دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

اول های وابسته تعمیم یافته و رادیکال زیرمدول ها

استاد راهنما

دکتر حسین فضائلی مقیمی

استاد مشاور

دکتر محمد حسین حسینی

نگارنده

سیده رویا رضوی نژاد

شهریور ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان نامه تمام حلقه ها جابجایی و یکدار و تمام مدول ها یکانی می باشند.
یک مسئله چالشی در سالیان اخیر پیدا کردن یک توصیف مناسب برای رادیکال زیرمدول N از مدول (نوتری) M بوده است. رادیکال زیرمدول N اشتراک تمام زیرمدول های اول از M که شامل N هستند، تعریف شده است. در این پایان نامه که مرجع اصلی آن [۱۳] است، توصیفی از رادیکال زیرمدول N از مدول نوتری M که در حالات ساده دستی و در دیگر حالات به وسیله دستگاه های جبری کامپیوتری قابل محاسبه است، ارائه می شود.

واژگان کلیدی: اول های وابسته، رادیکال، تجزیه اول، اول های وابسته تعمیم یافته

تعداد صفحات پایان نامه: ۷۷

تقدیم به

پدر عزیز

و

مادر مهربانم

تقدیر و تشکر

ستایش خدای لایزالی را که پیشانی خضوع جز به خاک درگاهش نتوان سایید. اکنون که با الطاف بی منتهایش، قطره ای از دریای بی کران علمش نصیبم شد سجده شکر به درگاهش می نهم و از بزرگوارانی که در به بار نشستن این پایان نامه مرا یاری نمودند تشکر می نمایم.

این پایان نامه ثمره تلاش و راهنمایی های خردمندانه جناب آقای دکتر حسین فضائلی مقیمی می باشد و از صمیم قلب از ایشان تشکر و قدردانی می نمایم و همچنین از استاد مشاورم جناب آقای دکتر محمد حسین حسینی کمال سپاسگزاری را دارم.

از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر محمد مهدی نصرآبادی و جناب آقای دکتر حسین اقدامی، به عنوان اساتید محترم داور، که در بازنگری و تصحیح این پایان نامه مرا یاری رساندند نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

صمیمانه ترین سپاسگزاری خود را نثار خانواده عزیزم می نمایم که بزرگوارانه و دلسوزانه در طی این راه مرا یاری نمودند.

سیده رویا رضوی نژاد
شهریور ۱۳۹۱

فهرست مطالب

پیش گفتار

از وقتی که عبارت رادیکال (M-رادیکال) یک زیرمدول در اوایل سال ۱۹۸۰ ، مطرح شد، افراد مختلفی تلاش کردند رادیکال یک زیرمدول (اشتراک همه زیرمدول های اول شامل آن) را هم به شکل یک عبارت از عناصرش و هم به شکل یک نوع تجزیه توصیف کنند. پیش تر، همه تلاش ها برای یافتن توصیف یکسانی برای فرمول معروف از عناصر رادیکال معطوف شده بود. برای مثال اگر I یک ایده ال از حلقه R باشد، آنگاه $\sqrt{I} = \{r \in R : \exists n \in \mathbb{Z}^+; r^n \in I\}$.

یک روش برای محاسبه رادیکال زیرمدول N از مدول آزاد F در [۹] داده شده است. در حالات خاص دیگری فرمول رادیکال در جاهایی که محاسبات فقط به مدول اصلی مرتبط است، داده شده است. برای مثال [۵] و [۶] و [۱۱] و [۱۲] را ببینید.

در قضیه ۸.۲.۳، این پایان نامه فرمول جدیدی برای رادیکال یک زیرمدول از یک مدول با تولید متناهی روی یک حلقه نوتری داده شده است. حسن این فرمول نسبت به سایر فرمول ها قدرت محاسباتی خوب آن است.

شریف[۱] و نمازی [۲] ثابت کردند، اگر R یک حلقه باشد، آنگاه هر مدول روی R در فرمول رادیکال صدق می کند که تعبیری از رادیکال یک زیرمدول است [۱۸] . همچنین آن ها نشان دادند، اگر R یک حلقه باشد به طوری که هر ایده ال آن ماکسیمال است (یا به طور معادل $dimR = 0$) ، آنگاه هر R-مدول در فرمول رادیکال صدق می کند.

همچنین مک کاسلند [۳] و مور[۴]، ثابت کردند که هر R-مدول روی حلقه های نوتری در فرمول رادیکال صدق می کند.

در بخش اول از فصل اول مفاهیم مختلفی از جمله زیرمدول اول و رادیکال یک زیرمدول مطرح می شود. در این بخش نشان می دهیم که برای زیرمدول p-اولیه Q از M، $radQ = rad(Q+pM)$. همچنین ثابت می کنیم که اگر M یک R-مدول با تولید متناهی، m ایده ال ماکسیمال از R و Q زیرمدول m-اولیه باشد، آنگاه $radQ$، زیرمدول m-اول است و

$$radQ = rad(Q + mM) = Q + mM$$

در بخش دوم از این فصل اول های وابسته به یک زیرمدول تعریف و بررسی می شود. در قضیه ۴۶.۲.۱، با این فرض که M یک R-مدول نوتری باشد، نشان می دهیم هر زیرمدول سره N از M دارای تجزیه اولیه نرمال است و اگر $N = \cap_{i=1}^{n} Q_i$ و $p_i = \sqrt{(Q_i : M)}$، که هر Q_i، p_i-اولیه

