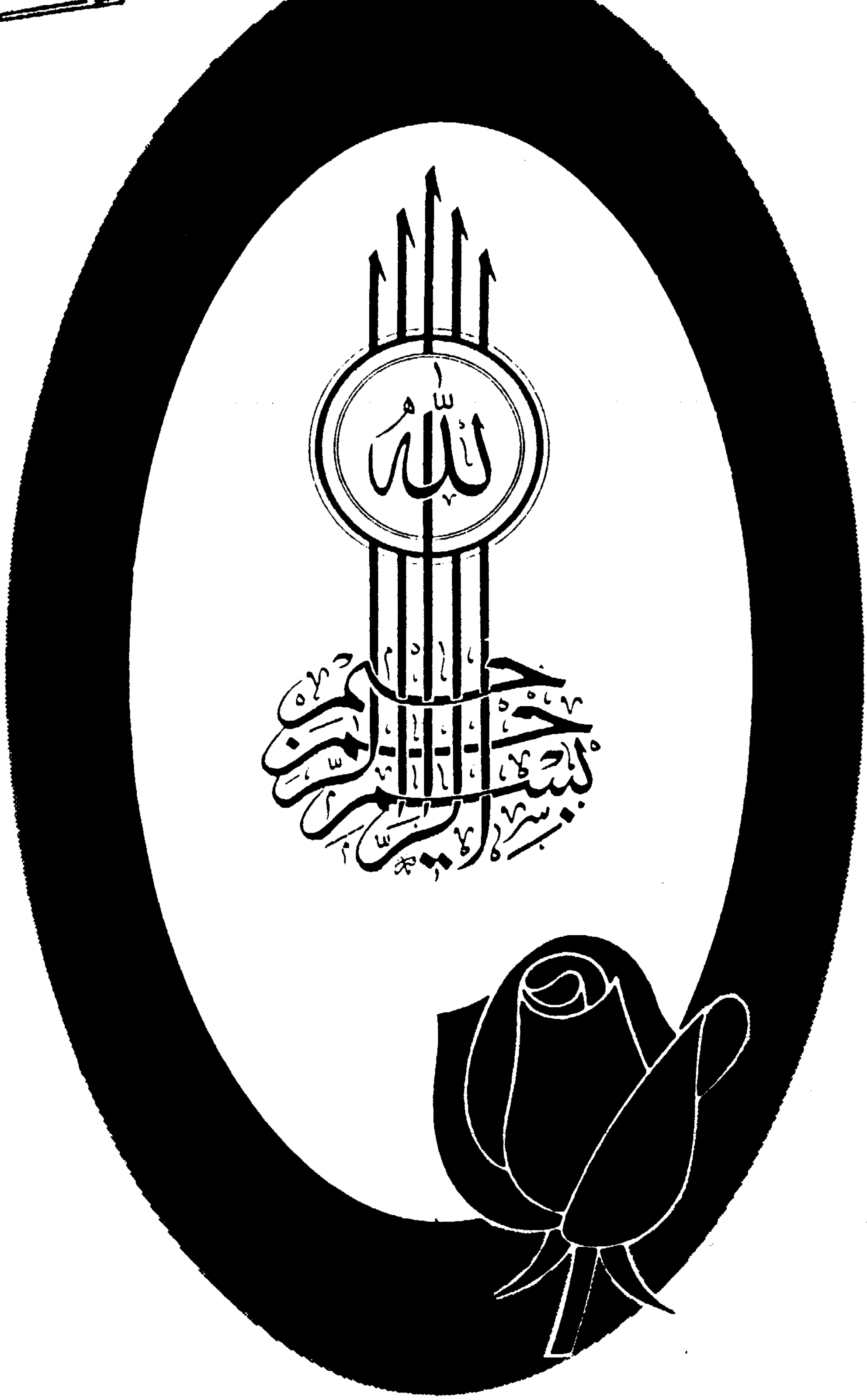

۲۵۱۷۵

دانشگاه فردوسی «مشهد»

