دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده‌ی علوم

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

آمار ریاضی

موضوع:

احتمال فازی

نگارش:

افروز شکوری کتیگری

اساتید راهنما:

دکتر مقتدی هاشمی پرست و
دکتر هاشم پروانه‌مسیحا

استاد مشاور:

دکتر عماد روغنیان

مهر ۱۳۸۹

تقدیم به:

آنان که اولین بار لبانم را با واژه؛
گام‌هایم را با خاک؛
و انگشتانم را با قلم آشنا کردند

پدر بزرگوار و مادر عزیزم

تشکر و قدردانی

. . . و چنانک به نادر افتد که مردمی که نجارت ناآموخته تختی نیک تواند تراشید، به نادر افتد که مردمی منطق ناآموخته علمی مکتسب بر وجهی کامل حاصل تواند کرد. بل، همچنانک بیشتر مردم که نجارت ندانند قادر باشند بر آنک چوبی بتراشند اما واثق نباشند به آنک آن چوب به آن تراشیدن به اصلاح آید یا نیاید، بلک تباه شود، بیشتر مردم که منطق ندانند در معانی تصرفی توانند کرد، اما واثق نباشند به آنک از آن تصرف علمی حاصل شود یا نشود، بلک در حیرت بیفزاید، یا در ضلالت افکند. و نه هرکه کاری کند داند که چه میکند، یا چه میباید کرد، بلک بسیار کسان باشند که در کارها شروع کنند بر سبیل خبط. و همچنین باشد حکم کسانی که طلب علوم کنند و بر صناعت منطق واقف نباشند.

خواجه نصیرالدین طوسی

اکنون که مرحله‌ای دیگر از دوران تحصیل را به پایان می‌رسانم، فرصت را مغتنم شمرده و بر خود لازم می‌دانم از پدر و مادر عزیز و مهربانم که همواره مشوق من بوده‌اند، تشکر و قدردانی کنم.

همچنین، از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقایان دکتر مقتدی هاشمی پرست و دکتر هاشم پروانه‌مسیحا که راهنمای اینجانب در دوره‌ی کارشناسی ارشد بوده‌اند و هدایت این پایان‌نامه را بر عهده داشته‌اند، و استاد مشاور بزرگوارم، جناب آقای دکتر روغنیان ، کمال تشکر و سپاس را دارم.

در انتها، وظیفه‌ی خود می‌دانم که از حمایت‌های مدیریت محترم تحصیلات تکمیلی دانشکده، همکاری انتشارات دانشکده‌ی علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی و زحمات کلیه‌ی معلمین، دبیران و اساتید خود در مقاطع مختلف تحصیلی، تقدیر و تشکر نمایم.

باشد که گوشه‌ای از زحماتشان را ارج نهاده‌باشم.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا به مروری بر مفاهیم فازی، احتمال فازی، اندازه های فازی و احتمال شرطی ذاتی پرداخته شده و برای تعیین تابع عضویت از احتمال شرطی ذاتی استفاده شده است در ادامه به بیان رگرسیون فازی و روش های مختلف برآورد و همچنین بیان نوع خاصی از رگرسیون به نام رگرسیون ریج پرداخته و رگرسیون ریج را وقتی که مشاهدات متغیر وابسته اعداد فازی ذوزنقه ای باشند تعمیم داده ایم و در نهایت یک مثال کاربردی از آن آوردیم.

واژه های کلیدی: نظریه فازی؛ اعداد فازی؛ احتمال فازی؛ احتمال شرطی ذاتی؛ تابع عضویت؛ تابع امکان؛ تابع لزوم؛ اندازه اطلاعات؛ رگرسیون فازی؛ رگرسیون ریج.

فهرست مندرجات

مقدمه

ریاضیات یک فرا مجموعه از منطق بولی است که بر مفهوم درستی نسبی، دلالت می‌کند. منطق کلاسیک هر چیزی را بر اساس یک سیستم دوتایی نشان می‌دهد (درست یا غلط، ۰یا ۱ ، سفید یا سیاه) ولی منطق فازی درستی هر چیزی را با یک عدد که مقدار آن بین صفر و یک است نشان می‌دهد. مثلاً اگر رنگ سیاه را عدد صفر و رنگ سفید را عدد ۱ نشان دهیم، آنگاه رنگ خاکستری عددی نزدیک به صفر خواهد بود. در سال ۱۹۶۵ دکتر لطفی زاده نظریه سیستم های فازی را معرفی کرد. منطق فازی معتقد است که ابهام در ماهیت علم است. بر خلاف دیگران که معتقدند که باید تقریب ها را دقیق تر کرد تا بهره وری افزایش یابد.

