تنها اگر محدب باشد.

تعریف ۸.۱.۱ فضای $R-$ درخت:

فضای متریک X را $R-$ درخت نامند هرگاه

۱. بین هر جفت از نقاط $x, y \in X$، قطعهٔ ژئودزیک منحصر به فرد $[x, y]$ موجود باشد،

۲.اگر $x, y, z \in X$ که $[y, x] \cap [x, z] = x$، آن‌گاه $[y, x] \cup [x, z] = [y, z]$،

۳.برای هر $x, y, z \in X$، $w \in X$ چنان موجود باشد که $[x, z] \cap [x, y] = [x, w]$.

به عنوان مثال، هر درخت در نظریه گراف یک $R-$ درخت است.

اگر X یک $R-$ درخت باشد، گردایه زیر مجموعه‌های محدب و بسته X دارای خاصیت (هلی)[1] است، یعنی اگر $A_۱, ..., A_n$ زیر مجموعه های محدب و بسته X با اشتراک دوبدو ناتهی باشند، آن‌گاه $A_۱ \cap A_۲ \cap ...... \cap A_n \neq \emptyset$.

تعریف ۹.۱.۱ متریک محدب:

در فضای ژئودزیک X با قطعات ژئودزیک منحصربه فرد، متریک d را محدب نامند هرگاه برای هر $u, v, x, y \in X$، $t \in (۰, ۱)$، $m \in [x, y]$ و $n \in [u, v]$ که $d(x, m) = td(x, y)$، $d(y, m) = (۱ - t)d(x, y)$، $d(u, n) = td(u, v)$ و $d(v, n) = (۱ - t)d(u, v)$، داشته باشیم

$$d(m, n) \leq td(x, u) + (۱ - t)d(y, v).$$

تعریف ۱۰.۱.۱ مجموعه بهترین تقریب:

اگر E زیر مجموعه ای از فضای متریک X باشد، مجموعه بهترین تقریب های $y \in X$ در E به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P_E(y) = \{z \in E : d(z, y) = d(y, E)\},$$

که در آن $d(y, E) = \inf\{d(y, x); x \in E\}$.

مجموعه E را تقریب پذیر نامند هرگاه به ازای هر $y \in X$، $P_E(y)$ ناتهی باشد.

مجموعه E را چبیشف نامند هرگاه به ازای هر $y \in X$، $P_E(y)$ تک عضوی باشد.

ثابت شده که هر زیر مجموعه محدب و بسته در یک فضای $CAT(۰)$، چبیشف است.

[1] Helly

تعریف ۱۱.۱.۱ بهترین زوج تقریب:

فرض کنید A و B دو زیر مجموعه از فضای متریک X و $F : A \longrightarrow 2^B$ یک چند تابعی باشد. اگر $x \in A$ چنان موجود باشد که $d(x, F(x)) = d(A, B)$ (که در آن $d(A, B)$ همان $dist(A, B)$ می‌باشد) آن‌گاه x را بهترین تقریب چند تابعی F می‌نامند.

تعریف ۱۲.۱.۱ متریک هاوسدورف و چند تابعی‌های غیر توسیعی:

متریک هاوسدورف که با نماد H نشان داده می‌شود، روی زیر مجموعه های بسته و کراندار فضای متریک X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H(A, B) := \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(A, b)\}.$$

نگاشت $t : X \longrightarrow X$ را غیر توسیعی نامند هرگاه برای $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(t(x), t(y)) \leqslant d(x, y).$$

همچنین چند تابعی $T : X \longrightarrow 2^X$ را غیر توسیعی نامند هرگاه برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$H(T(x), T(y)) \leqslant d(x, y),$$

که در آن H متریک هاوسدورف است.

تعریف ۱۳.۱.۱ چند تابعی‌های شبه غیر توسیعی:

نگاشت $f : E \longrightarrow E$ را غیر توسیعی نسبت به A (A زیر مجموعهٔ ناتهی از E) می‌نامیم اگر برای هر $x \in E$ و $y \in A$ داشته باشیم :

$$d(f(x), f(y)) \leqslant d(x, y).$$

در این صورت اگر $A = E$، f همان نگاشت غیر توسیعی می‌باشد.
اگر $A = Fix(f)$، نگاشت f را شبه‌ـغیر توسیعی می‌نامیم .