دانشکده علوم

رسالهٔ برای اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد ریاضی محض

موضوع:

بررسی بعضی از خواص جبری و توپولوژیکی درنیمگروههای نیم توپولوژیکی $S(X)$

نگارش: نادعلی مسلمی‌پور

استاد راهنما: آقای دکتر محمدعلی پورعبدالله‌نژاد

دانشیار گروه ریاضی - دانشگاه فردوسی «مشهد»

هیأت داوران:

۱ - آقای دکتر اسدالله نیکنام

استاد گروه ریاضی - دانشگاه فردوسی «مشهد»

۲ - آقای دکتر علیرضا مدقالچی

دانشیار گروه ریاضی - دانشگاه تربیت معلم «تهران»

تقدیم به :

پدر و مادر بزرگوارم ، که از هیچ کوششی در راه رسیدن به اهدافم دریغ نورزیدند

و

کلیه عزیزانی ، که در راه اشاعه علوم همچنان می‌کوشند و از خود مایه می‌گذارند.

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکدهٔ علـوم

بررسی بعضی از خواص جبری و توپولوژیکی در نیمگروههای نیم توپولوژیکی $S(X)$

نادعلی مسلمی‌پور

بسمه تعالی

No: | شماره:

Date: | تاریخ :

پیوست :

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ـ گروه ریاضی

Department of Mathematics
Ferdowsi University of Mashhad
P.O.Box 1159-91775,Mashhad
Islamic Republic of Iran

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ آقای نادعلی مسلمی پور دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی در ساعتِ ۱۰ روزِ ۷۴/۴/۱۵ دراتاقِ شمارهٔ ۲۵ ساختمانِ خوارزمی دانشکدهٔ علوم ۲ باحضور امضاءکنندگان ذیل تشکیل‌گردید. پس‌از بررسی و نظر هیأت داوران، پایان‌نامه نامبرده بانمرهٔ نوزده تمام (۱۹/-) موردتأیید قرارگرفت.ت

عنوان رساله : " بررسی بعضی ازخواص جبری وتوپولوژیکی در نیمگروههای نیم توپولوژیکی S(X) "

تعداد واحد : ۶ واحد

داور رساله : آقای دکترعلیرضا مدقالچی
دانشیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم تهران

داور رساله : آقای دکتراسداله نیکنام
استاد گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

استاد راهنما : آقای دکترمحمد علی پورعبداله نژاد
دانشیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

مدیرگروه ریاضی : آقای دکتراسداله نیکنام
استاد گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

بلواروکیل آباد - سه راه کوکا - خیابان شهیدباهنر - دانشکده علوم ۲ - صندوق پستی ۱۱۵۹ -کد ۹۱۷۷۵ تلفن : ۸۱۷۷۴۹-۰۵۱
فاکس ۸۱۷۷۴۹-۰۵۱ ، پست الکترونیکی e-mail:math.sci@toos.um.ac.ir , Tel : 0098-51-817749 , Fax : 051-817749

«تشکر و قدردانی»

حمد و سپاس می‌گویم یگانه‌ای را که زبان از عنایت شکرش قاصر است و خرد در ژرفای معرفتش عاجز، او که مهربان است و حقیر را به اتمام دوره‌ای دیگر از تحصیلاتم توفیق کرامت فرمود؛ امید است آنچه را که آموخته‌ام در راه خیر و صلاح ایران عزیز، بکار گیرم.

در اینجا وظیفه خود می‌دانم؛ مراتب تشکر و قدردانی خود را از استاد ارجمندم جناب آقای دکترپورعبدالله نژاد داورانی ابراز دارم که با راهنمایی‌های بیدریغشان توانستم این کار تحقیقی را به اتمام برسانم. هم‌چنین فریضهٔ خود می‌دانم از *Prof. K.D.Magill* که با ارسال به موقع مقالات مورد نیاز، بنده را در انجام این کار تحقیقی یاری نموده‌اند، تشکر و قدردانی بنمایم.