منطق فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی زاده[۱]، از دانشگاه برکلی ارائه شد. در سال ۱۹۷۲میشیوسوگنو[۲] از انسیتو تکنولوژی توکیو نظرات زاده را با ارائه مفاهیم اندازه فازی و انتگرال فازی تعقیب کرد و پس از آن ابراهیم ممدانی[۳] از دانشگاه لندن برای نخستین بارمنطق فازی را در زمینه کنترل (یک موتور بخار ساده) به کار گرفت. اولین کاربرد صنعتی منطق فازی در سال ۱۹۷۴ توسط اسمیت[۴] از دانمارک برای کنترل کوره سیمان بود. در دهه ۱۹۸۰ شرکت های ژاپنی اقدام به استفاده از منطق فازی در زمینه های مختلف مثل تصفیه آب، کنترل حرکت قطارها و... کردند به طوری که در اوایل دهه ۱۹۹۰ژاپنی ها از پیشتازان کاربرد منطق فازی بودند. انجمن بین المللی سیستم های فازی به عنوان اولین سازمان آکادمیک برای نظریه پردازان منطق فازی و کاربرد آن در سال ۱۹۸۴ تأسیس شد. در سال ۱۹۸۹ انجمن سیستم ها و نظریه فازی پایه‌گذاری شد و آزمایشگاه بین المللی مهندسی فازی در ژاپن افتتاح گردید.

---

[۱] zadeh
[۲] sugeno
[۳] Mamdani
[۴] smith

[۱] مقاله اصلی که در این پایان نامه از آن بهره گرفته ایم برمبنای احتمال شرح داده شده توسط کالتی و اسکزافاوا [۵] در سال ۱۹۹۶و۱۹۹۹ است. کالتی و اسکزافاوا مفاهیمی از ذاتی بودن[۶] که برگرفته از کتاب فینتی[۷] است بیان کردند و همچنین در سال ۱۹۹۶ و ۲۰۰۲، تابعی از پیشامدهای شرطی $P(E|H)$ که در روابط کلاسیک تعریف شده توسط فینتی در سال ۱۹۴۹و پاپر[۸] در سال ۱۹۵۹ صدق می‌کند، ارائه شد که منجر به تعریف مستقیم $P(E|H)$ بدون نیاز به داشتن $P(E \wedge H)$ و $P(H)$ می‌شود. کالتی و اسکزافاوا تابع عضویت را براساس احتمال شرطی ذاتی بیان کردند.[۱]
کالتی و اسکزافاوا در سال ۲۰۰۳ بیان کردند که احتمال شرطی ذاتی با اندازه فازی یک امکان است و همچنین احتمال شرطی ذاتی که غیر یکنوا نسبت به شمول است را به عنوان یک اندازه اطلاعات تعریف کرده‌اند.
رگرسیون فازی در سال ۱۹۸۲توسط تاناکا[۹] پیشنهاد شد، در سال ۱۹۷۸ دوبیس و پرید[۱۰] اعداد فازی را به عنوان زیر مجموعه فازی از خط حقیقی تعریف کردند. در سال ۱۹۹۱ کافمن[۱۱] فاصله دو عدد فازی را بوسیله α برش از اعداد فازی تعریف کرد.
هدف اصلی این پایان نامه جادادن تئوری فازی و مفاهیم مرتبط با آن بر حسب احتمال شرطی است، در مباحث فازی هدف پیدا کردن تابع عضویت است، تابع عضویت بنا به اعتقاد افراد مختلف، متفاوت تعریف می‌شود بنابراین تابع عضویت با تغییر اعتقادات افراد مختلف عوض می‌شود. هر کسی تابع عضویت را به گونه ای تعریف می‌کند که در مقاله اصلی تابع عضویت براساس احتمال شرطی ذاتی بیان شده است. در فصل اول ابتدا به مروری بر نظریه فازی، مفاهیم فازی وکاربرد سیستم های فازی پرداخته شده، در فصل دوم به تعریف احتمال فازی و اندازه‌ی فازی و اندازه امکان و تابع امکان و تابع عضویت و مقایسه بین امکان و احتمال پرداخته شده و در فصل سوم تعاریف و قضایای احتمال شرطی ذاتی و روشی برای بررسی احتمال شرطی ذاتی بیان شده است. در فصل چهارم رگرسیون فازی و روش های مختلف برآورد بیان شده است و در فصل آخر به بیان نوع خاصی از رگرسیون به نام رگرسیون ریج[۱۲] پرداخته شده، در نهایت رگرسیون فازی ریج را وقتی که مشاهدات متغیرهای وابسته اعداد فازی ذوزنقه ای باشند تعمیم داده ایم و در نهایت یک مثال کاربردی از آن آوردیم.