[۱] Sharif
[۲] Namazi
[۳] McCasland
[۴] Moore

است، آنگاه $AP(N)=\{p_۱,\cdots,p_n\}$.
در فصل دوم، بخش اول p-بستار یک زیرمدول N را تعریف می کنیم و نشان می دهیم که اگر حلقه R نوتری و N زیرمدول سره از R-مدول با تولید متناهی M فرض شود و

$$AP(radN)=\{p_۱,\cdots,p_n\}$$

آنگاه $radN=\cap_{i=۱}^{n}cl_{p_i}(N+p_iM)$. به علاوه، این اشتراک تجزیه اول نرمال از $radN$ است.
در بخش دوم از این فصل وجود جواب برای معادله بستاری باقی مانده ای به شکل $cl_p(N)=(N:_M -)$ مطرح می شود. در گزاره ۵.۲.۲، با این فرض که p ایده ال اول از R و N زیرمدولی از M است که $(N:M)=p$، نتیجه می شود که اگر $cl_p(N)$ زیرمدول با تولید متناهی باشد، آنگاه $r\in R-p$ وجود دارد به طوری که $cl_p(N)=(N:_M r)$.
در فصل سوم اول های وابسته تعمیم یافته را تعریف می کنیم. مجموعه این ایده ال های اول را با $GAP(N)$ نشان می دهیم. و ثابت می کنیم که اگر R حلقه ای نوتری و N زیرمدول سره از R-مدول با تولید متناهی M باشد، آنگاه $AP(radN)\subseteq GAP(N)$.
بخش دوم از این فصل به توصیف رادیکال زیرمدول N، با استفاده از ایده ال های اول وابسته تعمیم یافته از N اختصاص دارد.

فصل ۱
اول های وابسته

.

در این فصل مفاهیم مقدماتی راجع به زیرمدول های اول و اولیه و چندین قضیه، گزاره و لم درباره تجزیه اولیه و تجزیه اولیه نرمال، همچنین یک مثال راجع به تجزیه اولیه نرمال از مرجع [۴] آورده شده است. مطالبی راجع به موضعی سازی از مراجع [۱] و [۳] آورده شده است. در چند گزاره و لم این فصل از مرجع [۷] مطالبی راجع به زیرمدول های اولیه و رادیکال آن آورده شده است. تعریف زیرمدول های h-ماکسیمال و چند لم و گزاره ادامه آن در صفحات ۱۴ و ۱۵ و ۱۶، از مرجع [۱۰] آورده شده است. چندین گزاره و لم و یکی از مثال های آخر فصل از مرجع [۱۶] آورده شده است. مطالبی راجع به اول های وابسته از مرجع [۲] آورده شده است. مابقی مطالب نیز از مراجع [۱۳] و [۱۷] و [۱۸] و [۱۹] و [۲۰] و [۲۱] آورده شده است.

۱.۱ زیرمدول های اول و رادیکال زیرمدول ها

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید L و N زیرمدول هایی از R-مدول M باشند. در این صورت ایده ال

$$\{r \in R \mid rN \subseteq L\}$$

از R را با $(L : N)$ نمایش می دهیم و آن را باقیمانده L به وسیله N می نامیم. ایده ال $(0 : N)$ را پوچساز N می نامیم و آن را با $ann(N)$ نیز نشان می دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید R حلقه و $r \in R$ باشد. دراین صورت

$$(N :_M r) = \{m \in M : rm \in N\}.$$

را کالن r در N می نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. در این صورت زیرمدول N از R-مدول M را اول می نامند، هرگاه برای هر $r \in R$ و $m \in M$ اگر $rm \in N$، آنگاه $m \in N$ یا $r \in (N : M)$.
علاوه بر این زیرمدول اول N یک زیرمدول p-اول نامیده می شود هرگاه $p = (N : M)$.

مثال ۴.۱.۱. حلقه $\mathbb{Z}$ را به عنوان یک $\mathbb{Z}$-مدول در نظر بگیرید هر ایده ال اول از حلقه $\mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$-زیرمدول اول از $\mathbb{Z}$ نیز می باشد.

مثال ۵.۱.۱. $\mathbb{Z}$-مدول آزاد $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $N = \langle(۲, ۳)\rangle$ یک $\mathbb{Z}$-مدول اول از M است.

نشان می دهیم N یک زیرمدول (۰)-اول از M می باشد. چون

$$\begin{aligned} r(۰, ۱) = x(۲, ۳) &\Rightarrow (۰, r) = (۲x, ۳x) \\ &\Rightarrow ۰ = ۲x \text{و} r = ۳x \\ &\Rightarrow x = ۰ \Rightarrow r = ۰. \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} r(۱, ۰) = x(۲, ۳) &\Rightarrow (r, ۰) = (۲x, ۳x) \\ &\Rightarrow r = ۲x \text{و} ۰ = ۳x \\ &\Rightarrow x = ۰ \Rightarrow r = ۰. \end{aligned}$$

فرض کنید $(a, b) \in M$ و $r \in R$ دلخواه باشد و داشته باشیم $r(a, b) \in N$. در این صورت $r(a(۱, ۰) + b(۰, ۱)) \in N$. لذا وجود دارد $x \in \mathbb{Z}$ای به طوری که

$$(ra(۱, ۰) + rb(۰, ۱)) = x(۲(۱, ۰) + ۳(۰, ۱))$$

در نتیجه $ra = ۲x$ و $۰ = ۲x$ و $rb = ۳x$ و $۰ = ۳x$ این ایجاب می کند که $r = ۰$. پس $(N : M) = (۰)$. فرض کنید $r \in \mathbb{Z}$ و $(a, b) \in M$ به گونه ای باشند که $r(a, b) \in N$. پس عنصر $x \in \mathbb{Z}$ وجود دارد به طوری که $r(a, b) = x(۲, ۳)$.

