بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

متروویدهای دودویی ۴ ـ همبند داخلی نامنظم

منیژه عبدالعظیم‌پور

دانشگاه ارومیه

مرکز آموزش‌های نیمه حضوری

آبان ۱۳۸۹

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر حبیب اذانچیلر

ی نامه خانم : منیژه عبدالعظیم پور به تاریخ ۸۹/۸/۱۸ شماره ۳۲۳ ـ ۳

ـ پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸ (به حروف هیجده)

گرفت.

استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر حبیب اذانچیلر

داور خارجی: دکتر قدرت اله آزادی

داور داخلی: دکتر محسن قاسمی

نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر کریم اکبری دیلمقانی

تقدیم به :

پدرم و مادرم

دو الهه عشق و ایثار

و

همسر مهربانم

قدردانی و تشکر

خدا را شکر می‌گویم از این‌که فرصتی دوباره برای آموختن دانستنی‌های نو و تمرین و تفکر ریاضی‌وار به من اعطا کرد.

از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر اذانچیلر که تکمیل این پایان‌نامه بدون کمکهای ایشان ممکن نبود کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از داوران محترم آقایان دکترآزادی و دکتر قاسمی که افتخار شاگردیشان را نیز دارم، به‌خاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان بسیار سپاسگذارم.

از خانواده عزیزم بالاخص پدر و مادر بزرگوار و دلسوزم که همواره یاری‌گر و پشتیبان من در تمامی مراحل زندگی‌ام بوده‌اند و نیز از همسر مهربانم که با سعه‌ی صدر خویش در تمامی مراحل اینکار همواره مشوق و یاری‌کننده من بودند سپاسگذارم.

از تمامی هم‌کلاسی‌ها و دوستان عزیزم که در این مدت یار و همراه من بوده‌اند کمال تشکر را دارم.

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان‌نامه ثابت می‌شود که هر متروید دودویی ۴ ـ همبند داخلی نامنظم به غیر از F_7 و F_7^*، یکی از مترویدهای $\widetilde{K_5}$، N_{10}، $\widetilde{K_5}^*$، $T_{12}\backslash e$ و T_{12}/e را به‌عنوان یک مینور داراست و نیز قضیه وابسته به توصیف تات از مترویدهای گرافیک و حدس دهارمتیلیک روی مینورهای منع‌شده برای کلاسی از مترویدهای دودویی با پهنای شاخه‌ای حداکثر سه ثابت می‌شود.

پیشگفتار

هدف اصلی این پایان‌نامه شناسایی ماترویدهای دودویی ۴ ـ همبند داخلی نامنظم به غیر از F_7 و F_7^* می‌باشد. فرض کنید $\mathcal{M}$ کلاسی از ماترویدهای دودویی باشد که دارای مینوری یکریخت با هیچ‌یک از ماترویدهای $\widetilde{K_5}$ یا $\widetilde{K_5}^*$ نباشد. واضح است که $\mathcal{M}$ تحت مینور و دوگان بسته است. به‌عنوان حکم اصلی این پایان‌نامه ثابت می‌کنیم که اگر ماتروید $M \in \mathcal{M}$، ۴ ـ همبند داخلی و نامنظم باشد، آن‌گاه M یکریخت با F_7، F_7^*، N_{10}، T_{12}، $T_{12}\backslash e$ یا T_{12}/e است.

در نگارش این پایان‌نامه تلاش کرده‌ایم تا مطالب به ساده‌ترین صورت بیان شود. از نمادگذاری و واژگان در آکسلی[1] [۱۰] استفاده می‌کنیم.

فصل اول را با ارائه‌ی مفاهیم پایه‌ای از نظریه گراف و ماتروید آغاز می‌کنیم. مطالعه‌ی فصل اول، زمینه‌ی لازم را جهت ارائه‌ی بحث اصلی فراهم می‌سازد.

در فصل دوم ماترویدهای خاص که در قضیه و گزاره‌های پایان‌نامه به‌کار برده شده، معرفی می‌شود و خواص مهم و جالب آن‌ها بررسی می‌شود.

