بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کردستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان:

روش‌های تفاضلات متناهی برای حل مسائل مقدار مرزی منفرد

پژوهشگر:

علی بیگی

استاد راهنما:

دکتر امجد علی‌پناه

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

دی ماه ۱۳۹۲

کلیه حقوق مادی و معنوی مرتبط بر نتایـج مطالعات،

ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع‌این

پایان‌نامه (رسـاله) متعلق به دانشـگاه کردستان است.

تعهد نامه

اینجانب علی بیگی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشگاه کردستان، دانشکده‌ی علوم پایه گروه ریاضی تعهد می‌نمایم که محتوای این پایان‌نامه نتیجه‌ی تلاش و تحقیقات خود بوده و از جایی کپی‌برداری نشده و به پایان رسانیدن آن نتیجه‌ی تلاش و مطالعات مستمر اینجانب و راهنمایی و مشاوره‌ی اساتید بوده است.

با تقدیم احترام

علی بیگی

۱۳۹۲ / ۱۰/ ۴

دانشگاه کردستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان:

روش‌های تفاضلات متناهی برای حل مسائل مقدار مرزی منفرد

پژوهشگر:

علی بیگی

در تاریخ ۱۳۹۲/۱۰/۴ توسط کمیته‌ی تخصصی وهیات داوران زیر مورد بررسی قرار گرفت و با نمره‌ی ۱۸٫۱۹ و درجه‌ی خیلی خوب به تصویب رسید.

هیات داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنما	دکتر امجد علی‌پناه	استادیار	
۲ـ استاد مشاور	دکتر محمد قاسمی	استادیار	
۳ـ استاد داور داخلی	دکتر شاهرخ اسماعیلی	استادیار	
۴ـ استاد داور داخلی	دکتر کمال شانظری	دانشیار	

مهر و امضاء مدیر گروه

دانشگاه کردستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

مهر و امضاء معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده

تقدیم به...

پدرم، اولین و بهترین معلم زندگیم، که از نگاهش صلابت، از رفتارش محبت
و از صبرش ایستادگی را آموختم. مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق که
وجودم برایش همه رنج بود و وجودش
برایم همه مهر.

تشکر و قدردانی

خالق منان را شاکرم که لطفش همواره شامل حال این حقیر بوده است.

از استاد راهنمای بزرگوارم جناب **آقای دکتر امجد علی‌پناه** که افتخار شاگردی در محضر ایشان را داشته‌ام به خاطر زحمات و راهنمایی‌هایشان بی‌نهایت سپاسگذارم و از استاد مشاور گرامیم جناب **آقای دکتر محمد قاسمی** که مرا در انجام این پایان نامه یاری نمودند و همچنین از جناب **آقای دکتر کمال شانظری** و جناب **آقای دکتر شاهرخ اسماعیلی** که داوری این پایان نامه را را به عهده داشتند نهایت سپاس و قدردانی را دارم.

همچنین از زحمات تک تک اعضای خانواده‌ام به ویژه **پدر** و **مادرم**که در تمام مراحل زندگی پشتیبان و یاورم بوده‌اند تشکر می‌کنم.

چکیده

روش تفاضلات متناهی یکی از پرکاربردترین روش‌های عددی برای حل مسائل مقدار مرزی و معادلات با مشتقات جزئی است. در این پایان‌نامه، به حل دو مسأله‌ی مقدار مرزی منفرد که دارای کاربردهایی در فیزیولوژی می‌باشند، با روش تفاضلات متناهی می‌پردازیم. در ادامه، به بررسی همگرایی این روش می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که این روش تفاضلات متناهی دارای مرتبه دقت دو می‌باشد. در پایان، این روش را برای دو مثال بکار برده و نتایج عددی حاصل از این روش را با روش‌های دیگر مقایسه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: مسأله‌ی مقدار مرزی منفرد، فیزیولوژی، روش تفاضلات متناهی، مرتبه دقت دو، نتایج عددی