فرض کنید $(r \notin (N : M) = (۰))$ $r \neq ۰$. اگر $a = b = ۰$، آنگاه $(a, b) = (۰, ۰) \in N$.
در غیر این صورت، یعنی اگر $a \neq ۰$ (یا $b \neq ۰$)، پس $ra = ۲x \neq ۰$. لذا $x \neq ۰$ و در نتیجه $rb = ۳x \neq ۰$. چون $r = ۲x/a = ۳x/b$ (یا $۳a = ۲b$)، درنتیجه اعداد صحیح d و c وجود دارند به طوری که $b = ۳d$ و $a = ۲c$. با توجه به این که $۶c = ۳a = ۶d = ۲b$. پس $c = d$. بنابراین

$$(a, b) = (۲c, ۳c) = c(۲, ۳) \in N$$

پس N یک (۰)-زیر مدول اول است.

لم ۶.۱.۱. *اگر N یک زیرمدول اول از R-مدول M باشد، آنگاه ایده ال $(N:M)$ نیز اول است.*

برهان. فرض کنید N یک زیرمدول اول از R-مدول M باشد. با توجه به این که $N \neq M$، پس عنصر $m \in M - N$ موجود است و درنتیجه $\text{۱}M \nsubseteq N$. پس $\text{۱} \notin (N:M)$ بنابراین $(N:M) \neq R$. حال اگر x, y به گونه ای باشند که $xy \in (N:M)$ و $y \notin (N:M)$، پس $m' \in M$ موجود است به طوری که $ym' \notin N$ و $x(ym') = (xy)m' \in N$. با توجه به اول بودن زیرمدول N، نتیجه می شود که $xM \subseteq N$. پس $x \in (N:M)$ و لذا ایده ال $(N:M)$ اول است.
□

لم ۷.۱.۱. *فرض کنید M یک R-مدول و $\{N_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از زیرمدول های N باشد. در این صورت $(\cap_{i\in I}N_i : M) = \cap_{i\in I}(N_i : M)$.*

برهان. واضح است که به ازای هر $i \in I$، $(\cap_{i\in I}N_i : M) \subseteq (N_i : M)$. درنتیجه

$$(\cap_{i\in I}N_i : M) \subseteq \cap_{i\in I}(N_i : M) \qquad (\text{۱})$$

اکنون فرض کنید $t \in \cap_{i\in I}(N_i : M)$. پس به ازای هر $i \in I$ ، $tM \subseteq N_i$. لذا $t \in (\cap_{i\in I}N_i : M)$. بنابراین

$$\cap_{i\in I}\,(N_i : M) \subseteq (\cap_{i\in I}N_i : M) \qquad (\text{۲})$$

لذا بنابر(۱) و (۲) نتیجه می شود که $(\cap_{i\in I}N_i : M) = \cap_{i\in I}(N_i : M)$. □

تعریف ۸.۱.۱. زیرمجموعه S از حلقه جابجایی R، بسته ضربی نامیده می شود هرگاه

(۱) $\text{۱} \in S$؛

(۲) اگر $s_\text{۱}, s_\text{۲} \in S$، آنگاه $s_\text{۱}s_\text{۲} \in S$.

مثال ۹.۱.۱. مجموعه تمام عناصر ناصفر از یک دامنه صحیح، یک مجموعه بسته ضربی است. هرگاه p یک ایده ال اول از حلقه جابجایی R باشد، آنگاه $S = R - p$ نیز یک مجموعه بسته ضربی است.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید S یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه جابجایی R و M یک R-مدول باشد. در [۱] می توان دید رابطه $\sim$ روی $M \times S$ را که برای هر $(m,s),(n,t) \in M \times S$ به صورت

$$(m,s) \sim (n,t) \Leftrightarrow \exists u \in S; u(tm - sn) = \circ$$

تعریف می شود یک رابطه هم ارزی روی $M \times S$ است. به ازای هر $(m,s) \in M \times S$ رده هم ارزی عنصر را با m/s و مجموعه رده های هم ارزی $\sim$ را با $S^{-1}M$ نمایش می دهند. لذا

$$S^{-1}M = \{m/s : m \in M, s \in S\}$$

همچنین در [۱] می توان دید مجموعه $S^{-1}M$ تحت اعمال جمع و ضرب زیر، یک مدول روی حلقه $S^{-1}R$ می باشد. ($S^{-1}R$ حلقه متشکل از کسرهای R نسبت به S است).

$$m/s + n/t = (mt+ns)/st \quad , \quad r/s \cdot n/t = rn/st$$

که در آن $m,n \in M$ و $s,t \in S$ و $r \in R$، $S^{-1}R$-مدول $S^{-1}M$، مدول کسرهای M نسبت به S نامیده می شود. عضو صفر این مدول $0_M/1$ است که به ازای هر $s \in S$ با $0_M/s$ برابر است.
فرض کنید p ایده ال اول از حلقه جابجایی R باشد. دراین صورت طبق مثال ۹.۱.۱، $S = R - p$ یک زیرمجموعه بسته ضربی از R است. حلقه $S^{-1}R$ را زمانی که $S = R - p$، با نماد R_p نشان می دهند و در این حالت R_p-مدول $S^{-1}M$ را با M_p نمایش می دهند.