[۵] Coletti and Scozzafava
[۶] coherence
[۷] Finetti
[۸] Popper
[۹] Tanaka
[۱۰] Dubois and prade
[۱۱] Kaufmann
[۱۲] Ridge

فصل ۱

نظریه فازی

مقدمه

باید به این نکته توجه کرد که زاده قبل از ارائه چنین مفهومی (که به نوعی عدم قطعیت است) روی مطالبی مانند انتقال Z کار می‌کردکه از مباحث کنترل دقیق مهندسی است، اما او اظهار داشت که محدودیت هایی در چنان دقت و صراحت دیده است. او در مقاله سال ۱۹۷۳خود، این نظریه را اصل ناسازگاری نامید. بر اساس این اصل هنگامی که پیچیدگی یک سیستم از مرز تعیین شده ای فراتر می‌رود، تعریف دقیق و با معنای عملکرد آن سیستم غیر ممکن می‌شود. در این هنگام است که منطق فازی مطرح می‌شود. منظور از منطق فازی استدلال با اعداد فازی و مجموعه های فازی است. در عمل این منطق رایانه ای است که با اعداد فازی در قالب جملات (اگر وآنگاه) یا قوانین تجربی به استدلال می‌پردازد. زاده معتقد است که باید به دنبال ساختن مدلهایی بود که ابهام را به عنوان بخشی از سیستم، مدل کند. در منطق ارسطویی، یک دسته بندی درست و نادرست وجود دارد. تمام گزاره ها درست یا نادرست هستند. اما در منطق فازی گزاره ها مقداری درست و مقداری نادرست هستند. به عنوان مثال گزاره هوا سرد است یک گزاره منطقی فازی است که درستی آن بسته به شرایط جغرافیایی و فرد قضاوت کننده گاهی کم و گاهی زیاد است.

به عنوان مثال جملات زیر را در نظر بگیرید: اگر ماشین بسیارسریع حرکت کرد آنگاه پدال گاز را کمی رها کنید. اگر ماشین زیاد به سمت چپ حرکت کرد، آنگاه فرمان را به راست بگردانید اگر عبورومرور ماشین ها در جهت شمال به جنوب بیشتر است، آنگاه می‌توان چراغ سبز را طولانی کرد. در بالا هر عبارت مجموعه ای فازی است. سنگینی عبور و مرور در هر خیابان

پررفت و آمد، مقداری نسبی است، طولانی بودن زمان توقف چراغ سبز نیز مقداری تقریبی است. پس اعداد نیز فازی هستند و غیر از آن چیز های دیگر نیز می‌توانند فازی باشند، مانند مجموعه ها. اما اینکه یک مجموعه دقیقاً چقدر فازی است؟ چگونه می‌توان میزان فازی بودن را اندازه گرفت؟ این دقیقاً چیزی است که در آنتروپی فازی با آن روبرو می‌شویم. در واقع آنتروپی فازی مقدار فازی بودن یک مجموعه را اندازه می‌گیرد و به این سوال پاسخ می‌دهد که مجموعه های فازی تا چه حد فازی هستند. منظور از آنتروپی، نامشخص بودن و یا بی نظمی در سیستم است. مجموعه های فازی در واقع مجموعه هایی هستند که عناصر متعلق به آنها درجات و حدود تقریبی دارند که آنتروپی فازی این درجات را اندازه گیری می‌کند. توانایی منطق فازی در دسته بندی کیفی در مثال زیر نشان داده شده است. به عنوان مثال اگر بخواهیم با منطق معمولی برخورد کنیم افراد ۴،۳،۲،۱ با قدهای به ترتیب ۱۸۱،۱۷۹،۱۵۱،۱۴۹سانتی متری، به ترتیب کوتاه، متوسط، بلند قد، محسوب می‌شوند. اما با منطق فازی این افراد به ترتیب (۰.۸۹ متوسط و ۰.۱۱ کوتاه) و (۰.۹۱ متوسط و۰.۰۹ کوتاه) و (۰.۸۹ بلند و ۰.۱۱ متوسط) و (۰.۹۱ بلندو ۰.۰۹ متوسط) محسوب می‌شود. در ماتریس زیر عضویت افراد بر حسب قدشان در سه گروه کوتاه و متوسط و بلند قد بیان شده است:

$$\begin{bmatrix} ۰.۱۱ & ۰.۸۹ & ۰ \\ ۰.۰۹ & ۰.۹۱ & ۰ \\ ۰ & ۰.۹۱ & ۰.۰۹ \\ ۰ & ۰.۸۹ & ۰.۱۱ \end{bmatrix}$$

در نظر داشته باشید که استفاده از ماتریس نحوه دیگر بیان عضویت در مجموعه فازی است.

یکی دیگر از جنبه های مهم این منطق این است که الزامی ندارد که یک داده فقط متعلق به یک گروه باشد یا نباشد. داده می‌تواند ۰و ۰.۲و۰.۵یا ۱ مقدار عضویت را بپذیرد. همچنین داده می‌تواند با مقدار عضویت های متفاوت متعلق به چند مجموعه باشد. مثلا ۰.۳ عضو گروه A و ۰.۴ عضو گروه B و۰.۹ عضو گروه C باشد. اما در منطق دوتایی یک داده یا متعلق به گروه A است با عضویت ۱ و یا با درجه عضویت صفر متعلق به گروه A نیست، این عدم محدودیت یکی از مزایای بزرگ منطق فازی است. بنابراین مانند منطق بولی،

منطق فازی نیز می‌تواند از قانون (اگر شرط آنگاه عمل) استفاده کند. برای مثال قانونی برای تهویه مطبوع می‌تواند به این صورت باشد: اگر هوای اتاق گرم ومرطوب باشد آنگاه دستگاه را روشن کن با این تفاوت که برخلاف منطق بولی، قسمت شرط با عبارات صحیح یا غلط سنجیده نمی‌شود، بلکه با درجه درستی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در بخش اول این فصل ابتدا مروری بر مفاهیم فازی داشته ایم و در بخش دوم به کاربرد سیستم های فازی اشاره شده است. مرجع کلیه تعریف ها و مثال ها و قضایایی که در این فصل ذکر نشده به ۷و ۲۱ و۲۵ رجوع داده می‌شود.

۱.۱ مروری بر مفاهیم فازی

۱.۱.۱ مجموعه های فازی

قبل ازبحث در مورد مجموعه های فازی بهتر است نگاهی اجمالی به نظریه مجموعه های کلاسیک بیندازیم که با تعریف مجموعه شروع می‌شود که عبارت است: گردایه ای معینی از اشیاء را مجموعه می‌نامند. اشیاء این گردایه، اعضا یا عناصر مجموعه نامیده می‌شود. به عنوان مثال اعداد طبیعی کمتر یا مساوی ۸ یک مجموعه را تشکیل می‌دهند اگر این مجموعه را با A نشان دهیم، خواهیم داشت: A : ۱, ۲, ..., ۸ مجموعه A را می‌توان به صورت های $A = \{x \in X \mid P(x)\}$ یا $A = \{x \in N \mid x \leq ۸\}$ نیز نشان داد که P ویژگی x را نشان می‌دهد. برای متعلق بودن عناصر یک مجموعه می‌توان از توابع نشانگر استفاده نمود به عنوان مثال برای مجموعه فوق الذکر تابع نشانگر به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A. \end{cases}$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود دامنه تابع نشانگر، مجموع مرجع و برد آن مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\}$ است. یعنی $I_A(x) : X \to \{۰, ۱\}$ واضح است که هر مجموعه، یک تابع نشانگر دارد و بالعکس.