فهرست مطالب

فهرست مطالب **الف**

لیست جداول **پ**

۱ مقدمات و پیش‌نیازها **۱**

۱.۱ معادلات تفاضلی و کاربردهای آن ۱

۱.۱.۱ عملگرهای تفاضلی ۳

۲.۱ تعریف‌های معادلات تفاضلی و روش‌های حل آن‌ها ۷

۱.۲.۱ معادلات تفاضلی خطی ۸

۲.۲.۱ معادلات تفاضلی خطی همگن ۹

۳.۲.۱ معادلات تفاضلی خطی ناهمگن ۱۲

۴.۲.۱ معادلات تفاضلی غیرخطی ۱۶

۳.۱ تفاضلات متناهی ۱۹

۱.۳.۱ تقریب تفاضلات متناهی ۲۱

۲.۳.۱ خطای برشی ۲۳

۴.۱ حل یک مسأله مقدار مرزی با روش تفاضلات متناهی ۲۸

۱.۴.۱ دقت روش‌های تفاضلات متناهی ۳۰

۵.۱ ماتریس‌های یکنوا ۳۳

۲ حل یک مسأله‌ی مقدار مرزی منفرد با روش تفاضلات متناهی مرتبه دوم **۳۶**

۱.۲ روش تفاضلات متناهی برای حل مسأله ۳۷

۳ حل مسأله‌ی مقدار مرزی منفرد با کاربرد در فیزیولوژی با کمک یک روش تفاضلات متناهی ۴۲

۱.۳ مسأله‌ی مقدار مرزی منفرد با کاربرد در فیزیولوژی و چند روش برای حل آن . . ۴۲

۲.۳ حل مسأله‌ی مقدار مرزی منفرد با یک روش تفاضلات متناهی ۴۷

۳.۳ همگرایی روش تفاضلات متناهی برای مسأله‌ی مقدار مرزی منفرد ۵۵

۴ نتایج عددی ۶۴

مراجع ۷۳

لیست جداول

۱.۴ نتایج خطای روش تفاضلات متناهی در حل مثال ۱ برای شرط $y(0) = \ln(0.25)$ ۶۵

۲.۴ نتایج خطای روش تفاضلات متناهی در حل مثال ۱ برای شرط $y'(0) = 0$ . . . ۶۵

۳.۴ جواب‌های عددی روش تفاضلات متناهی در حل مثال ۲ . . . . ۶۷

۴.۴ مقایسه‌ی نتایج عددی سه روش در حل مثال ۲ (حالت اول) ۶۸

۵.۴ مقایسه‌ی نتایج عددی سه روش در حل مثال ۲ (حالت دوم برای $\alpha = \beta = 1$) . ۶۹

۶.۴ مقایسه‌ی نتایج عددی سه روش در حل مثال ۲ (حالت دوم برای $\alpha = 0.1,\ \beta = 1$) ۷۰

مقدمه

به معادله‌ی دیفرانسیلی که دارای شرایط مرزی معلوم باشد یک مسأله‌ی مقدار مرزی[۱] گفته می‌شود. در این مسائل هدف ما پیدا کردن یک دسته از توابعی است که در معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی صدق کنند. مسائل مقدار مرزی منفرد را با روش‌های عددی مختلفی مانند روش تجزیه آدمیان[۲] [۱]، روش اسپلاین[۳] [۲] و یا روش استفاده از تابع گرین[۴] [۳] می‌توان حل کرد.

روش عددی دیگری که برای حل این مسائل کاربرد دارد روش تفاضلات متناهی [۵] است. روش تفاضلات متناهی مرتبه چهارم [۴]، نیز از روش‌هایی است که برای حل این گونه مسائل به‌کار رفته است.