اگر S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R-مدول M باشد، آنگاه با تعریف ضرب اسکالر به صورت

$$\begin{aligned} R \times S^{-1}M &\longrightarrow S^{-1}M \\ (r, m/s) &\longmapsto rm/s \end{aligned}$$

$S^{-1}M$ دارای ساختار $S^{-1}R$-مدولی می باشد.

قضیه ۱۱.۱.۱. *فرض کنید S یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه R باشد. به ازای هر $s \in S$، همریختی R-مدولی*

$$\begin{aligned} \psi_s : M &\longrightarrow S^{-1}M \\ m &\longmapsto sm/s \end{aligned}$$

را درنظر بگیرید. دراین صورت

(۱) *اگر N زیرمدولی از R-مدول M باشد، آنگاه $N \subseteq \psi_s^{-1}(S^{-1}N)$.*

(۲) *اگر $N = \psi_s^{-1}(K)$ که در آن K یک $S^{-1}R$-زیرمدول $S^{-1}M$ باشد، آنگاه $K = S^{-1}N$. به عبارت دیگر هر $S^{-1}R$-زیرمدول از $S^{-1}M$، به شکل $S^{-1}N$ می باشد که N یک R-زیرمدول M است.*

(۳) *هرگاه P زیرمدول اولی از M باشد و $S\cap(P:M)=\emptyset$، آنگاه $S^{-1}P$، یک $S^{-1}R$-زیرمدول اول از $S^{-1}M$ است و $\psi_s^{-1}(S^{-1}P)=P$.*

برهان. به [۱۷]، فصل ۳، صفحه ۸ مراجعه شود. $\square$

قضیه ۱۲.۱.۱. *فرض کنید S یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه R باشد. دراین صورت تناظر یک به یکی بین مجموعه U متشکل از زیرمدول های اول P از M که $S\cap(P:M)=\emptyset$ و مجموعه V متشکل از $S^{-1}R$-زیرمدول های اول $S^{-1}M$ برقرار است که با $P\longmapsto S^{-1}P$ داده می شود.*

برهان. فرض کنید

$$\begin{aligned}\varphi: U &\longrightarrow V\\ P &\longmapsto S^{-1}P\end{aligned}$$

اگر $P_1,P_2\in U$ و $\varphi(P_1)=\varphi(P_2)$، آنگاه $S^{-1}P_1=S^{-1}P_2$. حال با توجه به این که

$$S\cap(P_1:M)=S\cap(P_2:M)=\emptyset$$

از قضیه ۱۱.۱.۱ (۳)، نتیجه می شود که

$$P_1=\psi_s^{-1}(S^{-1}P_1)=\psi_s^{-1}(S^{-1}P_2)=P_2$$

بنابراین φ یک نگاشت یک به یک می باشد. فرض کنید P یک زیرمدول اول از $S^{-1}R$-زیرمدول $S^{-1}M$ باشد و قرار می دهیم $Q=\psi_s^{-1}(P)$، چون طبق قضیه ۱۱.۱.۱ (۲)، $P=S^{-1}Q$، کافی است نشان دهیم که Q یک زیرمدول اول از R-مدول M است به طوری که $S\cap(Q:M)=\emptyset$.
اولاً، $Q\neq M$، زیرا درغیر این صورت $P=S^{-1}M$ که یک تناقض می باشد. حال فرض کنید $r\in R$ و $m\in M$ به گونه ای باشند که $rm\in Q$. چون $Q=\psi_s^{-1}(P)$، پس $rm\in\psi_s^{-1}(P)$ و درنتیجه

$$r\psi_s(m)=\psi_s(rm)\in P$$

و این ایجاب می کند که $\psi_s(m)\in P$ یا $r\in(P:S^{-1}M)$. لذا $m\in\psi_s^{-1}(\psi_s(m))\subseteq Q$ یا $r=r/1\in(P:S^{-1}M)=(S^{-1}Q:S^{-1}M)$ بنابراین $m\in Q$ و یا $r\in(Q:M)$ و درنتیجه Q یک زیرمدول اول است.
حال نشان می دهیم $S\cap(Q:M)=\emptyset$. اگر $S\cap(Q:M)\neq\emptyset$، آنگاه طبق قضیه ۱۱.۱.۱ (۱)، $S^{-1}Q=S^{-1}M$ و این در تناقض با اول بودن زیرمدول $S^{-1}Q$ می باشد، (Q یک زیرمدول اول از R-مدول M است، به وضوح $S^{-1}Q$ یک زیرمدول اول از $S^{-1}M$ می باشد). پس φ یک نگاشت پوشا نیز می باشد و حکم برقرار است. $\square$