در مثال بالا ویژگی مجموعه A بطور دقیق تعریف شده است و عضویت یک عنصر در مجموعه کاملاً مشخص است اما در زندگی روزمره با مفاهیم و استدلالهایی سروکار داریم که نا دقیق هستند. از قبیل قدبلند، سردی هوا، مسافت طولانی، فشار خون بالا.

نظریه مجموعه های فازی، نظریه ای در جهت مدل بندی و تجزیه و تحلیل مفاهیم نا دقیق فوق الذکر می‌باشد. در نظریه مجموعه های کلاسیک برد تابع نشانگر مجموعه $\{۰, ۱\}$ است، اما در منطق فازی بر مجموعه به جای مجموعه $\{۰, ۱\}$ بازه $[۰, ۱]$ در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر در این حالت به جای تعلق قطعی یا عدم تعلق قطعی میزان عضویت در بازه $[۰, ۱]$ تعریف می‌شود و هر چقدر میزان عضویت به عدد یک نزدیکتر باشد یعنی تعلق بیشتر عضو به مجموعه و هر چقدر به صفر نزدیکتر باشد عدم تعلق به مجموعه می‌باشد.
با توجه به اینکه در تئوری مجموعه ها خصوصیات ریاضی مختلفی از اجتماع، اشتراک متمم، مکمل، افراز وجود دارد طبیعتاً این خصوصیات در تئوری مجموعه های فازی نیز قابل تعریف است.

تعریف ۱.۱.۱ [۸] در این تئوری به جای تابع نشانگر از تابع عضویت $\mu_A(x) : X \rightarrow [۰, ۱]$ استفاده خواهیم نمود، به عبارت دیگر $\mu_A(x)$ میزان عضویت x در مجموعه فازی A را نشان می‌دهد.
تابع عضویت یک مجموعه فازی از توسعه تابع نشانگر در مجموعه های کلاسیک بدست می آید. تابع عضویت X هر تابعی روی X به $[۰, ۱]$ است.
خصوصیات تابع عضویت عبارت است ۱) همه تابع عضویت ها پیوسته هستند. ۲) تابعی از مجموعه مرجع به فاصله $[۰, ۱]$ است. ۳) تابع عضویت ها یا افزایشی یکنوا یا کاهشی یکنوا و یا هر دو هستند.

تعریف ۲.۱.۱ [۷] یک مجموعه فازی از مجموعه مرجع X، توسط یک تابع $\mu_A(x) : X \longrightarrow [۰, ۱]$ به نام تابع عضویت مشخص می‌شود که در آن برای هر x از X، مقدار $\mu_A(x)$ میزان عضویت x در مجموعه فازی A را نشان می‌دهد.

مثال ۱.۱.۱ فرض کنید $X = \{۱, ۲, .., ۷\}$. می‌خواهیم یک مجموعه فازی تعریف کنیم که اعضای آن ویژگی نادقیق کوچک را داشته باشند. برای مدل سازی این مجموعه کافی است که تابع عضویت مجموعه فازی را مشخص کنیم. تعیین این تابع بستگی به نظر تصمیم گیرنده دارد. مثلاً یک تابع عضویت برای مدل سازی مفهوم فوق این گونه است

$$\mu_A(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱ \\ ۰.۹ & x = ۲ \\ ۰.۷ & x = ۳ \\ ۰.۵ & x = ۴ \\ ۰.۳ & x = ۵ \\ ۰.۱ & x = ٦ \\ ۰ & x = ۷ \end{cases}$$

مجموعه فازی A را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$A = \{(۱, ۱), (۲, ۰.۹), (۳, ۰.۷), (۴, ۰.۵), (۵, ۰.۳), (٦, ۰.۱), (۷, ۰)\}$$

$$A = \{\frac{۱}{۱}, \frac{۰.۹}{۲}, \frac{۰.۷}{۳}, \frac{۰.۵}{۴}, \frac{۰.۳}{۵}, \frac{۰.۱}{٦}, \frac{۰}{۷}\}$$

برای مثال $\mu_A(۳) = ۰.۷$ بدین معنی است که از نظر تصمیم گیرنده عدد ۳ به اندازه ۰.۷ به مجموعه فازی اعداد کوچک تعلق دارد.

