بسم الله الرحمن الرحيم

# به نام آنکه نیک آفرید


**دانشگاه تربیت معلم**

**دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر**


**پایان نامه کارشناسی ارشد**

**آمار ریاضی**

**عنوان:**

# مقایسه روشهای ارزیابی همگرایی زنجیر مارکف مونت کارلو

**استاد راهنما:**

**جناب آقای دکتر عین اله پاشا**


**تدوین:**

**سیده نصیبه هاشمی آهنگرکلایی**


**شهریور ۱۳۸۷**

سپاس ذات خدا را، آن که ستایش کنندگان نتوانند به ستایش او برسند و شمارکنندگان نتوانند نعمتهای او را برشـمارند و کوشـندگان نتواننـد حق بندگی او را ادا نمایند، آن که همتها هر چه دور پروازی کنند، کنـه اورا در نیابند و زیرکیها هر اندازه در قعر دریاهای فطانت فرو روند بـه او نرسند، آن که صفت او را حد و نهایتی و تغیّر و تبدلی نیست...

(اولین خطبه نهج البلاغه)


## تشکر و قدردانی:

بدون شک پس از الطاف بی پایان حضرت باری تعـالی، زحمـات ارزنـده استاد گرامی جناب آقای دکتر پاشا در مراحـل مختلـف راهگـشای نگارنـده بوده است، بدین وسیله از زحمات ایشان کمال تشکر را دارم.

برخودلازم می دانم که قدردانی خود را ازجناب آقای دکتررحیم زاده ثانی که مسئولیت داوری این پایان نامه را برعهده داشتند، اعلام نمایم. ازجنـاب آقـای دکتـر یـاری نیـز بـه خـاطر پـذیرش مـسئولیت داوری ایـن رسـاله سپاسگزارم.

در پدید آوردن ایـن مختـصر افـراد بـسیاری بـه صـورت مـستقیم و غیـر مستقیم مرا یاری نموده اند، به خصوص خانواده عزیزم که در جهـت ایجـاد محیطی آرام و مناسب تلاش وافر داشته اند، بدین وسیله از همگی این افراد سپاسگزارم و توفیق روزافـزون بـرای همـه ایـن عزیـزان از خداونـد متعـال مسئلت دارم.

و من اللّه توفیق

سیده نصیبه هاشمی آهنگرکلایی

تابستان۱۳۸۷

پروردگارا، مرا بر نعمات بیکرانت توان شکر نیست. الهی مرا مدد کن تا دانـش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور و نه حلقه ای برای اسارت و نـه دست مایه ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

## اگر در این ناچیز ارزشی است تقدیم به:

مادرم مثال کامل بردباری و استقامت، آن زیباترین مخلوق هستی.
و پدرم نمونه کامل مردی برای کار، عشق، زندگی وتحصیل علم.
آنان که تا لحظه به بار نشستن یاورم بودند.

ودوستان وعزیزانی که یادشان زینت بخش خاطرات شیرین من است.

In the name of GOD

Tarbiat Moallem University

Faculty of Mathematical Science and
Computer Engineering

Thesis Submitted for Degree of M.Sc. Master in
Mathematical Statistics

Title:

# Comparison of methodologies to assess the convergence of Markov chain Monte Carlo methods

Supervisor:

Einolah pasha, Ph. D

By:

Sayide Nasibe Hashemi Ahangarkolay

Sep 2008

## چکیده

تعیین طول زنجیر براساس رسیدن به همگرایی مورد نظر، مسئله مهمی است که در مدلبندی مسائل پیچیده در روشهای زنجیر مارکف مونت کارلو به چالش کشیده می شود. این پایان نامه به آزمون روشهای تجربی پارامتری مانایی اختصاص دارد. ما روشهای گلمن و روبین، یو و مایکلند، رفتری و لیوز، گیوک، مجموع ریمان و زیر نمونه ای را مقایسه می کنیم. این روشها با استفاده از سه مثال مورد آزمون قرار می گیرند. مورد ساده تولید متغیر تصادفی نرمال، مدل آمیخته نرمال دو متغیره و مورد عملی که آبشناسی یعنی، مدل انتقال سطح می‌باشد. نتایج نشان دادکه هیچ کدام از روشهادر همه موارد درست عمل نمی کنند. بنابراین ما استفاده توأم از این روشها را پیشنهاد می کنیم، محاسبه دقیق داغیدن دوره ای نیز مهم می‌باشد.