نتیجه ۱۳.۱.۱. *فرض کنید S یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه R باشد. دراین صورت تناظر یک به یکی بین مجموعه U متشکل از ایده ال های اول R که S را قطع نمی کند و مجموعه V متشکل از ایده ال های اول $S^{-1}R$ وجود دارد که با $p \longmapsto S^{-1}p$ نشان داده می شود.*

برهان. با توجه به این که ایده ال های اول p از حلقه R، که $p \cap S = \emptyset$، همان R-زیرمدول های اول R هستند و

$$S \cap (p : M) = S \cap p = \emptyset$$

و نیز ایده ال های اول $S^{-1}R$ را نیز می توان به عنوان $S^{-1}R$-زیرمدول های اول $S^{-1}R$ در نظر گرفت بنا به قضیه قبل، حکم برقرار است. $\square$

لم ۱۴.۱.۱. *اگر P_1 و P_2 دو زیرمدول اول از R-مدول M باشند به طوری که*

$$(P_1 : M) = (P_2 : M)$$

آنگاه $P_1 \cap P_2$ نیز یک زیرمدول اول از M است.

برهان. فرض کنید $r \in R$ و $m \in M$ و $rm \in P_1 \cap P_2$ و $m \notin P_1 \cap P_2$. در این صورت $m \notin P_1$ یا $m \notin P_2$. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $m \notin P_1$. چون P_1 زیرمدول اولی از M است. پس $r \in (P_1 : M)$ بنابراین $r \in (P_1 : M) \cap (P_2 : M) = (P_1 \cap P_2 : M)$. $\square$

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید R یک دامنه صحیح و M یک R-مدول باشد. در این صورت زیرمجموعهٔ

$$T(M) = \{m \in M \mid \exists 0 \neq r \in R; rm = 0\}$$

از R-مدول M زیرمدول تابی آن نامیده می شود. همچنین اگر $T(M) = M$ مدول M را یک مدول تابدار و اگر $T(M) = 0$ مدول M را یک مدول بدون تاب می نامیم.

مثال ۱۶.۱.۱. $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}$ و فضاهای برداری، مدول های بدون تاب هستند. ولی $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}_6$ و $\mathbb{Z}(p^\infty)$، تابدار هستند.

لم ۱۷.۱.۱. *زیرمدول N از R-مدول M اول است اگر و فقط اگر $p = (N : M)$ یک ایده ال اول از R و R/p-مدول M/N، بدون تاب باشد.*

برهان. فرض کنید N یک زیرمدول اول از R–مدول M باشد. بنا به لم ۶.۱.۱، $p = (N : M)$ یک ایده ال اول از حلقه R می باشد. با توجه به این که $ann(M/N) = p$، پس M/N یک R/p–مدول است. فرض کنید $m + N \in T(M/N)$. بنابراین عنصر $0 \neq r + p \in R/p$ وجود دارد به طوری که $(r + p)(m + N) = N$.

لذا $rm + N = N$ و $r \notin p = (N : M)$. حال چون N یک زیرمدول اول است، پس $m \in N$. بنابراین $T(M/N) = 0$ و درنتیجه M/N یک R/p–مدول بدون تاب می باشد.

برعکس فرض کنید $p = (N : M)$ یک ایده ال اول و M/N یک R/p–مدول بدون تاب باشد. اولاً چون $R \neq (N : M)$ پس $M \neq N$. ثانیاً فرض کنید $m \in M$ و $r \in R$ به گونه ای باشند که $rm \in N$ و $r \notin p = (N : M)$. بنابراین $0 \neq r + p \in R/p$ و

$$rm + N = N \Rightarrow (r + p)(m + N) = N \Rightarrow m + N \in T(M/N) = 0$$

پس $m+N = N$ و درنتیجه $m \in N$. از این رو N یک زیرمدول اول از R–مدول M می باشد. $\square$

لم ۱۸.۱.۱. *اگر N یک زیرمدول از R–مدول M باشد به طوری که $p = (N : M)$ یک ایده ال ماکسیمال از R باشد، آنگاه N یک زیرمدول اول است.*

برهان. چون p ایده ال ماکسیمال است، پس اول می باشد. حال نشان می دهیم که R/p–مدول M/N، بدون تاب است یا به عبارت دیگر $T(M/N) = 0$. فرض کنید $m + N \in M/N$ و عنصر $0 \neq r + p \in R/p$ موجود است به طوری که $(r + p)(m + N) = N$.

بنابراین $rm \in N$ و $r \notin p = (N : M)$. حال چون $p \subsetneqq p + rR \subseteq R$ و p ماکسیمال می باشد، بنابراین $p + rR = R$. لذا $y \in p$ و $s \in R$ وجود دارد به طوری که $y + sr = 1$. پس $ym + srm = m$. اکنون چون $rm \in N$ و $yM \subseteq N$، نتیجه می شود که $m \in N$. یعنی $T(M/N) = 0$. پس طبق لم ۱۷.۱.۱، Nزیرمدول اول از R–مدول M می باشد. $\square$

مثال ۱۹.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد و W یک زیرفضای سره از V باشد. در این صورت به وضوح $(W : V) = 0$. پس بنا به لم قبل، W یک زیرفضای اول از V است. بنابراین هر زیرفضای سره از یک فضای برداری یک زیرمدول اول از آن است.