۲.۱.۱ اصل توسیع

[۲۵] فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع و A یک مجموعه فازی از X باشد. در این صورت $B = f(A)$ به صورت یک مجموعه فازی از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{y=f(x)} A(x) & f^{-۱}(y) \neq \varnothing \\ ۰ & f^{-۱}(y) = \varnothing \end{cases}$$

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید $X_۱, ..., X_n$، n مجموعه مرجع و $X = X_۱ \times ... \times X_n$ حاصل دکارتی آنها باشد. هم چنین $A_۱, ..., A_n$، n مجموعه مرجع و $X = X_۱ \times ... \times X_n$ حاصل ضرب دکارتی آنها باشد. به علاوه $y = f(x_۱, ..., x_n)$ یک نگاشت از X به Y باشد. حاصل

عمل f بر n مجموعه فازی $A_۱,...,A_n$ به صورت مجموعه فازی B از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$B(y)=\begin{cases}\sup\limits_{y=f(x_۱,...,x_n)} \min\{A_۱(x_۱),...,A_n(x_n)\} & f^{-۱}(y)\neq\varnothing\\ ۰ & f^{-۱}(y)=\varnothing\end{cases}$$

مثال ۲.۱.۱ فرض کنید $X_۱=X_۲=N$ مجموعه اعداد صحیح مثبت، $A_۱$ مجموعه فازی تقریباً ۵ و $A_۲$ مجموعه فازی تقریباً ٦ به صورت زیر باشند

$$A_۱=\{\frac{۰.۳}{۳},\frac{۰.۷}{۴},\frac{۱}{۵},\frac{۰.۷}{٦},\frac{۰.۳}{۷}\}$$

$$A_۲=\{\frac{۰.٦}{۵},\frac{۱}{٦},\frac{۰.٦}{۷}\}$$

آنگاه براساس اصل توسیع می‌توان جمع دو مجموعه فازی تقریبا ۵ و تقریبا ٦ را انجام داد. مثلاً

$$(A_۱\oplus A_۲)(۸)=\max\min_{x_۱+x_۲=۸}\{A_۱(x_۱),A_۲(x_۲)\}=\min\{A_۱(۳),A_۲(۵)\}=\min\{۰.۳,۰.٦\}=۰.۳$$

$$(A_۱\oplus A_۲)(۹)=\max\min_{x_۱+x_۲=۹}\{A_۱(x_۱),A_۲(x_۲)\}=\max\{\min\{A_۱(۳),A_۲(٦)\},\{A_۱(۴),A_۲(۵)\}\}$$

$$=\max\{۰.۳,۰.٦\}=۰.٦$$

$$A_۱\oplus A_۲=\{\frac{۰.۳}{۸},\frac{۰.٦}{۹},\frac{۰.۷}{۱۰},\frac{۱}{۱۱},\frac{۰.۷}{۱۲},\frac{۰.٦}{۱۳},\frac{۰.۳}{۱۴}\}$$

تعریف ۴.۱.۱ [۷] α برش

مجموعه (معمولی) عناصری از X که درجه عضویت آن ها در مجموعه فازی A دست کم به

بزرگی α ($0 < \alpha \leq 1$) باشد، α برش ضعیف مجموعه فازی A گوییم و با A_α نشان می‌دهیم، یعنی

$$A_\alpha = \{x \in X | A(x) \geq \alpha\}$$

و به ازای $\alpha \in [0, 1]$، $\alpha-$ برش قوی مجموعه فازی A، مجموعه ای قطعی[1] شامل همه عناصری از X که درجه عضویت آنها در A، بزرگتر از α باشد.

۳.۱.۱ اعداد فازی

[۷] اعداد فازی، که زیرمجموعه های خاصی از مجموعه اعداد حقیقی هستند، در بیشتر مسائل کاربردی استفاده می‌شوند.

تعریف ۵.۱.۱ مجموعه فازی N از R را یک عدد فازی گوییم اگر
۱) N نرمال و تک نمایی باشد یعنی یک و دقیقاً یک $x_0 \in R$ وجود داشته باشد که $N(x_0) = 1$
۲) $\alpha-$ برش های N، به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$ به صورت بازه های بسته باشند.

اعداد فازی LR نوع خاصی از اعداد فازی هستند که علاوه بر آنکه ساختار ویژه ای دارند اعمال حسابی بر آنها نیز از قواعد خاصی پیروی می‌کند. این ساختار و این قواعد باعث شده است که در عمل، عمدتاً از این نوع اعداد فازی استفاده شود.

