دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

بررسی عملگرهای انتگرال بر روی توابع تک ارز وستاره گون

نگارش
طیبه ابراهیمی

استاد راهنما
جناب آقای دکتر زیره

شهریور ۱۳۹۰

صفحة تصويب نامه توسط هيأت داوران (فرم پيوست ۳ يا ۴ با امضاي اصل هيأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

با حمد و سپاس فراوان از خداوند منان که به من توفیق آموختن پرتوئی از دانش هستی و آشنایی با گوشه ای از حقایق آفرینش را عطا فرمود.

قلم از نگارش حق زحمات و مساعدت های اساتید گرانقدر و دوستان بزرگوار ناتوان است ، اما وظیفه حکم می کند که هر چند ناچیز ولی در حد توان تشکر و قدر دانی نمایم.

در ابتدا از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر زیره که با راهنمایی های حکیمانه خود افق های تازه ای برای اینجانب ایجاد نمودند و همچنین از استاد مشاور جناب آقای دکتر هاشمی کمال تشکر را دارم.

همچنین لازم می دانم از خانواده و تمام دوستانی که مرا در این مهم یاری کردند، تقدیر و تشکر نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه ، به بیان تعاریف و قضایای مربوط به رده های توابع تک ارز و ستاره گون می پردازیم. هم چنین بامعرفی چند عملگرانتگرال، شرایطی را که آنها در رده های مذکور قرار می گیرند را مورد مطالعه قرارمی دهیم در واقع معیارهایی برای تک ارزی این عملگرها ارائه می دهیم.

واژه‌های کلیدی: توابع تحلیلی، توابع تک ارز، توابع ستاره گون، عملگرانتگرال

پیشگفتار

تابع تحلیلی که یک به یک می باشد را تک ارز می نامیم. از نظر تحلیلی تابع تک ارز مشتق مخالف صفر دارد و از نظر هندسی تابع تک ارز خم های ساده را بر خم های ساده می نگارد.

به دلیل اهمیت این رده قصد داریم تا در این پایان نامه محک های تک ارزی عملگرهای انتگرال را مورد بررسی قرار دهیم.

در این راستا ، درفصل اول، به بیان تعاریف اولیه ومفاهیم مقدماتی پرداخته ایم.

درفصل دوم، در هربخش به طورجداگانه عملگرهای انتگرال مختلفی را مد نظر داشته و محک های تک ارزی آنها را تفسیرکرده ایم. به عبارت دیگر دربخش اول، عملگر $\mathcal{J}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n}$ ، دربخش دوم، عملگر $\mathcal{H}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{|[Re\eta]|},\beta,\eta}$ دربخش سوم، عملگر $\mathcal{J}_{\gamma,\beta}$ دربخش چهارم، عملگرهای $\mathcal{F}_{n,\alpha}(z)$ و $\mathcal{G}_{n,\alpha}(z)$ دربخش پنجم و ششم، عملگر $\mathcal{H}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\beta}(z)$ و دربخش هفتم، عملگر $F_\alpha(z)$ معرفی شده اند و هم چنین در پایان با مقایسه قضایا ومحک های تک ارزی، به جمع بندی نتایج پرداخته ایم.

فهرست مطالب

فصل ۱
پیش نیازهاومفاهیم مقدماتی

در این پایان نامه محک های تک ارزی را برای عملگرهای انتگرال مطالعه می کنیم. برای این منظور ، در این فصل تعاریف ، مفاهیم مقدماتی و چند قضیه پایه را آورده ایم:

۱.۱ نماد گذاری و تعاریف

از نمادهای زیر درمتن استفاده شده است.

$\mathbb{R}$	مجموعه اعداد حقیقی
$\mathbb{N}$	مجموعه اعداد طبیعی
$\mathbb{C}$	مجموعه اعدادمختلط
Re	قسمت حقیقی اعدادمختلط
Im	قسمت موهومی اعدادمختلط
$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}, \|z\| < ۱\}$	دیسک واحد باز

تعریف ۱.۱.۱. هرمجموعه همبند و باز، میدان نامیده می شود. میدان را معمولا با D نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. تابعf را در نقطه$z_۰$ تحلیلی می نامیم هرگاه f درهمسایگی از نقطه $z_۰$ مشتق

پذیر باشد.

مثال. تابع $f(z)=z^۲$ را در نظرمی گیریم.f همواره مشتق پذیر است و برای هر$z\in\mathbb{C}$ ، $f'(z)=۲z$ بنابراین f همواره تحلیلی است.

مثال. تابع $f(z)=|z|^۲$ فقط دره $z=$ مشتق پذیر است بنابراین f غیرتحلیلی است.