**واژه های کلیدی:** همگرایی، زنجیر مارکف مونت کارلو، نمونه گیری گیبس، گلمن و روبین، یو و مایکلند، رفتری و لیوز، گیوک، مجموع ریمان، زیر نمونه‌ای، داغیدن دوره ای.

# فهرست مندرجات

# پیش گفتار

درمباحث علمی، مونت کارلو به رده ای از الگوریتم های شبیه سازی اطلاق می گردد، که از پدیده تصادفی بودن پیروی می کنند. ایده ی زیر بنایی روش زنجیر مارکف مونت کارلو، تولید نمونه های تقریبی از توزیع پسین مورد نظر برای پارامتر$\theta$ به‌واسطه ی تولید یک زنجیر مارکف که توزیع مانای آن همان توزیع پسین مورد نظر درمسئله‌ی مورد بررسی است می باشد. این شیوه نخستین بارتوسط متروپلیس [1] و همکاران وی [2] (یولام[3] تحت تأثیر علاقه عمویش به یوکه که به محض قرض گرفتن پول آن را در قمارخانه مونت کارلو مصرف می کرد، این نام را بر روی این روش گذاشت.لازم به ذکر است که، فیزیکدان انریکو فرمی اولین کسی بود، که‌درسال ۱۹۳۰ از نمونه گیری‌آماری برای مسائل زیادی استفاده می کرد. اماهرگز روشهایش منتشر نشد فقط درصحت نتایجی که بعداًمطرح شد تاثیر گذاشت.) درمتون فیزیک ذرات بنیادی درپروژه‌سری منتهن (که درباره ساخت بمب اتمی بود،) مطرح گردید، اما در آن زمان توانائیهای تکنیکی لازم برای انجام محاسبات مورد نیازبه منظور اجرای الگوریتم موجود نبود.

در ۱۹۵۳ متروپلیس الگوریتم مشهورمتروپلیس را توصیف کرد، این شیوه اولین روش در تولید زنجیر مارکف مونت کارلوبود، بعدهادرسال ۱۹۷۰تعمیمی‌ازاین الگوریتم به نام الگوریتم مترو پلیس هستینگس [4] توسط هستینگس [5] ارائه گردید، که موجب گرایش آماردانان به استفاده از روشهای زنجیر مارکف مونت کارلو شد.

یکی از مسائل مهمی که در زنجیر های مارکف مونت کارلو مورد توجه قرار می گیرد، همگرایی نمونه‌های تولید شده به وسیله الگوریتم های نمونه گیری می باشد. روشهای مختلفی برای ارزیابی همگرایی نمونه ها وجود دارد، اما هنوز روشی که در همه موارد درست عمل کند یافت نشده است، به همین منظور در این پایان نامه از میان روشهای مختلفی که برای ارزیابی همگرایی زنجیر های مارکف مونت کارلو وجود دارد به مقایسه شش روش گلمن و روبین، یو و مایکلند، رفتری و لیوز، گیوک، مجموع ریمان و زیر نمونه‌ای می پر دازیم.

در فصل اول این پایان نامه ابتدا مقدماتی در مورد زنجیرهای مارکف و ویژگیهای آن ارائه می دهیم،

---

[1] Metropolis

[2] Stanisla(Stan)Ulam

[3] Ulam

[4] Metropolis-Hastings Algorithm

[5] Hastings

سپس زنجیر های مارکف مونت کارلو و الگوریتم های نمونه گیری را معرفی کرده، و به مبحث همگرایی نمونه های تولید شده می پردازیم، در بخش پایانی این فصل مدل مارکف پنهان را به طور مختصر شرح می دهیم.