در خاتمه از همهٔ دوستان، بخصوص آقایان صفری دلوئی و ابراهیمی ویشکی بخاطر کمک‌های بیدریغشان در تمام مراحل کار، تشکر کرده و موفقیت ایشان را از ایزد منّان خواهانم.

« بسم‌الله الرّحمن‌الرّحیم »

« مقدمه »

رسالهٔ حاضر، شامل چهار فصل است. فصل اول، که در واقع پیشنیاز بقیهٔ فصول می‌باشد، مروری دارد بر تعاریف و قضایایی که، به نحوی در سه فصل آخر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم، اعضای اول هر یک از نیمگروههای $S_0(I)$, $S(R)$ را بطور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش اول، این فصل که مربوط است به اعضای اول $S(R)$؛ نشان می‌دهیم که عنصری مانند $f\in S(R)$ اول است اگر و فقط اگر برو بوده و دقیقاً" دو نقطهٔ اکسترمم موضعی داشته باشد و در بخش دوّم نشان می‌دهیم که $f\in S(I)$ اول است اگر و فقط اگر با یکی از سه تابع V,L و یا Z (که بعداً" معرفی خواهند شد) بطور توپولوژیکی هم ارز باشند. در حقیقت، ثابت می‌کنیم که اعضای اول $S_0(I)$ به سه دسته تقسیم می‌شوند.

فصل سوم ؛ اختصاص دارد به معرفی چند زیر نیمگروه متناهیا" تولید شده و چگال در $S(R)$ و $S(I)$. در بخش اول این فصل نشان می‌دهیم $G(R)$، گروه همیومرفیسم‌های برو در $S(R)$، همراه با عناصر اول مانند $f\in S(R)$ نسبت به توپولوژی فشرده - باز در $S(R)$ چگال هستند. در بخش دوّم نیز، ثابت می‌کنیم گروه یکه‌های $S(R)$ همراه با هر عنصر اول $S_0(I)$ در $S(I)$ نسبت به توپولوژی همگرایی نقطه‌ای چگال است و در ادامه، چند زیر نیمگروه متناهیا" تولید شده با دو عنصر، چهار عنصر ... چگال در $S(I)$ را معرفی می‌کنیم.

در فصل چهارم؛ نشان می‌دهیم $S(I)$ و $S(R)$ دارای یک زنجیر، نامتناهی و نزولی از ایده‌آلها هستند و همچنین نشان می‌دهیم که $S(I)$ دارای یک ایده‌آل ماکزیمال و یک ایده‌آل

مینیمال می‌باشد و سپس این موارد را برای ایده‌آلهای یک طرفهٔ آنها نیز تا حدی تعمیم می‌دهیم.

لازم به ذکر است که بعضی از قسمت‌های این رساله با علامت‌های (**) و (*) مشخص شده‌اند. دستهٔ اوّل، یعنی قسمتهایی که با (**) مشخص شده‌اند، مطالبی هستند که علاوه بر برهان، صورت این احکام نیز در هیچ مرجعی یافت نمی‌شود و همگی از مؤلف (رساله) می‌باشد و بقیه مطالبی که با (*) مشخص کردیم گزاره‌هایی هستند که اثبات‌های آنها در کتب و مقالاتی که بعنوان مرجع مورد استفاده قرار گرفته‌اند موجود نیست و همچنین سعی کرده‌ایم تا بطور کامل مقالات [8] و [1] و [15] را بررسی کنیم و بین آنها ارتباطی را که منجر به شکل گرفتن این رساله شد؛ بر قرار کنیم.