روش‌های تفاضلات متناهی در حل معادلات با مشتقات جزئی [۶]بسیار پرکاربرد می‌باشند. در این معادلات با تقریب زدن مشتقات، مسأله به حالت تفاضلی تبدیل شده و حل آن نیز ساده‌تر می‌شود. برای کسب اطلاع بیشتر در مورد روش تفاضلات متناهی می‌توان به [۵، ۶]، رجوع کرد. روش‌های تفاضلات متناهی اولین بار توسط تام[۷] در سال ۱۹۲۰ معرفی شدند. اساس کار روش تفاضلات متناهی، یک نوع گره‌بندی در دامنه‌ی مسأله می‌باشد. در این روش‌ها مشتقات به وسیله یک ترکیب خطی از مقادیر تابع در نقاط گره‌بندی شده، تقریب زده می‌شوند و برای حل معادلات، می‌توان آن‌ها را به فرم جبری تبدیل کرد.

در این پایان‌نامه، در فصل ۱، ابتدا معادلات تفاضلی، عملگرهای تفاضلی و تعاریف مقدماتی از روش‌های تفاضلات متناهی را به همراه یک مسأله‌ی مقدار مرزی معرفی کرده و سپس خطاها و

[۱] Boundary value problem
[۲] Adomian decomposition method
[۳] B-spline method
[۴] Green's function
[۵] Finite difference method
[۶] Partial differential equation
[۷] A.Thom

دقت همگرایی این روش را بررسی خواهیم نمود. در فصل ۲، روش تفاضلات متناهی مرتبه دوم را برای حل یک مسأله‌ی مقدار مرزی منفرد توضیح می‌دهیم.

در فصل ۳، یک مسأله مقدار مرزی منفرد را با دو شرط مرزی در نظر می‌گیریم. این مسأله‌ی مقدار مرزی منفرد دارای کاربردهایی در فیزیولوژی می‌باشد که به آنها اشاره خواهد شد. ما در فصل ۳، با گره‌بندی یکنواخت نقاط و با در نظر گرفتن شرایط کلی حاکم بر مسأله، با کمک یک روش تفاضلات متناهی به حل مسأله می‌پردازیم و خواهیم دید که با کمک این روش می‌توان مسأله را برای دو شرط مرزی به معادلات تفاضلی تبدیل کرده و حل نمود. در این فصل همچنین، همگرایی روش تفاضلات متناهی بررسی می‌شود و نشان می‌دهیم این روش دارای دقت از مرتبه‌ی دو است.

در پایان، با استفاده از کدنویسی و با حل دو مثال، نتایج عددی این روش را بررسی کرده و به مقایسه‌ی این روش با روش‌های دیگر می‌پردازیم.

فصل ۱
مقدمات و پیش‌نیازها

۱.۱ معادلات تفاضلی و کاربردهای آن

محاسبات مکرر ریاضیات مبتنی بر معادلاتی هستند که به ما اجازه‌ی محاسبه‌ی مقدار یک تابع بازگشتی را از یک مجموعه‌ی داده شده از مقادیر می‌دهند. این‌گونه معادلات، معادلات تفاضلی [۱] نامیده می‌شوند.

این معادلات در حالات زیادی رخ می‌دهند و کاربردهای فراوانی در آمار، کامپیوتر، تحلیل مدارهای الکتریکی، علم اقتصاد، زیست شناسی و دیگر رشته‌ها دارند. در زیر به کاربردهایی از معادلات تفاضلی می‌پردازیم:

معادله‌ی بلمن [۲] و کاربرد در اقتصاد: معادله‌ی بلمن [۷]، که به نام یابنده‌ی آن ریچارد بلمن نام‌گذاری شد، یک شرط ضروری در روش‌های ریاضی بهینه سازی است که به نام برنامه نویسی پویا نیز شناخته می‌شود. معادله‌ی بلمن در ابتدا در مهندسی نظریه کنترل و دیگر مباحث در ریاضیات کاربردی اعمال و متعاقبا به یک ابزار قدرتمند در نظریه‌ی اقتصاد مبدل شد.