در فصل دوم شش روش مختلف را برای ارزیابی همگرایی به همراه توضیحات مختصر ارائه می‌دهیم، در بخش پایانی این فصل به کمک دو مثال ساده به مقایسه شش روش مطرح شده در ابتدای فصل می‌پردازیم.

در فصل سوم که فصل پایانی این پایان نامه می باشد، ابتدا مدل انتقال سطح را معرفی کرده بعد از آن با مثالی عملی که درزمینه آب شناسی می باشد به مقایسه روشهای مطرح شده در این پایان نامه می‌پردازیم.

در قسمت پایانی به بحث و نتیجه گیری در مورد مطالب ارائه شده در این پایان نامه می‌پردازیم.

این پایان نامه تفصیل مقاله زیر است:

Adlouni, S.E. Favre, A.-C. Bobée, B. Comparison of ,methodologies to assess the convergence of Markov chain Monte Carlo methods interest, Computational Statistics and data analysis, 50(2006)2686-2701

در پایان امیدوارم این نوشتار در تحقیقات سایر دانشجویان مفید واقع شود.

# فصل ۱

# مقدماتی درباره زنجیر مارکف مونت کارلو

### مقدمه

در این فصل ابتدا با تعریف فرایند تصادفی [1] وزنجیر مارکف در فضای حالت ناشمارا آشنا خواهیم شد، سپس ویژگی های زنجیر مارکف را به طور مختصر بیان خواهیم کرد، وبعد از آن مباحث زنجیر مارکف مونت کارلو والگوریتم های نمونه گیری را بیان خواهیم کرد، در پایان مدلهای مارکف پنهان را مورد بررسی قرار خواهیم داد.از مراجع [۱]، [۲]، [۱۴]، [۱۵]، [۱۶]، [۱۸]، [۱۹]، [۲۰]، [۲۸]، [۲۹]، [۳۰]، [۳۱] و [۳۲] در بیان مطالب این فصل استفاده شده است.

## ۱.۱ اندازه و احتمال مقدماتی

فرض کنید $\Omega$ و $\mathcal{T}$ مجموعه هایی دلخواه باشند، که مجموعه $\Omega$ رابه عنوان فضای نمونه ای در نظر می گیریم ، حال فرض می کنیم $\mathcal{F}$ ، $\sigma$ ـمیدان تولید شده به وسیله‌یک مجموعه شمارااز زیر مجموعه های $\Omega$ باشدو به ازای هر $t \in \mathcal{T}$، $X_t : \Omega \longrightarrow R$ متغیری تصادفی نسبت به $\sigma$ ـمیدان $\mathcal{F}$ باشد ،در این صورت $(\Omega, \mathcal{F})$ را فضای اندازه پذیری برای $X$ می‌نامیم.

پیشامد ها را باحروف بزرگ $A, B, C, \cdots$ نشان می دهیم، و توابع $f, g, h, \cdots$ را توابع اندازه پذیر حقیقی مقدار روی $\sigma$ ـمیدان $\mathcal{F}$ تعریف می کنیم.

## ۲.۱ فرایند تصادفی

فرایند تصادفی مجموعه‌ای از مشاهدات $\{X_t(\omega); t \in \mathcal{T}\}$ روی فضای حالت $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است، که‌اندیس $t$ به ترتیب وقایع‌اشاره‌می کندوبا $\Omega$ درارتباط است. برای هر $\omega \in \Omega$ مجموعه $\{X_t(\omega) : t \in \mathcal{T}\}$ را که زیر مجموعه ای از $R$ است، تحقق یامسیر نمو نه ای فرایند می گوییم.

### ۱.۲.۱ مباحث اصلی در فرایند تصادفی

۱.پیش بینی: مجموعه اطلاعات تازمان $S$ به صورت مجموعه $\{X_t : t \leq s\}$ در دست است. می‌خواهیم به ازای $t > s$ ، $X_t$ را برآورد کنیم. این مسئله را در مباحث فرایند های تصادفی پیش بینی می گویند.