تعریف ۱۴.۱.۱ مرکز نگاشت:

فرض کنید X یک فضای $CAT(0)$ و E یک زیر مجموعه ناتهی از X باشد. نقطه $z \in X$ را مرکز نگاشت $t : E \longrightarrow X$ نامند هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$d(z, t(x)) \leqslant d(x, z).$$

مجموعه تمام مراکز نگاشت t را با $Z(t)$ نمایش می‌دهند.

$t : E \longrightarrow X$ را یک $J-$ نگاشت نامند هرگاه پیوسته باشد و $Z(t) \neq \emptyset$.

تعریف ۱۵.۱.۱ مجموعه داخل شونده [۲]:

زیر مجموعه A از فضای X را داخل شونده نامند هرگاه برای هر $x \notin A$، عضو منحصربه فرد $z \in A$ موجود باشد به طوری که برای هر $y \in A$ داشته باشیم

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y).$$

در این صورت، z را ورودی x در A نامند.

ثابت شده که مجموعه های داخل شونده در فضاهای ژئودزیک کامل و $R-$ درخت ها، بسته و محدب هستند.

همچنین نشان داده شده است که گردایه مجموعه‌های داخل شونده در یک فضای ژئودزیک کامل، دارای خاصیت هلی است.

---

[۲] Gated set

تعریف ۱۶.۱.۱ εـغشای بسته:

برای زیر مجموعه ناتهی A از فضای متریک X، εـغشای بسته A را که با $N_\varepsilon(A)$ نمایش می‌دهند، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$N_\varepsilon(A) := \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}.$$

تعریف ۱۷.۱.۱ چند تابعی نیم پیوسته پائینی:

فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. چند تابعی $F : X \longrightarrow ۲^Y$ را نیم پیوسته پایینی نامند هرگاه برای هر مجموعه باز $B \subseteq Y$، $F^{-۱}(B)$ در X باز باشد، که در آن

$$F^{-۱}(B) := \{x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

تعریف ۱۸.۱.۱ چند تابعی نیم پیوسته بالایی:

فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. چند تابعی $F : X \longrightarrow ۲^Y$ را نیم پیوسته بالایی نامند هرگاه برای هر مجموعه بسته $B \subseteq Y$، $F^{-۱}(B)$ در X بسته باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱ چند تابعی تقریباً نیم پیوسته پایینی:

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک، (Y, d) یک فضای متریک و $F : X \longrightarrow ۲^Y$ یک چند تابعی باشد. F را تقریباً نیم پیوسته پایینی نامند هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ و $x \in X$، همسایگی $U(x)$ از x چنان موجود باشد که $\bigcap_{y \in U(x)} N_\varepsilon(F(y)) \neq \emptyset$.

تعریف ۲۰.۱.۱ نگاشت شبه محدب:

فرض کنید M یک زیر مجموعه محدب از $\mathbb{R}-$ درخت X باشد. چند تابعی $F : M \longrightarrow 2^X$ را شبه محدب نامند هرگاه برای هر مجموعه محدب $C \subseteq X$، $F^{-1}(C)$ محدب باشد.

تعریف ۲۱.۱.۱ نگاشت های تعویض پذیر:

فرض کنید E زیر مجموعه‌ای از فضای متریک X باشد. نگاشت $t : E \longrightarrow E$ و چند تابعی $T : E \longrightarrow 2^X$ با این خاصیت که برای هر $x \in X$، $T(x) \cap E \neq \emptyset$، را تعویض پذیر نامند هرگاه برای هر $x \in X$ و $y \in T(x) \cap E$ داشته باشیم $t(y) \in T(t(x)) \cap E$.

تعریف ۲۲.۱.۱ نگاشت های به طور ضعیف تعویض پذیر:

نگاشت های f و T را به طور ضعیف تعویض پذیر نامند هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$f(\partial_X T(x)) \subset T(f(x)),$$

که در آن $\partial_X Y$ نماد مرز Y نسبت به X است.