نادعلی مسلمی‌پور - تیرماه ۱۳۷۴

« فهرست »

«فصل اول»   نیمگروهها و ایده‌آلها:

(۱-۱)

(۱-۱-۱) تعریف: یک نیمگروه عبارتست از زوج $(S,.)$ که در آن S یک مجموعه غیرتهی و $S \times S \longrightarrow S$:. یک عمل بسته و شرکت‌پذیر می‌باشد ؛ یعنی به ازاء هر $x,y,z\in S$

$$(x,y) \longmapsto x.y$$

داریم: $(x.y).z = x.(y.z)$. برای سادگی؛ $x.y$ را با xy نمایش می‌دهیم .

عنصر $1\in S$ را عنصر همانی (واحد) S می‌نامیم اگر به ازاء هر $s\in S$ داشته باشیم: $1s = s1 = s$. S را نیمگروه آبلی گوییم هرگاه $st = ts$ برای هر $s,t\in S$.

مثال: فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی باشد. $S(X)$ را مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته از X بتوی X فرض می‌کنیم. به سادگی قابل بررسی است که $S(X)$ همراه با ترکیب توابع یک نیمگروه تشکیل می‌دهد ، در این نیمگروه تابع همانی X ؛ عنصر همانی آن می‌باشد .

(۱-۱-۲) نمادگذاری: فرض کنیم S یک نیمگروه باشد . برای هر $t\in S$ نگاشت‌های $\lambda_t:S \longrightarrow S$ و $\rho_t:S \longrightarrow S$ را با ضابطه‌های $\rho_t(s) = st$ و $\lambda_t(s)=ts$ به ازاء هر $s\in S$ تعریف می‌کنیم .

برای زیر مجموعه‌های A و B در S تعریف می‌کنیم : $At= \rho_t(A)$ و $tA= \lambda_t(A)$. و

$$AB=\bigcup_{t\in B}At=\bigcup_{t\in A}tB=\{st:s\in A,t\in B\} \quad \text{و} \quad t^{-1}A=\lambda_t^{-1}(A) \quad \text{و} \quad At^{-1}=\rho_t^{-1}(A)$$

که در آنها: $\lambda_t(A)=\{\lambda_t(a):a\in A\}$ و $\lambda_t^{-1}(A)=\{x|\lambda_t(x)=y \text{ و } y\in A\}$ بطور مشابه ؛ $\rho_t(A)$ و $\rho_t^{-1}(A)$ قابل تعریف هستند .

(۱-۱-۳) تعریف: فرض کنید S نیمگروه همراه با یک توپولوژی باشد. S را یک ***نیمگروه نیم توپولوژیکی*** گوییم؛ اگر عمل ضرب $S \times S \longrightarrow S$: بطور مجزا پیوسته باشد.

$$(s,t) \longmapsto st$$

به عبارت دیگر؛ برای هر $s \in S$ نگاشت‌های $\rho_s : S \longrightarrow S$ و $\lambda_s : S \longrightarrow S$ پیوسته باشند. S را ***نیمگروه توپولوژیکی*** گوییم؛ هرگاه عمل ضرب $S \times S \longrightarrow S$:پیوسته (بطور توأم) باشد.

به سادگی دیده می‌شود که هر نیمگروه توپولوژیکی، یک نیمگروه نیم توپولوژیکی است ولی عکس این مطلب درست نیست.

(۱-۱-۴) تعریف: به فرض S نیمگروهی با عنصر همانی باشد. عنصر $x \in S$ را یکه می‌نامیم هرگاه $y \in S$ وجود داشته باشد بطوریکه $xy=yx=1$.

(۱-۱-۵) تعریف: به فرض S نیمگروهی با عنصر همانی باشد. عنصر $x \in S$ را اول گویند اگر یکه نباشد و اگر $x=yz$ آنگاه یا y و یا z یکه باشند.

تذکر: می‌دانیم $S(X)$ همراه با ترکیب توابع؛ نیمگروهی با عنصر همانی می‌باشد. نشان می‌دهیم که $f \in S(X)$ یکه است اگر و فقط اگر $f : X \longrightarrow X$ هیومرفیسم‌برو باشد.