کاربرد در اقتصاد: اولین کاربرد اقتصادی معادله‌ی بلمن، مقاله‌ی سال ۱۹۷۳ اصلی مرتون در مدل قیمت‌گذاری دارایی حیاتی میان‌گذرا است [۸]. جواب مدل نظری مرتون که در آن سرمایه‌گذاران از میان درآمد امروز و درآمد آینده یا عواید دارایی انتخاب می‌کنند، یک صورت از معادله‌ی بلمن است. به این دلیل که کاربردهای اقتصادی برنامه نویسی پویا معمولا به یک معادله‌ی بلمن می‌رسد که یک معادله‌ی تفاضلی است، اقتصاد دانان از برنامه نویسی پویا به عنوان یک روش بازگشتی یاد

[۱] Difference equations
[۲] Bellman equation

می‌کنند.

استوکی، لوکاس و پریسکات برنامه نویسی پویای تصادفی و غیر تصادفی را با جزئیات دقیق با آوردن مثال‌های فراوان از چگونگی استفاده از برنامه نویسی پویا در نظریه اقتصاد، توصیف می‌کنند [۹].

در [۹] برنامه نویسی پویا برای حل دامنه‌ی وسیعی از مسائل نظری در اقتصاد به‌کار گرفته شده است.

کاربرد معادلات تفاضلی در زیست شناسی: نوع دیگری از معادلات تفاضلی در علم زیست شناسی (بیولوژی) بسیار پر کاربرد می‌باشند و مبدأ در تلاش برای مدل پویایی شناسی جمعیت داشته‌اند [۱۰].

دنباله‌ی فیبوناچی [۳] نیز که دنباله‌ای از اعداد به صورت $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ است، دارای کاربرد در محیط‌های زیستی می‌باشد.

اگر F_nجمله‌ی nام دنباله‌ی فیبوناچی برای $n = 1, 2, \ldots$ باشد، آن‌گاه F_n در معادله‌ی تفاضلی $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ که $F_1 = 1, F_2 = 1$، صدق می‌کند. جواب عمومی این معادله‌ی تفاضلی به صورت زیر است:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

برای بدست آوردن جمله‌ی عمومی و جزئیات بیشتر در مورد کاربرد این معادله‌ی تفاضلی در زیست شناسی می‌توان به [۱۱] رجوع کرد.

کاربردهای دیگری از معادلات تفاضلی مانند شبکه بندی بلور، کاربرد در سیستم‌های ارتعاشی (نوسانی)، کاربرد در شبکه‌های الکتریکی، کاربرد در احتمال، استفاده از **چندجمله‌ایهای چپیشف** [۴] با جمله‌ی nام زیر:

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x), \qquad n \geq 0.$$

که $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$، و خیلی کاربردهای دیگر را می‌توان در [۱۱، ۱۲] ملاحظه نمود.

[۳] Fibonacci sequence

[۴] Chebyshev polynomials

۱.۱.۱ عملگرهای تفاضلی [5]

تعداد زیادی از معادلات تفاضلی پیچیده را می‌توان با به‌کار بردن عملگرهای تفاضلی حل نمود. این عملگرها اجزای اساسی از محاسبات پیچیده‌ی تفاضلات متناهی نیز محسوب می‌شوند. اکثر مطالب این بخش از [۱۱، ۱۲] گرفته شده است.

تعریف ۱.۱. اگر $y(t)$ یک تابع با متغیر حقیقی یا مختلط و h یک عدد مثبت باشد، E عملگر انتقال [6] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ey(t) = y(t+h),$$

$$E^k y(t) = y(t+kh),$$

که k یک مقدار ثابت است.