مثال ۲۰.۱.۱. فرض کنید p یک عدد اول باشد. در این صورت تنها زیرمدول اول $\mathbb{Z}$–مدول $\mathbb{Z}_p$، زیرمدول (0) است. زیرا $(0 : \mathbb{Z}_p) = (p)$ ماکسیمال است. پس بنا به لم ۱۸.۱.۱، (0) یک زیرمدول اول از $\mathbb{Z}_p$ می باشد.

فرض کنید K یک زیرمدول اول از $\mathbb{Z}_p$ باشد، آنگاه بنا به لم ۶.۱.۱، $(K : \mathbb{Z}_p)$ باید اول باشد. قرار می دهیم $(K : \mathbb{Z}_p) = (q)$ که در آن q یک عدد اول است. $(q)\mathbb{Z}_p$ زیرمدول $\mathbb{Z}_p$ است. $((q)\mathbb{Z}_p \leqslant \mathbb{Z}_p)$

لذا $|\mathbb{Z}_p| \,|\, |q\mathbb{Z}_p|$ پس $|q\mathbb{Z}_p| = 1$ یا $|q\mathbb{Z}_p| = p$. اگر $|q\mathbb{Z}_p| = 1$، آنگاه $q\mathbb{Z}_p = 0$. پس $q\overline{1} = 0$ پس $q = 0$. یعنی $\overline{q} \equiv 0$. درنتیجه $q \mid p$ که نتیجه می دهد $q = p$. اگر $|q\mathbb{Z}_p| = p$، آنگاه $q\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p$. یعنی $K \subseteq q\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p$. درنتیجه $K = \mathbb{Z}_p$ که تناقض است. پس $|q\mathbb{Z}_p| = 1$ یعنی $(p) = (K : \mathbb{Z}_p)$. ثابت می کنیم $K = 0$. به برهان خلف فرض کنید $0 \neq K \neq \mathbb{Z}_p$. پس $K \ni \overline{x} \neq 0$ و $\overline{y} \in \mathbb{Z}_p - K$ موجود است به طوری که

$$(\overline{x} + (p))(\overline{y} + K) = (\overline{y} + (p))(\overline{x} + K) = \overline{xy} + K = K$$

درنتیجه $T(\mathbb{Z}_p/K) \neq 0$ و این بنا به لم ۱.۱.۱۷، در تناقض با اول بودن K می باشد. بنابراین $K = (0)$.

لم ۱.۱.۲۱. *فرض کنید M یک R-مدول و m یک ایده ال ماکسیمال از R باشد به طوری که $mM \neq M$. در این صورت mM یک زیرمدول اول از R-مدول M است.*

برهان. چون $m \subseteq (mM : M)$ و $(mM : M) \neq R$، پس $(mM : M) = m$. حال بنا به لم ۱.۱.۱۸، mM یک زیرمدول اول از M است. □

لم ۱.۱.۲۲. *اگر K یک زیرمدول ماکسیمال از R-مدول M باشد، آنگاه K یک زیرمدول اول از M است.*

برهان. چون K زیرمدول ماکسیمال است. پس $K \neq M$. حال فرض کنید $r \in R$ و $m \in M$ به گونه ای باشد که $rm \in K$ و $m \notin K$. لذا $K \subsetneqq K + (m) \subseteq M$. چون K ماکسیمال است، پس $K + (m) = M$. در نتیجه

$$rM = r(K + Rm) \subseteq K \Rightarrow r \in (K : M)$$

و این یعنی K یک زیرمدول اول است. □

لم ۱.۱.۲۳. *فرض کنید M یک R-مدول باشد و N زیرمدولی از آن باشد. در این صورت تناظری یک به یک بین مجموعه همه زیرمدول های اول M که شامل N هستند و مجموعه همه زیرمدول های اول M/N برقرار است. به خصوص K/N یک زیرمدول اول از R-مدول M/N است، اگر و فقط اگر K یک زیرمدول اول از M و شامل N باشد.*

برهان. فرض کنید

$$A = \{K; N \subseteq K \leq M\} \quad \text{و} \quad B = \{L; L \leq M/N\}$$

در این صورت به سادگی دیده می شود که $f : A \longrightarrow B$ با ضابطه $f(K) = \pi(K)$، که در آن $\pi : M \longrightarrow M/N$ بروریختی طبیعی R-مدولی است، تناظر یک به یک است.

به خصوص اگر L زیرمدول دلخواهی از M/N باشد، آنگاه $L \in B$. از این رو زیرمدول K از M و شامل N وجود دارد به طوری که $f(K) = L$. بنابراین

$$L = f(K) = \pi(K) = K/N$$

حال فرض کنید K یک زیرمدول اول از R-مدول M و شامل N باشد. نشان می دهیم K/N زیرمدول اول M/N است. اولاً $K \neq M$ نتیجه می دهد که $K/N \neq M/N$. فرض کنید $m \in M$ و $r \in R$ و $r(m+N) \in K/N$. در این صورت

$$\begin{aligned} rm + N \in K/N \quad &\Rightarrow \quad \exists t \in K; rm + N = t + N \\ &\Rightarrow \quad rm - t \in N \subseteq K \\ &\Rightarrow \quad rm \in K \Rightarrow m \in K \ \text{یا}\ r \in (K : M) \\ &\Rightarrow \quad m \in K \ \text{یا}\ rM \subseteq K \\ &\Rightarrow \quad m + N \in K/N \ \text{یا}\ rM/N \subseteq K/N \\ &\Rightarrow \quad m + N \in K/N \ \text{یا}\ r \in (K/N : M/N). \end{aligned}$$