برهان: فرض کنیم $f \in S(X)$ یکه باشد. بنابه تعریف، وجود دارد $g \in S(X)$ بطوریکه $f \circ g = g \circ f = 1$ (1 در واقع تابع همانی X می‌باشد.) لذا $f^{-1} = g$ و چون g پیوسته است لذا f هیومرفیسم است. حال اگر $f : X \longrightarrow X$ هیومرفیسم برو باشد؛ f و f^{-1} هر دو پیوسته هستند و می‌دانیم:

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1$ و $f^{-1} \in S(X)$ لذا f یکه خواهد بود.

(۱-۱-۶) تعریف: فرض کنید S یک نیمگروه باشد و $\varnothing \neq T \subseteq S$. T را ***ایده‌آل چپ (راست)*** S گوییم اگر $ST \subseteq T$ $(TS \subseteq T)$.

T را ایده‌آل ***دو طرفه (= ایده‌آل)*** S گوییم اگر T هم ایده‌آل چپ و هم ایده‌آل راست S باشد. و T را

زیرنیمگروه S گوییم؛ هرگاه $T.T=T^2\subset T$.

مثال: فرض کنید $S=\{a,b,c,d\}$، عمل دوتایی را بصورت

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c
d	c	c	c	c

تعریف می‌کنیم.

$T_1=\{a,b,c\}$ ایده‌آل چپ S است ولی ایده‌آل راست نیست و $T_2=\{b\}$ ایده‌آل راست است ولی ایده‌آل چپ نمی‌باشد و $T_3=\{b,c\}$ یک ایده‌آل است و $T_4=\{a,b\}$ نیز یک زیر نیمگروه S می‌باشد.

تذکر: اشتراک هر تعداد دلخواه زیر نیمگروه S؛ مجدداً یک زیر نیمگروه S می‌باشد.

(۱ـ۱ـ۷) تعریف: فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از نیمگروه S باشد. اشتراک همهٔ زیر نیمگروههای S؛ شامل A را زیرنیمگروه تولید شده، توسط A می‌نامیم و عناصر A را مولد آن می‌نامیم.

زیرنیمگروه تولید شده توسط A را به $<A>$ نمایش می‌دهیم و اگر $S=<A>$؛ گوییم S بوسیلهٔ A تولید می‌شود.

نیمگروه تولید شده بوسیلهٔ یک عنصر رانیمگروه دوری می‌نامیم.

زیرنیمگروه تولید شده بوسیلهٔ A؛ عبارتست از مجموعهٔ تمام عناصری که بصورت $s_1\ s_2 \ldots s_n$ می‌باشند؛ که در آن $s_i \in A$ و $1\leq i\leq n$ و $n\in N$.

(۱ـ۱ـ۸) تعریف: یک ایده‌آل چپ (به ترتیب: ایده‌آل راست، ایده‌آل) نیمگروه S ***ایده‌آل چپ مینیمال*** S گفته می‌شود، اگر شامل هیچ ایده‌آل چپ (به ترتیب: ایده‌آل راست، ایده‌آل) سرهٔ S نباشد.

در حالت کلی لازم نیست که هر زیرنیمگروهی ایده‌آل چپ مینیمال (راست مینیمال) و یا ایده‌آل مینیمال داشته باشد. اما ممکن است در نیمگروههایی تعداد ایده‌آل‌های چپ (راست، دوطرفه)

نامتناهی باشد.

مثال: (آ) در نیمگروه آبلی $(N,+)$ هیچ ایده‌آل مینیمال وجود ندارد.

(ب) به فرض L و R دو مجموعهٔ غیر خالی باشند. روی مجموعهٔ حاصلضرب دکارتی L و R (یعنی $L\times R$) عمل ضرب رابصورت $(l,r)(l',r')=(l,r')$ تعریف می‌کنیم.