تعریف ۶.۱.۱ اگر ساختار تابع عضویت عدد فازی N به صورت زیر باشد

$$N(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\sigma}) & x \leq m \\ R(\frac{x-m}{\sigma}) & x > m \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیر صعودی ازR^+ به $[0, 1]$ هستند و $L(0) = R(0) = 1$، آنگاه N را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $N = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان می‌دهیم. عدد m را مقدار نما (یا میانه) و اعداد مثبت α وβ را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست N می‌نامیم. L و R توابع مرجع (یا توابع شکل) نامیده می‌شوند.

[1] crisp set

تعریف ۷.۱.۱ [۷] فرض کنید $N=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ و $L=R$ در این صورت

الف) N را یک عدد فازی مثلثی نامیده و با $N=(m,\alpha,\beta)_T$ نشان می‌دهیم اگر $L(x)=max\{۰,۱-\mid x\mid\}$

ب) N را یک عدد فازی نرمال نامیده و با $N=(m,\alpha,\beta)_N$ نشان می‌دهیم اگر $L(x)=e^{-x^۲}$

پ) N را یک عدد فازی سهموی نامیده و با $N=(m,\alpha,\beta)_P$ نشان می‌دهیم اگر $L(x)=max\{۰,۱-x^۲\}$

تعریف ۸.۱.۱ [۷] اگر برای عدد فازی N، $L=R$ و $\alpha=\beta$، آنگاه N را یک عدد فازی متقارن می‌نامیم و با $N=(m,\alpha)_L$ نشان می‌دهیم. اگر عدد فازی متقارن N، مثلثی، نرمال یا سهموی باشد، به ترتیب از نمادهای $N=(m,\alpha)_T$ و $N=(m,\alpha)_N$ و $N=(m,\alpha)_P$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۳.۱.۱ فرض کنید M یک عدد فازی LR متقارن باشد و $L(x)=R(x)=e^{-x^۲}$ و $m=۰$ و $\alpha=\beta=۱$. در این صورت

$$N(x)=\begin{cases} L(\frac{۰-x}{۱}) & x\leq ۰ \\ R(\frac{x-۰}{۱}) & x>۰ \end{cases}.$$

یعنی $x\in R$ و $M(x)=e^{-x^۲}$. نمودار تابع عضویت عدد فازی نرمال متقارن M که می‌توان آن را یک عدد فازی تقریباً صفر تعبیر کرد.

تعریف ۹.۱.۱ اگر در تعریف عدد فازی شرط تک نمایی بودن N حذف شود، در این صورت N یک بازه فازی نامیده می‌شود. بنابراین برای هر بازه فازی N، دو عدد $n_۱\leq n_۲$ وجود دارد که برای x های عضو بازه $[n_۱,n_۲]$ داریم $N(x)=۱$، پس یک بازه فازی عبارت است از یک بازه معمولی با کران های نادقیق

تعریف ۱۰.۱.۱ در بعضی از کتاب ها شرط تک نمایی را برداشته اند که در این صورت تابع زیر تشکیل یک عدد فازی می‌دهد و در برخی از کتابها وقتی که شرط تک نمایی برقرار

نباشد به جای عدد فازی از بازه‌ی فازی استفاده می‌شود. عدد فازی ذوزنقه ای نامتقارن $\tilde{A}$ که با $\tilde{A} = (a^{(1)}, \underline{a}^{(2)}, \overline{a}^{(2)}, a^{(3)})$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\widetilde{A}(x) = \begin{cases} L(\frac{\underline{a}^{(2)}-x}{\underline{a}^{(2)}-a^{(1)}}) & x \leq \underline{a}^{(2)} \\ 1 & \underline{a}^{(2)} < x < \overline{a}^{(2)} \\ R(\frac{x-\underline{a}^{(2)}}{a^{(3)}-\overline{a}^{(2)}}) & x > \overline{a}^{(2)} \end{cases}$$

۴.۱.۱ حساب اعداد فازی

تعریف ۱۱.۱.۱ [۲۵] فرض کنید M یک عدد فازی و $f : R \to R$ یک عملگر یک بعدی باشد. بر پایه ی اصل توسیع، $f(M)$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$f(M)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x, y=f(x)} M(x) & f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید M, N دو عدد فازی و $X : R \times R \to R$ یک عملگر دوتایی بر اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم عملگر را برای اعداد فازی با $\circledast$ نشان دهیم، با استفاده از اصل توسیع، حاصل $M \circledast N$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(M \circledast N)(z) = \sup_{z=x \circledast y} \min[M(x), N(y)]$$