۲.پالایش: اغلب اطلاعات به دست آمده برای فرایندبه علتهای مختلف چه تصادفی چه غیر تصادفی ممکن است دقیق نباشداین اطلاعات ممکن است همراه با خطا یا اختلالاتی حاصل

[1] Stochastic Proces

شده باشند. جداکردن این خطا یا اختلالها از اطلاعات راپالایش گویند. به عبارت دقیق فرض کنیم فرایندواقعی $\{X_t\}$ باشدوآنچه که بر اثراندازه گیری ومشاهده حاصل شده است فرایند $\{Y_t\}$ که در آن $Y_t = X_t + N_t$ باشدبرآورد $X_t$ به کمک مشاهده مجموعه مقادیر $\{Y_s : s \leq t\}$ راپالایش فرایند $\{Y_t\}$ می گوییم می خواهیم $X_t$ راباداشتن اطلاعات $\{Y_s : s \leq t\}$ برآورد کنیم .

## ۳.۱ زنجیر مارکف

یک مجموعه از متغیرهای $\{X_t : t = ۱, \cdots, n\}$ دارای ویژگی مارکف است اگر توزیع شرطی $X_t$ به شرط مشاهدات قبلی $X_۱, \cdots, X_{t-۱}$ تنهابه مشاهده قبلی اش یعنی $X_{t-۱}$ وابستهباشد. به عبارت دیگر توزیع آینده به شرط حال و گذشته تنها به حال وابسته است. با اصطلاحات صوری یک فرایند را مارکف گوییم هرگاه به ازاء هر پیشامد مانند $A$ داشته باشیم

$$P(X_t \in A \mid X_۰, \cdots, X_{t-۱}) = P(X_t \in A \mid X_{t-۱}). \qquad (۱-۱)$$

### ۱.۳.۱ هسته انتقال

فرض کنید $\{X_t : t \geq ۰\}$ یک زنجیر مارکف، $x$ و $y$ دو حالت از فضای حالت زنجیر باشند در این صورت تابع $P(x,y) : \Omega \times \Omega \longrightarrow [۰, ۱]$ را احتمال انتقال زنجیر مارکف از حالت $x$ به حالت $y$ تعریف می کنیم. تابع $K(x,A) : \Omega \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{R}$ را هسته انتقال[۱] زنجیر مارکف تعریف میکنیم، که یک مکانیسم کلی برای توصیف ساختاراحتمال است. تابع$K(x,A)$ بر تغییر مکان زنجیر مارکف از مکانی به مکان دیگر نظارت می کند. این بدین معنی است که$K(x,A)$ یک اندازهاحتمال را برای همه نقاط $x$ در فضای حالت مجمو عه$A \in \mathcal{F}$ تعریف می کند. یک هستهانتقال دارای ویژگی های زیر است:

$$K(x,A) = \int_A K(x,dy),$$

که

$$K(x,dy) = p(x,y)dy + r(x)\delta_x(dy), \qquad (۲-۱)$$

در این تابع انتقال $P(x,x) = ۰$، $P(x,y)$ احتمال انتقال از حالت $x$ به حالت $y$ و$r(x)$ احتمال انتقال از حالت $x$ به حالت $x$ است. بنابراین داریم:

---
Transition Kernel[۱]

$$\delta_x(dy) = \begin{cases} ۱ & x \in dy, \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

و

$$r(x) = ۱ - \int_{\Omega} p(x,y)dy.$$

از معادلات فوق نتیجه می گیریم که

$$K^{(۱)}(x,dy) = K(x,dy), \qquad K^n(x,A) = \int_{\Omega} K(x,dy)K^{(n-۱)}(y,A).$$