پس K/N یک زیرمدول اول از M/N است. برعکس، فرض کنید K/N یک زیرمدول اول از M/N باشد. نشان می دهیم K یک زیرمدول اول از M است. چون $K/N \neq M/N$، به وضوح $K \neq M$. حال فرض کنید $r \in R$ و $m \in M - K$ و $rm \in K$. در این صورت

$$r(m+N) \in K/N \quad \text{و} \quad m + N \in M/N - K/N.$$

چون K/N زیرمدول اول از M/N است، پس $r \in (K/N : M/N)$. درنتیجه $rM/N \subseteq K/N$. پس به ازای هر $m \in M$، عنصر $k \in K$ وجود دارد به طوری که $rm + N = k + N$. این ایجاب می کند که $rm - k \in N$. حال از این که $N \subseteq K$ نتیجه می شود که به ازای هر $m \in M$، $rm \in K$ و این یعنی $r \in (K : M)$. □

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنید N یک زیرمدول از R-مدول M باشد. در این صورت اشتراک تمام زیرمدول های اول M شامل N را رادیکال N می نامند و آن را با $radN$ نمایش می دهند. اگر هیچ زیرمدول اولی شامل N موجود نباشد، تعریف می کنیم $radN = M$. به ویژه $radM = M$. اگر I ایده الی از حلقه R باشد، آنگاه به طور طبیعی رادیکال I اشتراک تمام ایده ال های اول R (R-زیرمدول های اول R) و شامل I تعریف می شود که آن را با $\sqrt{I}$ نشان می دهیم.

زیرمدول N از R-مدول M را رادیکالی نامیم، هرگاه $radN = N$. به طور مشابه ایده ال I از حلقه R را رادیکالی می نامیم، هرگاه $\sqrt{I} = I$.

مثال ۲۵.۱.۱. حلقه $\mathbb{Z}$ را به عنوان $\mathbb{Z}$-مدول در نظر بگیرید. با توجه به این که زیرمدول های اول $\mathbb{Z}$ همان ایده ال های اول آن هستند و نیز در هر دامنه صحیح ایده ال صفر اول است، لذا خواهیم داشت $rad(\circ) = (\circ)$.

مثال ۲۶.۱.۱. در حلقه $\mathbb{Z}$، ایده ال $(\circ)$ رادیکالی است. زیرا $(\circ)$ یک ایده ال اول است. همچنین در حلقه $\mathbb{Z}_{۶}$ ایده ال $(\circ)$ با وجود این که اول نیست ولی رادیکالی است. زیرا

$$\sqrt{\circ} = \{\circ, ۳\} \cap \{\circ, ۲, ۴\} = (\circ)$$

در حالی که در حلقه $\mathbb{Z}_{۴}$، ایده ال $(\circ)$ رادیکالی نیست. زیرا $\sqrt{\circ} = \{\circ, ۲\}$.

لم ۲۷.۱.۱. *فرض کنید I و J ایده ال هایی از حلقه R باشند. دراین صورت*

(۱) *$\sqrt{I}$ با اشتراک همه ایده ال های اول حلقه R که شامل I است برابر می باشد. از این رو $\sqrt{I}$ ایده الی از حلقه R است.*

(۲) *اگر I ایده الی اولیه باشد، آنگاه $\sqrt{I}$ ایده ال اولی از R است.*

(۳) *اگر $\sqrt{I}$ ایده ال ماکسیمالی از R باشد، آنگاه I ایده ال اولیه ای از R است.*

(۴) *$\sqrt{I} + \sqrt{J} = R$ اگر و فقط اگر $I + J = R$.*

(۵) *$\sqrt{I}\sqrt{J} = \sqrt{IJ} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. به خصوص $\sqrt{I^n} = (\sqrt{I})^n$. بنابراین اگر I ایده ال اولی از R باشد، آنگاه $\sqrt{I^n} = I$.*

برهان. (۱) به [۱]، گزاره ۱۴.۱، صفحه ۹، مراجعه شود.

(۲) به [۱]، گزاره ۱.۴، صفحه ۵۱، مراجعه شود.

(۳) به [۱]، گزاره ۲.۴، صفحه ۵۱، مراجعه شود.

(۴) به [۱]، گزاره ۶.۱، صفحه ۱۲، مراجعه شود.

(۵) فرض کنید $x \in \sqrt{IJ}$. در این صورت عدد صحیح و مثبت n موجود است که $x^n \in IJ$ و چون برای هر دو ایده ال I و J، $IJ \subseteq I \cap J$. حال فرض کنید $x \in \sqrt{I \cap J}$. در این صورت به طور مشابه $x \in \sqrt{IJ}$.

فرض کنید $x \in \sqrt{I \cap J}$. در این صورت عدد صحیح و مثبت n موجود است که $x^n \in I \cap J$ یعنی $x^n \in I$ و $x^n \in J$. لذا $x \in \sqrt{I}$ و $x \in \sqrt{J}$ و درنتیجه $x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

□

لم ۲۸.۱.۱. *اگر زیرمدول Q از M، p-اولیه باشد، آنگاه* $radQ = rad(Q + pM)$.