تعریف ۳.۱.۱. هرگاه f در تمام نقاط دامنه D تحلیلی باشد تابع f را بر دامنه D تحلیلی می نامیم. اگر $D=\mathbb{C}$ وتابع f برروی $\mathbb{C}$ تحلیلی باشد آن گاه f را تابع تام می نامیم.

مثال. $f(z)=z^۲$ و درحالت کلی هرچندجمله ای همواره تحلیلی و درنتیجه تام است.

تعریف ۴.۱.۱. هر تابع تحلیلی یک به یک را تک ارز می نامیم. بنابراین اگر f تابع تک ارز باشد $f(z_۱)=f(z_۲)$ نتیجه می دهد $z_۱=z_۲$.

تذکر: توابع تک ارز از نظر تحلیلی مشتق مخالف صفر دارند. از نظر هندسی تابع تک ارز، خم های ساده را بر خم های ساده می نگارد.

لم ۵.۱.۱. (لم شوارتز) [۱] [۴]

فرض کنید که $f(z)$ بردیسک $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}=\{z\in\mathbb{C},|z|<R\}$ تحلیلی باشدو$f(۰)=f'(۰)=...=$ $f^{(m-۱)}=۰$

اگربرای $|z|<R$،داشته باشیم$|f(z)|<M$ آن گاه

$$|f(z)|\leq \frac{M}{R^m}|z|^m \quad z\in\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$$

و تساوی برقراراست اگر و تنها اگر

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{M}{R^m}z^m$$

کهθ ثابت است.

[۱] Schwarz

۲.۱ رده $\mathcal{A}$

تعریف ۱.۲.۱. $\mathcal{A}$ را رده توابع f به فرم $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ در نظر می گیریم که در دیسک باز $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ تحلیلی اند و $f(0) = f'(0) - 1 = 0$.

مثال. تابع $f(z) = z + 3z^2$ به رده $\mathcal{A}$ تعلق دارد.

لم ۲.۲.۱. (لم کاراتئودوری) [2] ([1]) فرض کنید که fتابع تحلیلی در$\mathcal{U}$باشد و $f(0) = 0$ اگر مقدار $M > 0$ موجود باشد که $Ref(z) \leq M$ آن گاه،

$$(1 - |z|)|f(z)| \leq 2M|z| \quad (z \in \mathcal{U})$$

اثبات. تابع $h(z)$ رابه صورت زیر تعریف می کنیم:

$$h(z) = \frac{f(z)}{2M - f(z)}$$

تابع $h(z) \in \mathcal{A}$ و $|h(z)| \leq 1$ زیرا$(|f(z)| \leq |2M - f(z)|)$

حال بنابر لم شوارتز داریم:

$$|h(z)| \leq |z| \quad z \in \mathcal{U}$$

هم چنین

$$|f(z)| \leq |z||2M - f(z)| \leq |z|(2M + |f(z)|)$$

که نتیجه می دهد

$$(1 - |z|)|f(z)| \leq 2M|z|$$

□

[2] Caratheodory

۳.۱ رده S

تعریف ۱.۳.۱. رده S را زیررده توابع $f \in \mathcal{A}$ که در$\mathcal{U}$ تک ارزند، تعریف می کنیم در واقع رده توابع $f(z)$ که در قرص واحد $|z| < 1$ تحلیلی ، یک به یک و نرمال شده می باشند.

لم ۲.۳.۱. اگر $f(z) \in S$ آنگاه ، $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in S$

اثبات. فرض کنیم $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ ، لذا داریم:

$$g(z) = z\sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4} + ... \qquad (1.1)$$

تابع $g(z)$ بر دیسک واحد تحلیلی می باشد و $g(0) = 0$ و $g'(0) = 1$.

اثبات تک ارزی: اگر $g(z_1) = g(z_2)$ یعنی $z_1\sqrt{\frac{f(z_1^2)}{z_1^2}} = z_2\sqrt{\frac{f(z_2^2)}{z_2^2}}$ در اینصورت:

$f(z_1^2) = f(z_2^2)$ و چون f یک به یک می باشد، داریم: $z_2^2 = z_1^2$ یعنی: $z_2 = z_1$ یا $z_1 = -z_2$.

و از (۱.۱) ملاحظه می شود که $g(z)$ تابع فرد است لذا $z_1 = -z_2$ تساوی $g(z_1) = -g(z_2)$ را نتیجه می دهد که با فرض در تناقض است پس $z_2^2 = z_1^2$ و تک ارزی $g(z)$ اثبات می شود. ■

قضیه ۳.۳.۱. اگر $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in S$ باشد ، آنگاه $|a_2| \leq 2$.