به آسانی قابل مشاهده است که $\{L\times\{r\}:r\in R\}$ و $\{\{l\}\times R:l\in L\}$ به ترتیب مجموعهٔ ایده‌آلهای چپ مینیمال و مجموعهٔ ایده‌آلهای راست مینیمال در نیمگروه $L\times R$ می‌باشند که هر کدام به ترتیب به اندازهٔ $|R|$ و $|L|$ عنصر دارند و در صورت نامتناهی بودن $|R|$ و $|L|$، این تعداد نامتناهی خواهد بود.

(۱-۱-۹) قضیه: اگر نیمگروه S یک ایده‌آل مینیمال مانند K داشته باشد؛ آنگاه K اشتراک همهٔ ایده‌آلهای S است. بویژه یک نیمگروه مانند S حداکثر یک ایده‌آل مینیمال دارد.

برهان: فرض کنید I یک ایده‌آل دلخواه S باشد. بدیهی است که $IK\subset I\cap K$ و $IK\neq\varnothing$؛ لذا $I\cap K\neq\varnothing$. از طرفی $I\cap K$ یک ایده‌آل S است، لذا $I\cap K\subset K$ بنا به مینیمال بودن ایده‌آل K داریم: $I\cap K=K$ واین هم بدین معناست که $K\subset I$ لذا $K\subset\cap I$ از طرفی K نیز ایده‌آل است، بنابراین $K\supset\cap I$ و بنابراین $K=\cap I$.

(۱-۱-۱۰) قضیه: به فرض S یک نیمگروه باشد و $I\subseteq S$. در این صورت I ایده‌آل مینیمال است اگر و فقط اگر $SIS=I$.

برهان: رجوع کنید به [2، صفحهٔ 16].

اشتراک همهٔ ایده‌آلهای نیمگروه S را به $K(S)$ نشان می‌دهیم.

تعریف: ایده‌آل سرهٔ U از نیمگروه S را ایده‌آل ماکزیمال S گوییم اگر مشمول در هیچ ایده‌آل سرهٔ S نباشد.

مجموعهٔ $I=\{b,c,d\}$ در مثال بعد از تعریف (۱-۱-۶) ایده‌آل ماکزیمال S می‌باشد.

(۱ـ۲) کلیاتی از توپولوژی:

(۱ـ۲ـ۱) تعریف: فضای توپولوژیکی X را ناهمبند کلی نامیم اگر هر دو نقطهٔ متمایز با یک ناهمبندی X از هم جدا شوند، بدین معنی که به ازاء هر دو نقطهٔ $y,x\in X$ که $x\neq y$، ناهمبندی $X=A\cup B$ با دو شرط $x\in A$ و $y\in B$ وجود داشته باشد. واضح است که چنین فضایی هاسدورف است و اگر بیش از یک نقطه داشته باشد فضای ناهمبند خواهد بود. به عبارت دیگر؛ فضای توپولوژیکی X را ناهمبند کلی می‌نامیم هرگاه مجموعه‌های همبند آن حداکثر تک عضوی باشند.

مثال: مجموعه‌های تک عضوی و فضای گسسته، فضاهای ناهمبند کلی هستند. همچنین $Q\subseteq R$ نیز ناهمبند کلی است. کافیست نشان دهیم هر دو نقطهٔ متمایز $y,x\in Q$ توسط یک ناهمبندی Q از هم جدا می‌شوند. فرض کنیم $x<y$ لذا نقطه‌ای مانند $z\in Q^c\cap(x,y)$ وجود دارد: (می‌دانیم $Q^-=R$). حال فرض کنید $A=(-\infty,z)\cap Q$ و $B=(z,+\infty)\cap Q$؛ بدیهی است که (A,B) یک ناهمبندی برای Q است و $x\in A$ و $y\in B$.