در فصل سوم قضیه شکافنده و تجزیه سیمور و کاربردهای آن بررسی می‌شود.

در فصل چهارم گراف‌های اساسی و دنباله‌های بلوکی را تعریف کرده و چگونگی به‌کارگیری آن‌ها در اثبات‌های آتی را توضیح می‌دهیم.

---

[1] *Oxley*

در فصل پنج بعد از بیان قضیه و گزاره‌های مورد نیاز در اثبات قضیه اصلی،آن را بیان و ثابت می‌کنیم. در بخش‌های دو و سه‌ی این فصل برهان گزاره‌های مطرح شده در بخش اول را می آوریم. در فصل ششم بعداز مطرح کردن بحث پهنای شاخه‌ای حداکثر سه، حدس دهارمتیلیک[۲] را روی مینورهای منع‌شده برای کلاسی از ماترویدهای دودویی با پهنای شاخه‌ای حداکثر سه ثابت می‌کنیم.

این پایان‌نامه براساس مقاله‌ی زیر تنظیم گردیده است:

X. Zhou. On internally 4-connected non-regular binary matroids,

Journal of Combinatorial Theory, Series B 98 (2008) 447-483.

---

[۲] *Dharmatilake*

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل به برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز از نظریه گراف و ماترویدها اشاره می‌کنیم. مفاهیم اولیه نظریه گراف از کتاب «نظریه گراف» وست[1] [۱۳] و نظریه ماتروید از کتاب «نظریه ماتروید» آکسلی[2] [۱۰] مورد استفاده قرار گرفته است.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱ گراف[3] G سه‌تایی است متشکل از یک مجموعه‌ی متناهی و غیرخالی $V(G)$ که اعضای آن رأس[4]های گراف و یک مجموعه‌ی متناهی $E(G)$، که اعضای آن یال[5]های گراف نامیده می‌شوند به همراه رابطه‌ای که به هر عضو $E(G)$ دو عضو (نه لزوماً متمایز) از اعضای $V(G)$ را وابسته می‌کند.

---

[1] West
[2] Oxley
[3] Graph
[4] Vertex
[5] Edge

تعریف ۲.۱.۱ دو عضو u و v از مجموعه $V(G)$ را مجاور[۶] گوییم هرگاه $uv \in E(G)$، در غیر این‌صورت این دو عضو را نامجاور گوییم.

هرگاه $e = uv$ یک یال از گراف G باشد، u و v را نقاط انتهایی[۷] آن یال گوییم.

تعریف ۳.۱.۱ هرگاه نقاط انتهایی یک یال بر هم منطبق باشند، آن را یک طوقه[۸] می‌گوییم و هرگاه نقاط انتهایی دو یال یکسان باشند، آن‌ها را یال‌های موازی یا چندگانه[۹] گوییم و گراف G را که فاقد طوقه و یال موازی باشد، گراف ساده[۱۰] گوییم.

تعریف ۴.۱.۱ زیرمجموعه A از $V(G)$ را مستقل[۱۱] گوییم هرگاه هر دو عضو A نامجاور باشد.

تعریف ۵.۱.۱ گراف G را دوبخشی[۱۲] گوییم هرگاه بتوان مجموعه رأس‌های آن را به‌صورت اجتماع دو مجموعه مستقل جداازهم مثل V_1 و V_2 نوشت به‌طوری‌که هر یال G یک رأس از V_1 را به یک رأس از V_2 وصل کند، این گراف را به‌صورت $G(V_1, V_2)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید G یک گراف دو بخشی با افراز دوبخشی $V(G) = V_1 \cup V_2$ باشد، هرگاه هر رأس از V_1 با هر رأس از V_2 مجاور باشد، گوییم G یک گراف کامل دوبخشی[۱۳] است.

هرگاه $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$، دراین‌صورت گراف کامل دوبخشی را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱ گراف G را k ـ بخشی گوییم هرگاه بتوان $V(G)$ را به‌صورت اجتماع k مجموعه مستقل دوبه‌دو جداازهم نوشت.