اثبات. با توجه به لم قبل ثابت می شود. □

مثال. (تابع کوئب) در قضیه ي قبل اگر $a_2 = 2e^{i\alpha}$ و α حقیقي باشد آنگاه ،

$g(z) = \frac{z}{1-e^{i\alpha}z^2} = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$ لذا

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha}z)^2} = z + 2e^{i\alpha}z^2 + 3e^{2i\alpha}z^3 + ...$$

با قرار دادن $\alpha = 0$ به تابع زیر مي رسیم:

$$k(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} = \frac{1}{4}(\frac{1 + z}{1 - z})^2 - \frac{1}{4}$$

که به تابع کوئب معروف است این تابع قرص $|z| < ۱$ را بر صفحه اي که در امتداد محور حقیقي منفي از $\frac{-۱}{۴}$ تا ∞ بریده شده است مي نگارد.

قضیه ۴.۳.۱. (پوشش) فرض کنید $f(z) \in S$،c عدد مختلط و $|z| < ۱$ اگر $f(z) \neq c$ آنگاه $|c| \geq \frac{۱}{۴}$.

اثبات. مي دانیم $f(z) = z + a_۲z^۲ + ...$ چون $f(z) \neq c$ پس تابع $g(z) = \frac{cf(z)}{c-f(z)}$ نیز متعلق به S مي باشد

$$\frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + (a_۲ + \frac{۱}{c})z^۲ + ...$$

بنا به قضیه ي قبل داریم: $|a_۲ + \frac{۱}{c}| \leq ۲$ از طرفي:

$$|\frac{۱}{c}| - |a_۲| \leq |a_۲ + \frac{۱}{c}| \leq ۲ \Longrightarrow |\frac{۱}{c}| \leq ۲ + |a_۲|$$

و چون $f(z) \in S$ پس $|a_۲| \leq ۲$ لذا داریم:

$$|\frac{۱}{c}| \leq ۴ \Longrightarrow |c| \geq \frac{۱}{۴}.$$

■

لم ۵.۳.۱. اگر $f(z) \in S$ و $z = re^{i\theta}$ آنگاه:

$$Re\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|$$

اثبات. چون برای $|z| < ۱$، $f'(z) \neq ۰$ پس می توان شاخه ای از $\log f'(z)$ را برای $|z| < ۱$ در نظر گرفت. حال برای $f(z) = f(re^{i\theta})$ داریم $f'(z) = f'(re^{i\theta})$ لذا:

$$\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}$$

با ضرب طرفین رابطه ی فوق در r داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta})=\frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}=\frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

با محاسبه ی قسمت های حقیقی داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})|=Re\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}.$$

■

قضیه ۱.۳.۶. اگر $f(z)\in S$ آنگاه،

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\leq|f'(z)|\leq\frac{1+r}{(1-r)^3}\quad(|z|=r<1).$$

اثبات. مي دانيم تابع $w=\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}$ $(|z_0|<1)$ تحليلي، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش مي نگارد. لذا تابع $g(z)=f(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z})=b_0+b_1z+b_2z^2$ نیز به ازاي $(|z|<1)$ تحليلي و تک ارز است، ازطرفی:

$$g(0)=b_0=f(z_0)\quad b_1=g'(0)=f'(z_0)(1-|z_0|^2)$$

$$b_2=\frac{g''(0)}{2}=\frac{1}{2}(f''(z_0)(1-|z_0|^2)^2-2f'(z_0)\overline{z_0}(1-|z_0|^2))$$

چون $g(z)$ نرماليزه نمي باشد پس متعلق به S نمي باشد، با توجه به اينکه تابع $\frac{g(z)-g(0)}{g'(0)}=z+\frac{b_2}{b_1}z^2+...$ در S قرار مي گيرد لذا بنابر قضيه قبل $|\frac{b_2}{b_1}|\leq 2$ يعني:

$$\frac{1}{2}|\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}(1-|z_0|^2)-2\overline{z_0}|\leq 2$$

با قرار دادن $z_0=re^{i\theta}$ و ضرب طرفين در $\frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}$ داریم:

$$|\frac{z_0f''(z_0)}{f'(z_0)}-\frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2}|\leq\frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2}$$

حال چون z_0 دلخواه است قرار مي دهيم:

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

يعني $\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ در دايره اي به شعاع $\frac{4r}{1-r^2}$ و به مركز $\frac{2r^2}{1-r^2}$ واقع است لذا:

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}$$

بنا به لم قبل مى دانيم $Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|$ يعني:

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}$$

حال از طرفين نامساوي از ۰ تا r انتگرال مي گيريم:

$$\log(1-r) - 3\log(1+r) \leq \log|f'(z)| \leq \log(1+r) - 3\log(1-r)$$

و

$$\log\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq \log|f'(z)| \leq \log\frac{1+r}{(1-r)^3}$$

در نتيجه:

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1).$$

■

مثال. مشتق تابع كوئب برابر است با $k'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3}$ ، لذا كران بالاي قضيه ي (۱.۳.۶) در مورد اين تابع در $z = r$ وكران پايين در $z = -r$ تعيين مي شود.