برهان. به وضوح $radQ \subseteq rad(Q + pM)$. اگر P یک زیرمدول اول از M شامل Q باشد، آنگاه $p = \sqrt{(Q : M)} \subseteq (P : M)$. بنابراین $Q + pM \subseteq P$. درنتیجه $rad(Q + pM) \subseteq P$. لذا $rad(Q + pM) \subseteq radQ$. □

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول و N یک زیرمدول از M باشد. در این صورت N را h-ماکسیمال می نامیم، هرگاه

(۱) $(N : M) = h$؛

(۲) N در مجموعه همه زیرمدول های L از M که $(L : M) = h$، ماکسیمال باشد.

لم ۳۰.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه، I یک ایده ال از حلقه R و M یک R-مدول تولید شده توسط n عنصر باشد. اگر x عنصری از حلقه R بوده و در شرط $xM \subset IM$ صدق کند، آنگاه $y \in I$ موجود است به طوری که* $(x^n + y)M = 0$.

برهان. فرض کنید $M = (m_1, ..., m_n)$. دراین صورت به ازای هر $1 \leq i \leq n$، عناصر $y_{ij} \in I$ موجود است که $xm_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} m_j$. لذا با در نظر گرفتن

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

به ازای هر $1 \leq i \leq n$، داریم

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} x a_j = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} a_j$$

و درنتیجه $\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} x - y_{ij}) a_j = 0$. پس

$$TX = \begin{bmatrix} \delta_{11}x - y_{11} & \dots & \delta_{1n}x - y_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \delta_{n1}x - y_{n1} & \dots & \delta_{nn}x - y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = 0$$

حال با ضرب کردن طرفین تساوی فوق در ماتریس الحاقی T و این که $adjT.T = detT.I_{n \times n}$ نتیجه می شود که به ازای هر $1 \leq j \leq n$، $detT.m_j = 0$. اکنون با توجه به این که $detT = x^n + y$، که در آن $y \in I$، بنابراین $(x^n + y)m_j = 0$ و درنتیجه $(x^n + y)M = 0$. □

گزاره ۳۱.۱.۱. *فرض کنید M یک R-مدول با تولید متناهی و I یک ایده ال رادیکالی از R باشد. دراین صورت $I = (IM : M)$ اگر و فقط اگر $ann(M) \subseteq I$.*

برهان. فرض کنید $ann(M) \subseteq I$. ثابت می کنیم $I = (IM : M)$. به وضوح $I \subseteq (IM : M)$. حال اگر $r \in (IM : M)$، پس $rM \subseteq IM$. اگر M توسط n عنصر تولید شود، آنگاه بنا به لم ۳۰.۱.۱، yای وجود دارد که $r^n + y \in ann(M)$. بنابراین $r^n \in I$. لذا $(IM : M) \subseteq \sqrt{I}$ و چون I رادیکالی است $(IM : M) \subseteq I$.

برعکس، فرض کنید $I = (IM : M)$، با توجه به این که $(\circ : M) = ann(M)$، داریم

$$ann(M) = (\circ : M) \subseteq (IM : M) \subseteq I.$$

□

لم ۳۲.۱.۱. *فرض کنید N زیرمدولی از R-مدول با تولید متناهی M باشد به طوری که $h = (N : M)$. دراین صورت زیرمدول L از M موجود است به طوری که $N \subseteq L$ و L، h-ماکسیمال است.*

برهان. فرض کنید N یک زیرمدول از R-مدول با تولید متناهی M باشد و $h = (N : M)$. مجموعه

$$T = \{P \mid N \subseteq P, (P : M) = h\}$$

از زیرمدول های M را درنظر بگیرید. $T \neq \emptyset$ زیرا $N \in T$. فرض کنید $\{C_i \mid i \in I\}$ یک زنجیر دلخواه از عناصر T باشد. به ازای هر $i \in I$، $N \subseteq C_i$ و $(C_i : M) = h$. لذا $N \subseteq \cup_{i\in I} C_i$ و چون M با تولید متناهی است $(\cup_{i\in I} C_i : M) = \cup_{i\in I}(C_i : M)$. بنابراین کران بالای هر زنجیر یک عنصر از T می باشد. از این رو بنا به لم زرن T دارای عنصر ماکسیمال L است. لذا L، h-ماکسیمال است و $N \subseteq L$. □

قضیه ۳۳.۱.۱. *فرض کنید $f : M \to N$ یک همریختی R-مدولی و P یک زیرمدول اول از N باشد به طوری که $f^{-1}(P) \neq M$. دراین صورت $f^{-1}(P)$ یک زیرمدول اول از M است.*

برهان. فرض کنید P زیرمدول اولی از N باشد. دراین صورت اگر برای عناصر $r \in R$ و $x \in M$ داشته باشیم $rx \in f^{-1}(P)$، آنگاه $f(rx) \in P$. این یعنی $rf(x) \in P$. پس $rN \subseteq P$ یا $f(x) \in P$. درنتیجه $rM = rf^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(P)$ یا $x \in f^{-1}(P)$. □

قضیه ۳۴.۱.۱. *فرض کنید N زیرمدولی از R-مدول با تولید متناهی M باشد. در این صورت برای هر ایده ال اول p از حلقه R که $(N : M) \subseteq p$، زیرمدول اول P از M وجود دارد که $N \subseteq P$ و $(P : M) = p$.*