(۱ـ۲ـ۲) تعریف: فضای توپولوژیکی X را نرمال گوییم در صورتیکه به ازاء هر دو مجموعهٔ بسته و مجزای A و B؛ دو مجموعهٔ باز و مجزا مانند U و V موجود باشند بطوریکه $A\subseteq U$ و $B\subseteq V$.

(۱ـ۲ـ۳) قضیه: هر فضای هاسدورف فشرده، نرمال است.

برهان: رجوع کنید به [12، صفحهٔ 133].

(۱ـ۲ـ۴) قضیه (لم اوریزون):

X را فضای نرمال، A و B را زیر فضاهای بسته و مجزای X فرض کنید. آنگاه تابع حقیقی و پیوستهٔ f تعریف شده روی X وجود دارد که تمام مقادیر آن در بازهٔ واحد بستهٔ [1 و 0] واقع‌اند، بطوریکه $f(A)=0$ و $f(B)=1$.

برهان: رجوع کنید به [12، صفحهٔ 135].

نتیجه: فرض کنید X فضای نرمال و A و B زیر فضاهای بسته و مجزای X باشند. و فرض کنید

[a,b] بازهٔ بستهٔ دلخواهی از R باشد؛ آنگاه یک تابع حقیقی پیوسته مانند f تعریف شده روی X که تمام مقادیرش در [a,b] واقعاند ، وجود دارد ، بطوریکه $f(A)=a$ و $f(B)=b$.

برهان: اگر $a=b$ ، کافیست به ازاء هر x تابع f را بصورت $f(x)=a$ تعریف کنیم .

اگر $a\neq b$ ، می‌توان فرض کرد $a<b$. اگر g تابعی با خواص بیان شده در لم اوریزون باشد، آنگاه $f=(b-a)g+a$ دارای خواص مورد نظر نتیجه است .

(۱ـ۲ـ۵) قضیه (قضیهٔ گسترش تیتزه): X فضای نرمال ، F را زیر فضای بسته و f را تابعی حقیقی و پیوسته که روی F تعریف شده است و مقادیرش در بازهٔ بسته [a,b] واقعاند ، فرض کنید . آنگاه f گسترشی پیوسته مانند f' دارد که روی تمام X تعریف شده است و مقادیر آن نیز در [a,b] واقعاند .

برهان: رجوع کنید به [12 ، صفحهٔ 136] .

نمادگذاری: فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیکی باشند . مجموعهٔ تمام توابع پیوسته از X بتوی Y را با نماد C(X,Y) نشان می‌دهیم .

(۱ـ۲ـ۶) توپولوژی همگرایی نقطه‌ای:

فرض کنید Y,X فضاهای توپولوژیکی باشند . نقطه‌ای مانند $x\in X$ و مجموعهٔ بازی مانند U درفضای Y داده شده‌اند ، قرار می‌دهیم: $S(x,U)=\{f \mid f\in C(X,Y)$ و $f(x)\in U\}$.

مجموعه‌های بصورت S(x,U) تشکیل زیر پایه‌ای برای یک توپولوژی بر C(X,Y) می‌دهند ، این توپولوژی را توپولوژی همگرایی نقطه‌ایی (یا توپولوژی نقطه - باز) می‌نامند .

دلیل اینکه این توپولوژی را توپولوژی همگرایی نقطه‌ای نامیدیم از قضیهٔ ذیل ناشی می‌شود .

قضیه: دنبالهٔ (f_n) از توابع در توپولوژی همگرایی نقطه‌ای به تابع f همگراست اگر و فقط اگر به ازاء هر $x\in X$ ، دنبالهٔ $f_n(x)$ از نقاط Y به نقطهٔ $f(x)$ همگرا باشد .

برهان: رجوع کنید به [9 ، صفحهٔ 281] .

مثال: فضای C(I,R) راکه در آن $I=[0,1]$ در نظر می‌گیریم . دنبالهٔ (f_n) از توابع پیوسته که با