قضیه ۱.۳.۷. اگر $f(z) \in S$ آنگاه،

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2} \quad (|z| = r < 1).$$

اثبات. از لم قبل داریم $|f'(z)| \le \frac{1+r}{(1-r)^3}$ براي $|z| = r \le 1$، نقطه ي ۰ را به z با یک خط مستقیم وصل کرده و روي این پاره خط انتگرال مي گیریم:

$$|f(z)| = \int_0^r |f'(z)|dt \le \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3}dt = \frac{r}{(1-r)^2}$$

نامساوي $\frac{1}{4} \le \frac{r}{(1+r)^2}$ همواره برقرار است، حال اگر $|f(z)| \ge \frac{1}{4}$ آنگاه $|f(z)| \ge \frac{r}{(1+r)^2}$ و اگر $|f(z)| < \frac{1}{4}$ طبق قضیه ي پوششي مسیر c داخل دایره ي یکه از ۰ تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم c_0 از ۰ تا $f(z)$ را مي پوشاند در اینصورت:

$$|f(z)| = \int_{c_0} |dw| = \int_c |f'(s)||ds|$$

از طرفي بنا به قضیه ي قبل:

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)||ds| \ge \int_c |f'(s)|d|s| \ge \frac{1-t}{(1+t)^3}dt = \frac{r}{(1+r)^2}$$

لذا داریم:

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}.$$

■

مثال. براي تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ کران بالاي قضیه ي قبل در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین مي شود.

قضیه ۱.۳.۸. $(Littlewood)$ اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در S باشد آنگاه براي هر n، $|a_n| \le en$.

اثبات. با توجه به فرمول انتگرال کوشي

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \quad (n = 2, 3, ...; 0 < r < 1)$$

داریم:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta$$

از طرفی $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta \leq \frac{r}{1-r}$ پس $|a_n| \leq \frac{1}{r^{n-1}(1-r)}$ چون براي هر r در فاصله $0 < r < 1$ نامساوي برقرار است بهترین کراني که با این روش بدست مي آید اینست که در رابطه ي بالا کمینه سازي کنیم لذا:

$$|a_n| \leq \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} = n(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1} < en.$$

■

قضیه ۹.۳.۱. اگر تابع $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در رده ی S باشد و ضرایب حقیقي داشته باشد، آنگاه براي هر n داریم: $|a_n| \leq n$.

اثبات. برای $r < 1$، $z = re^{i\theta}$ قرار می دهیم:

$$Imf(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta$$

با ضرب طرفین رابطه ی فوق در $\sin n\theta$ و انتگرال یابی از 0 تا π داریم:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(re^{i\theta})\sin n\theta d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} a_n r^n \sin^2 n\theta d\theta = a_n r^n \qquad (2.1)$$

با توجه به رابطه ی

$$|\sin(n+1)\theta| = |\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta| \leq |\sin n\theta| + |\sin\theta|$$

و به روش استقرایی می توان نشان داد که $|\sin n\theta| \leq n|\sin\theta|$ لذا از رابطه ی (۲.۱) نتیجه می شود که:

$$|a_n r^n| \leq \frac{۲n}{\pi}\int_{۰}^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin\theta d\theta \qquad (۳.۱)$$

سپس نشان می دهیم $v(re^{i\theta}) \neq ۰$ ،$(۰ < r < ۱, ۰ < \theta < \pi)$:

$$۰ \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta - e^{-in\theta}}) = ۲i\sum_{n=۱}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = ۲iv(re^{i\theta})$$

چون $v(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است می بایست در فاصله ی $۰ < \theta < \pi$ علامت جبری ثابت داشته باشد لذا:

$$r = |a_۱ r| = |\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin\theta d\theta| = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin\theta d\theta. \qquad (۴.۱)$$

با جایگزینی (۴.۱) در (۳.۱) رابطه ی $|a_n r^n| \leq nr$ بدست می آید و وقتی $r \to ۱$ قضیه ثابت می گردد. ■

۴.۱ رده S^*

تعریف ۱.۴.۱. میدان D را نسبت به $(z = ۰)$ ستاره گون می گوییم اگر $۰ \in D$ و هرپاره خط مستقیمی که هرنقطه ازD رابه۰ وصل می کند در داخل D بیفتد.

تابع $f(z) \in S$ را ستاره گون نامیم هرگاه قرص $|z| < ۱$ توسط تابع $f(z)$ بر یک میدان نگاشته شود که نسبت به مبدا ستاره گون باشد. این زیررده های S را با S^* نشان می دهیم.

لم ۲.۴.۱. فرض کنیم $f(z) \in S$، در اینصورت $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان ستاره گون بنگارد.