توسعه فضای نمونه‌ازحالت یک متغیره به حالت چند متغیره هیچ گونه محدودیتی رابرای ویژگی مارکف قائل نمی شود. بلکه به راحتی می توان ویژگی مارکف رابرای حالت چندمتغیره‌نیزبیان کرد، به‌عبارت دیگرفرض کنید، $\{(X_۱^{(i)}, X_۲^{(i)}, \cdots, X_n^{(i)}), i = ۱, \cdots, m\}$ یک مجموعه ازبردارهای تصادفی دریک فضای $n$ بعدی باشد این مجموعه دارای ویژگی مارکف است اگرتوزیع شرطی $(X_۱^{(i)}, X_۲^{(i)}, \cdots, X_n^{(i)})$ به شرط مشاهدات قبلی $(X_۱^{(i-۱)}, X_۲^{(i-۱)}, \cdots, X_n^{(i-۱)}), \cdots, (X_۱^{(۱)}, X_۲^{(۱)}, \cdots, X_n^{(۱)})$ تنها به مشاهده قبلی اش یعنی $(X_۱^{(i-۱)}, X_۲^{(i-۱)}, \cdots, X_n^{(i-۱)})$ وابسته باشد.

## ۴.۱ ویژگی های زنجیرمارکف

برخی از ویژگی های زنجیرمارکف و فضای اندازه جهت بدست آوردن نتایج مفید برای برآورد آماری مورد استفاده قرار می گیرند. به همین دلیل در بخش زیربه برخی از این ویژگی‌ها همراه با توضیحات مختصری اشاره می کنیم .

### ۱.۴.۱ مجموعه های بسته وجاذب

فرض کنید$x$ حالتی از زنجیر مارکف و $A$ مجموعه‌ای ناتهی و پیشامدی در فضای نمونه ای باشد، گوییم مجموعه $A$ در دسترس حالت $x$ است هرگاه $n$ ی بزرگتر یا مساوی بایک موجود باشد به قسمی که، $K^n(x,A) > ۰$. به عبارت دیگر، بتوانیم در تعداد متناهی مرحله از حالت $x$ وارد مجموعه $A$ شویم، ومجموعه $A$ در دسترس حالت $x$ نیست هرگاه‌به ازاء هر$n \geq ۱$،

$$K^n(x,A) = ۰. \qquad (۳-۱)$$

مجموعه $A$ رابرای هسته انتقال $K$ بسته[1] گوییم، هرگاه مجموعه $A^c$ در دسترس مجموعه $A$ نباشد. به زبان نمادها

$$\forall x \in A, \forall n \geq 1 \qquad K^n(x, A^c) = 0. \qquad (1-4)$$

مجموعه $A$ رابرای هسته انتقال $K$ جاذب[1] گوییم، هرگاه‌به ازاء هر $x \in A$،

$$K(x, A) = K(x, \Omega) = 1. \qquad (1-5)$$

بنابراین شرط جاذب بودن یک مجموعه محدودتر از شرط بسته بودن آن است، یعنی این امکان است که یک مجموعه تحت شرایطی بسته باشد اما تحت همان شرایط جاذب نباشد.زیرا ممکن است برای بعضی از $x \in A$ ،

$$K(x, A) = K(x, \Omega) \neq 1. \qquad (1-6)$$

این نشان می دهد که $A$ مجموعه ای بسته است ولی جاذب نیست. یک مجموعه بسته می تواند، زیر مجموعه‌غیر قابل دسترس داشته باشد، اما در حالت جاذب کاملاً همه‌ی زیر مجموعه های آن تودرتو و در دسترس یکدیگرند.

### ۲.۴.۱ تحویل ناپذیری

مجموعه $A$ تحویل ناپذیر[2]است، اگر از هر نقطه یا مجموعه ایی از نقاط در $A$ بتوان به هر نقطه دیگر یا مجموعه دیگر از نقاط در $A$(با احتمال مثبت)رسید. به عبارت دیگر، یک زنجیر مارکف تحویل ناپذیر است، اگرتمام حالات آن در دسترس یکدیگر باشند.

### ۳.۴.۱ همگنی

زنجیر مارکفی راهمگن[3] در مرحله $n$ گوییم، هرگاه احتمال انتقال در این مرحله به مقدار $n$ وابسته نباشد.