تعریف ۲.۱. اگر I عملگر همانی [7] باشد، در این‌صورت عملگر تفاضلی پیشرو [8] را با Δ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta = E - I, \qquad E = \Delta + I,$$

و داریم:

$$\Delta y(t) = y(t+h) - y(t).$$

گاهی اوقات یک عملگر تفاضلی را برای یک تابع دو یا چند متغیره نیز به‌کار می‌برند. در این حالت برای مشخص کردن متغیری که به جلو انتقال داده می‌شود، یک زیر نویس به‌کار می‌رود. برای مثال:

$$\Delta_t te^n = (t+h)e^n - te^n = he^n,$$

$$\Delta_n te^n = te^{n+h} - te^n = te^n(e^h - 1).$$

[5] Difference operators
[6] Shift operator
[7] Identity operator
[8] Forward difference operator

تفاضلات مراتب بالاتر را نیز با ساختن و ترکیب عملگر تفاضلی با خودش می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y(t) &= \Delta\big(\Delta y(t)\big) = \Delta\big(y(t+h) - y(t)\big)\\ &= \big(y(t+2h) - y(t+h)\big) - \big(y(t+h) - y(t)\big)\\ &= y(t+2h) - 2y(t+h) + y(t).\end{aligned}$$

و با استقرای ریاضی برای تفاضل مرتبه nام:

$$\begin{aligned}\Delta^n y(t) &= y(t+nh) - ny\big(t+(n-1)h\big) + \frac{n(n-1)}{2!}y\big(t+(n-2)h\big) + \cdots + (-1)^n y(t)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}y\big(t+(n-k)h\big).\end{aligned}$$

همچنین از تعریف ۲.۱ روابط زیر را داریم:

$$\begin{aligned}\Delta^n y(t) = (E-I)^n y(t) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-I)^k E^{n-k}y(t)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k y\big(t+(n-k)h\big).\end{aligned}$$

برای $E^n y(t)$:

$$\begin{aligned}E^n y(t) = (\Delta+I)^n y(t) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}I^k\Delta^{n-k}y(t)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}y(t).\end{aligned}$$

قضیه ۳.۱. *فرض کنید Δ عملگر تفاضلی پیشرو باشد، آن‌گاه احکام زیر به عنوان ویژگی‌های عملگر تفاضلی پیشرو برقرار می‌باشند:*

الف) برای ثابت a: $\Delta a^t = (a^h - 1)a^t$

ب) برای همه‌ی اعداد صحیح مثبت m و n: $\Delta^m\big(\Delta^n y(t)\big) = \Delta^{m+n}y(t)$

پ) برای ثابت c: $\Delta\big(cy(t)\big) = c\Delta y(t)$

ت) $$\Delta\big(y(t)+z(t)\big)=\Delta y(t)+\Delta z(t)$$

ث) $$\Delta\big(y(t)z(t)\big)=y(t)\Delta z(t)+Ez(t)\Delta y(t)$$

ج) $$\Delta\left(\frac{y(t)}{z(t)}\right)=\frac{z(t)\Delta y(t)-y(t)\Delta z(t)}{z(t)Ez(t)}$$

اثبات رابطه‌ی ث:

$$\begin{aligned}\Delta\big(y(t)z(t)\big)&=y(t+h)z(t+h)-y(t)z(t)\\&=y(t+h)z(t+h)+y(t)z(t+h)-y(t)z(t+h)-y(t)z(t)\\&=\Delta y(t)Ez(t)+y(t)\Delta z(t).\end{aligned}$$

برای اثبات دیگر روابط می‌توان به [۱۱] رجوع کرد.

تعریف ۴.۱. (عملگر مشتق [۹] D): اگر Δ عملگر تفاضلی پیشرو باشد، بنابراین مشتق مرتبه اول تابع $f(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Df(x)=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

مشتق مرتبه دوم نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D^2f(x)=D\big(Df(x)\big)=f''(x).$$

تعریف ۵.۱. (سری تیلور [۱۰]): اگر تمام مشتقات تابع $f(x)$ تا حداقل مرتبه‌ی $n+1$، در یک نقطه‌ی a از یک بازه موجود باشند، آن‌گاه یک عدد ξ بین a و هر نقطه‌ی x از آن بازه وجود دارد به طوری که:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}+R_n(x).$$

که $R_n(x)$ جمله‌ی باقیمانده است و برابر:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

این تعریف اغلب به قضیه‌ی تیلور مرسوم است.