تعمیم چهار عمل اصلی برای اعداد فازی در حالت خاص برای چهار عمل اصلی، تعریف بالا به صورت زیر در می آید

$$(M \oplus N)(z) = \sup_{z=x+y} \min[M(x), N(y)]$$

$$(M \otimes N)(z) = \sup_{z=x \times y} \min[M(x), N(y)]$$

$$(M \ominus N)(z) = \sup_{z=x-y} \min[M(x), N(y)]$$
$$(M \oslash N)(z) = \sup_{z=x/y} \min[M(x), N(y)]$$

مثال ۴.۱.۱ دو عدد فازی مثلثی M به صورت تقریباً پنج، N به صورت تقریباً هفت را با توابع عضویت زیر در نظر بگیرید

$$M(x) = \begin{cases} (x-۳)/۲ & ۳ \leq x \leq ۵ \\ (۷-x)/۲ & ۵ \leq x \leq ۷ \end{cases}$$

$$N(x) = \begin{cases} (x-۵)/۲ & ۵ \leq x \leq ۷ \\ (۹-x)/۲ & ۷ \leq x \leq ۹ \end{cases}$$

جمع و تفاضل دو عدد فازی بالا، اعداد فازی با توابع عضویت زیر هستند.

$$(M \oplus N)(x) = \begin{cases} (x-۸)/۴ & ۸ \leq x \leq ۱۲ \\ (۱۶-x)/۲ & ۱۲ \leq x \leq ۱۶ \end{cases}$$

$$(M \ominus N)(x) = \begin{cases} (x+۶))/۴ & -۶ \leq x \leq -۲ \\ (۲-x)/۴ & -۲ \leq x \leq ۲ \end{cases}$$

قضیه ۱.۱.۱ [۲۵] اگر $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\lambda \in R$ آنگاه

$$\lambda \otimes (m, \alpha, \beta) = (\lambda m, \lambda\alpha, \lambda\beta)_{LR} \lambda > ۰$$

$$\lambda \otimes (m, \alpha, \beta) = (\lambda m, -\lambda\alpha, -\lambda\beta)_{LR} \lambda < ۰$$

نتیجه ۱.۱.۱ اگر $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ آنگاه $M = (-m, \beta, \alpha)_{RL}$

قضیه ۲.۱.۱ اگر$M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $N = (n, \delta, \gamma)_{LR}$، آنگاه $M \oplus N$ یک عدد فازی LR به صورت زیر است

$$M \oplus N = (m+n, \alpha+\delta, \beta+\gamma)_{LR}$$

قضیه ۳.۱.۱ اگر $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $N = (n, \gamma, \delta)_{RL}$ آنگاه $M \ominus N$ یک عدد فازی LR به صورت زیر است

$$M \ominus N = (m - n, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR}$$

مثال ۵.۱.۱ برای پیدا کردن $\alpha-$ برش، تابع عضویت عدد فازی را با خط مساوی با α قطع می‌دهیم فرض کنید $\widetilde{A} = (a, s_a)$ عدد فازی مثلثی باشد.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-(a-s_a)}{s_a} & x \leq a \\ \frac{(a+s_a)-x}{s_a} & x > a \end{cases}$$

$$\frac{x - (a - s_a)}{s_a} = \alpha, \frac{(a + s_a) - x}{s_a} = \alpha \Longrightarrow (a - s_a(1 - \alpha), a + s_a(1 - \alpha))$$

فرض کنید $\widetilde{A} = (a, s_a)$ عدد فازی نرمال باشد.

$$\mu_A(x) = \exp^{\frac{-(x-a)^2}{s_a}}$$

$$\exp^{\frac{-(x-a)^2}{s_a}} = \alpha \Longrightarrow (a - s_a\sqrt{-\ln\alpha}, a + s_a\sqrt{-\ln\alpha})$$

فرض کنید $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ عدد فازی ذوزنقه ای باشد.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & x \geq a_4 \end{cases}$$

$$\frac{x - a_1}{a_2 - a_1} = \alpha \to x = a_1 + (a_2 - a_1)\alpha$$