### ۴.۴.۱ دوره‌ای

دوره‌ای حالت $x$ برابربزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد طبیعی $n$ است، که به‌ازای آنها $K_{xx}^{(n)} > 0$. دوره‌ای $x$ رابانماد $dx$ نشان می دهیم. اگر $dx = 1$ حالت $x$ نادوره‌ای واگر $dx > 1$

[1] Closed Set
[1] Absorbing Set
[2] Irreducible
[3] Homogeneity

آن رادوره‌ای[۴] بادوره $dx$ می نامیم. بدیهی است که اگر $K_{xx} > ۰$ آن گاه $dx = ۱$ ودر نتیجه $x$ نادوره‌ای است.

◄ ۱.۱. قضیه .
اگر $x$ و $y$ دو حالت از یک زنجیر مارکف باشند و $y \longleftrightarrow x$ آنگاه

$$dx = dy.$$

برهان:به [۲۸] مراجعه‌کنید.□

بنابراین زنجیر مارکف تحویل ناپذیری را دوره‌ای گوییم، هرگاه یکی از حالات زنجیر دوره‌ای $(dx > ۱, x \in \Omega)$ باشد. زنجیر مارکف تحویل ناپذیری رانادوره‌ای گوییم، هر گاه یکی از حالات زنجیر نادوره‌ای $(dx = ۱, x \in \Omega)$ باشد.

### ۵.۴.۱ مجموعه های بازگشتی وبازگشتی مثبت

فرض کنید $A$ مجموعه‌ای ناتهی و پیشامدی در فضای نمونه‌ای باشد، مجموعه $A$ رابازگشتی[۱]گوییم، اگر وفقط اگرباشروع ازوضعیت $x$ احتمال بازگشت به وضعیت $x$ پس ازمدت زمان متناهی ۱ باشد. زنجیرمارکفی رابازگشتی گوییم، هرگاه تمام حالات این زنجیر بازگشتی باشند. به عبارت دیگر، وقتی زنجیر مارکفی به حالت بازگشتی انتقال پیدامی کند، آنجامی ماند وهر زیر مجموعه نامتناهی رابارهاوبرای همیشه ملاقات می کند.

زنجیر مارکفی رابازگشتی مثبت[۲] گوییم، اگر امید تعداد مراحلی که طول می کشد، تازنجیرمجموعه بازگشتی $A(A \in \Omega)$،$A$ ناتهی) را دوباره ملاقات کند متناهی باشد. زنجیر مارکف بازگشتی رابازگشتی پوچ گوییم، اگر امید تعداد مراحلی که طول می کشد، تازنجیرمجموعه بازگشتی $A(A \in \Omega)$ رادوباره ملاقات کند نامتناهی $(\infty)$ باشد.

### ۶.۴.۱ مجموعه های گذرا

فرض کنید $\{X_t : t \geq ۰\}$ یک زنجیر مارکف و $A$ پیشامدی در فضای نمونه ای باشد، تعداد ملاقاتها در $A$ را به صورت $\eta_A = \sum_{n=۱}^{\infty} I_{X_t \in A}$، تعریف می کنیم. که در آن $I_{X_t \in A}$ تابع

---
[۴] Period
[۱] Recurrence
[۲] Positive Recurrence

نشانگراست که به صورت زیر تعریف می شود،

$$I_{X_t\in A} = \begin{cases} ۱ & X_t \in A \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

مجموعه های گذرا[۱] و بازگشتی را می توان، برحسب امید تعداد ملاقاتها در $A$ تعریف کرد.

مجموعه $A$ گذراست، اگرعدد حقیقی $M$ موجود باشد به قسمی که به ازاء هر $x \in A$،

$$E[\eta_A] \leq M. \qquad (۷-۱)$$

مجموعه $A$ بازگشتی است، اگر به ازاء هر $x \in A$، $E[\eta_A] = \infty$ .

فرض کنید $X_t$ زنجیر مارکف تحویل ناپذیری باهسته انتقال $K(x, A)$ باشد، اگر$X_n$ روی مجموعه گذرا(بازگشتی )تعریف شده باشد، آن رازنجیر مارکف تحویل ناپذیرگذرا(بازگشتی)گوییم.