تعریف ۲۳.۱.۱ نگاشت انقباضی:

فرض کنید E زیر مجموعه‌ای از فضای متریک X باشد. نگاشت $f : E \longrightarrow X$ را انقباضی نامند هرگاه $k \in (0, 1)$ چنان موجود باشد که برای هر $x, y \in E$ داشته باشیم

$$d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y).$$

توجه کنید که هر نگاشت انقباضی، غیر توسیعی است.

تعریف ۲۴.۱.۱ پوشش یک مجموعه:

برای زیر مجموعه M از فضای متریک X، پوشش M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$COV_X(M) := \bigcap_{\alpha}\{B_\alpha \subset X : \text{یک گوی بسته باشد } B_\alpha \text{ و } M \subseteq B_\alpha\}.$$

تعریف ۲۵.۱.۱ نامعادله CN:

فرض کنید X یک فضای $CAT(0)$، $x, y_1, y_2 \in X$ و y_0 نقطه میانی قطعه $[y_1, y_2]$ باشد. در این صورت، نامساوی

$$d(x, y_0)^2 \leqslant \frac{1}{2}d(x, y_1)^2 + \frac{1}{2}d(x, y_2)^2 - \frac{1}{4}d(y_1, y_2)^2$$

را نامعادله CN می‌نامند.

ثابت شده که یک فضای ژئودزیک $CAT(0)$ است اگر و تنها اگر در نامعادله CN صدق کند([۶]).

تعریف ۲۶.۱.۱ مجموعه درونی:

فرض کنید M یک زیرمجموعه از $R-$ درخت کامل X باشد. برای هر $m \in M$، مجموعه درونی M در نقطه m را با $I_M(m)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$I_M(m) := (\cup\{(m, y]; (m, y] \cap M \neq \emptyset\}) \cup \{m\}.$$

اگر $G : M \longrightarrow 2^M$ و $F : M \longrightarrow 2^X$ دو چند تابعی باشند، F را به طور ضعیف درونی نسبت به G نامند هرگاه برای هر $m \in M$ و $y \in G(m)$ داشته باشیم $F(m) \cap I_M(y) \neq \emptyset$.

تعریف ۲۷.۱.۱ شعاع و مرکز تقارن:

فرض کنید X یک فضای $CAT(0)$ کامل و (x_n) یک دنباله کراندار در X باشد. برای هر $x \in X$ تعریف کنید

$$r(x,(x_n)) := \lim{}_{n\to\infty} \sup d(x,(x_n)).$$

شعاع تقارن (x_n) را که با نماد $r((x_n))$ نمایش می‌دهند، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$r((x_n)) := \inf\{r(x,(x_n)); x \in X\}.$$

مرکز تقارن (x_n) را که با نماد $A((x_n))$ نمایش می‌دهند، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A((x_n)) := \{x \in X; r(x,(x_n)) = r((x_n))\}.$$

تذکر ۱.۱.۱ [۱۰] ثابت شده که اگر C یک زیر مجموعه بسته و محدب از X و $\{x_n\}$ یک دنباله کراندار در C باشد، آنگاه مرکز تقارن $\{x_n\}$ در C قرار دارد.

تعریف ۲۸.۱.۱ دنباله $\Delta-$ همگرا:

دنباله (x_n) را $\Delta-$ همگرا به $x \in X$ نامند هرگاه برای هر زیر دنباله (u_n) از (x_n)، x مرکز مجانبی منحصر به فرد (u_n) باشد. در این حالت می‌نویسیم $\Delta - \lim(x_n) = x$ و x را $\Delta-$ حد (x_n) می‌نامند.

هر فضای $CAT(0)$ دارای ویژگی (اُپیال)[۳] است، یعنی اگر (x_n) یک دنباله در X باشد که $\Delta - \lim x_n = x$، آن گاه برای هر $y \in X$ که $x \neq y$، داریم $\limsup_n d(x_n,x) \leq \limsup_n d(x_n,y)$.

[۳] Opial