[۹] Derivative operator
[۱۰] Taylor series

قضیه ۱.۶. *اگر D عملگر مشتق و E عملگر انتقال باشد، آن‌گاه:*

$$E = e^{hD}.$$

برهان. فرض کنید $f(x)$ یک تابع تحلیلی روی دامنه‌ی f باشد، آن‌گاه از تعریف ۱.۵:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots,$$

و از عملگر انتقال و عملگر مشتق:

$$Ef(x) = \left(1 + hD + \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^3}{3!} + \dots\right) f(x) = e^{hD}f(x).$$

بنابراین:

$$E = e^{hD}.$$

□

نتیجه ۱.۷. *از قضیه‌ی ۱.۶ نتایج زیر حاصل می‌شود:*

$$\Delta = e^{hD} - 1. \quad \text{یا} \quad e^{hD} = 1 + \Delta.$$

تعریف ۱.۸. عملگر تفاضلی پسرو [11] را با ∇ نمایش داده و برای تابع داده شده $f(x)$ آن‌را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h).$$

و δ عملگر تفاضلی مرکزی [12] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta f(x) = f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2}).$$

لم ۱.۹. *اگر ∇ عملگر تفاضلی پسرو و δ عملگر تفاضلی مرکزی باشند، در این صورت روابط زیر برقرار هستند:*

[11] Backward difference operator
[12] Central difference operator

الف) $\nabla = \Delta E^{-1} = 1 - E^{-1}$

ب) $\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} = \Delta E^{-\frac{1}{2}} = \nabla E^{\frac{1}{2}}$

برای اثبات روابط بالا به [۱۲] *رجوع کنید .*

۲.۱ تعریف‌های معادلات تفاضلی و روش‌های حل آن‌ها

تعریف ۱۰.۱. در ریاضیات، دنباله‌ای را که به صورت بازگشتی تعریف می‌شود، یک رابطه‌ی بازگشتی می‌نامند. معادله‌ی تفاضلی نوع خاصی از رابطه‌ی بازگشتی است. اکثر مطالب این بخش از [۱۲] انتخاب شده است.

تعریف ۱۱.۱. فرم کلی رابطه‌ی بازگشتی خطی از مرتبه‌ی d یک معادله تفاضلی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_d a_{n-d},$$

که در این‌جا ضرایب c_j برای همه‌ی jها ثابت می‌باشند. اگر تمام c_j ها مستقل از n باشند گفته می‌شود این رابطه دارای ضرایب ثابت است.

تعریف ۱۲.۱. یک معادله‌ی تفاضلی را می‌توان با رابطه‌ای به فرم زیر تعریف کرد:

$$G\Big(x, f(x), f(x+h), f(x+2h), \ldots, f(x+nh)\Big) = 0. \qquad (۱.۱)$$

در معادله‌ی تفاضلی (۱.۱)، G نشان‌دهنده‌ی یک

رابطه از پیوستن $x, f(x), f(x+h), f(x+2h), \ldots, f(x+nh)$ با هم است.

تعریف ۱۳.۱. (مرتبه‌ی معادله‌ی تفاضلی): مرتبه‌ی یک معادله‌ی تفاضلی را به صورت تفاضل بین بزرگترین و کوچکترین آرگومان‌های تابع f که بر h تقسیم شده‌اند، تعریف می‌کنیم.
بنابراین در معادله‌ی (۱.۱) اگر $f(x)$ و $f(x+nh)$ هر دو در رابطه ظاهر شوند مرتبه به صورت زیر است:

$$\frac{[(x+nh) - x]}{h} = n.$$