### ۷.۴.۱ مانایی

همانطور که قبلاً بیان شد احتمال انتقال را با $P(x, y)$ نشان می دهیم، که احتمال اینکه زنجیر مارکف بخواهد از نقطه دلخواه $x$ به نقطه دلخواه $y$ برود، را محاسبه می کند.

$\pi(x)$ راتوزیع مانای[۲] زنجیر مارکف گوییم، هرگاه‌درشرایط ذیل صدق کند.

فضای حالت گسسته $\qquad (۸-۱) \qquad \sum_x \pi(x)P(x, y) = \pi(y).$

فضای حالت پیوسته $\qquad (۹-۱) \qquad \int \pi(x)P(x, y)dx = \pi(y).$

ازمعادلات فوق نتیجه می گیریم $\pi = \pi P$ . اگر توزیع فرایند در مرحله ای به صورت این توزیع باشد، ازآن پس تمام $x_t$ هانیزدارای همین توزیع خواهند بود. به عبارت دیگراگرزنجیرباتوزیع ماناشروع کند، آنگاه حالت زنجیردرهرمرحله ازنظراحتمالاتی مشابه حالت آغازین زنجیرخواهد بود.

با توجه به تعاریف ارائه شده در فوق برای توزیع مانا می توان شرط وجود توزیع مانا را به صورت زیر بیان کرد:

در صورت وجود توزیع مانا ($\pi(x)$)به ازای هرزوج $x, y$ در فضای حالت زنجیر تساوی زیر برقرار است:

$$P(x, y)\pi(x) = P(y, x)\pi(y) \qquad (۱۰-۱)$$

---

[۱] Transience

[۲] Stationarity

◄ ۲.۱. قضیه .

فرض کنید، $\{X_n : n \geq ۰\}$ زنجیری تحویل ناپذیر ، بازگشتی مثبت و نادوره ایی باشد، اگر $\pi$ توزیع مانای این زنجیر باشد، آنگاه

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P_{xy}^{(n)} = \pi(y). \qquad (۱۱-۱)$$

برهان:به [۳۳ ] مراجعه‌کنید.□

◄ ۳.۱. مثال .

فضای حالت زنجیر مارکفی عبارت است از $\Omega = (۰, \infty)$، که احتمال های انتقال آن به صورت زیر اند:

$$P(x,y) = \begin{cases} e^{x-y} & y \geq ۰, x > ۰ \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

مطلوب است،

الف)تعیین تحویل ناپذیری.

ب )تعیین حالتهای بازگشتی وگذرا.

ج)تعیین حالتهای جاذب وبسته.

ابتدا احتمال انتقال از حالت $x$ به حالت $x$ را محاسبه می کنیم :

$$r(x) = ۱ - \int_\Omega P(x,y)dy = ۱ - \int_۰^\infty e^{x-y}dy = ۱ - (-e^{x-y}]_۰^\infty) = ۱ - e^x.$$

اگر $x$ و $y$ دو حالت دلخواه در این زنجیر باشند، در این صورت با احتمالی مثبت (حداقل برابر $e^{x-y}$) می توان از $x$ به $y$ و یا بلعکس ازو $y$ به $x$ رفت، چون $x$ و $y$ دلخواه بودند، بنابراین تمام حالات زنجیر در دسترس یکدیگرند واین زنجیر، زنجیری تحویل ناپذیر است.

به این شرط که فرایند از $x$ شروع به حرکت کرده باشد داریم:

$$K^n(x,\Omega) = \int_\Omega K(x,dy)K^{(n-۱)}(y,\Omega) = ... = \int_\Omega K(z,du)K(u,\Omega) = ۱,$$

با توجه به تحویل ناپذیر بودن زنجیر می توان نتیجه گرفت که،

$$E(\eta_\Omega) = \sum_{n=۱}^\infty E(I_{X_n\in\Omega}) = \sum_{n=۱}^\infty P(X_n \in \Omega) = \sum_{n=۱}^\infty K^n(x,\Omega) = \sum_{n=۱}^\infty ۱ = \infty.$$