---

[۶] *Adjecent*
[۷] *End point*
[۸] *Loop*
[۹] *Multiple*
[۱۰] *Simple graph*
[۱۱] *Independent*
[۱۲] *Bipartite*
[۱۳] *Complete partition graph*

تعریف ۸.۱.۱ گراف H زیرگراف[۱۴] G است، هرگاه:

۱) $V(H) \subseteq V(G)$

۲) $E(H) \subseteq E(G)$

دراین‌صورت آن را به‌صورت $H \subseteq G$ نشان داده و گوییم G شامل H است.

اگر $V(H) = V(G)$، آن‌گاه H را زیرگراف فراگیر[۱۵] G گویند.

تعریف ۹.۱.۱ برای هر رأس $v \in V(G)$، درجه[۱۶] آن رأس را تعداد یال‌های واقع بر آن رأس تعریف کرده و آن را با $d(v)$ نمایش می‌دهیم.

رأسی که هیچ یالی بر آن واقع نباشد (رأس با درجه صفر) را رأس تنها[۱۷] گوییم و کمترین و بیشترین درجه‌ی رأس‌های G را به‌ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱.۱ گراف G را منتظم[۱۸] گوییم هرگاه $\Delta(G) = \delta(G)$ و آن را k ـ منتظم گوییم هرگاه $\Delta(G) = \delta(G) = k$

تعریف ۱۱.۱.۱ ماتریس مجاورت[۱۹] گراف ساده G، ماتریس $n \times n$، $A(G) = (a_{ij})_{n\times n}$ است که در آن a_{ij} تعداد یال‌های بانقاط انتهایی v_i و v_j است. ماتریس $A(G)$ یک ماتریس متقارن است که تمامی درایه‌های قطر اصلی آن صفرند.

تعریف ۱۲.۱.۱ ماتریس وقوع[۲۰] گراف ساده G، ماتریس $n \times n$، $M(G) = (m_{ij})_{n\times n}$ است که در آن $m_{ij} = 1$، هرگاه رأس v_i بر یال e_j واقع باشد و در غیر این‌صورت $m_{ij} = 0$.

[۱۴] *Subgraph*
[۱۵] *Spanning subgraph*
[۱۶] *Degree*
[۱۷] *Isolated Vertex*
[۱۸] *Regular*
[۱۹] *Adjacency matrix*
[۲۰] *Incidence matrix*

تعریف ۱۳.۱.۱ دو گراف G و H را یکریخت [۲۱] گوییم هرگاه نگاشت‌های دوسویی $\psi : V(G) \longrightarrow V(H)$ و $\theta : E(G) \longrightarrow E(H)$ چنان موجود باشند که رأس v از گراف G روی یال e ازگراف G باشد اگر و تنهااگر $\psi(v)$ روی یال $\theta(e)$ باشد. یکریختی دو گراف G و H را با نماد $G \cong H$ نمایش می‌دهیم. درصورتی‌که $G \cong H$، تساوی‌های زیر برقرارند:

$$|E(G)| = |E(H)| \quad , \quad |V(G)| = |V(H)|$$

تعریف ۱۴.۱.۱ گراف کامل [۲۲] یک گراف ساده است که رأس‌های آن دوبه‌دو مجاورند. یک گراف کامل با n رأس، با نماد K_n نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۵.۱.۱ یک گشت [۲۳] در گراف ساده G، دنباله‌ای متناوب از رأس‌ها و یال‌های G به‌صورت $v_0 e_1 v_1 ... e_k v_{k+1}$ می‌باشد به‌طوری‌که در آن برای هر $0 \leq i \leq k+1$، v_{i-1} و v_i نقاط انتهایی یال e_i هستند. برای راحتی، یک گشت در گراف ساده را به‌صورت $v_0 v_1 ... v_{k+1}$ نمایش می‌دهیم.

اگر $P = v_0 v_1 ... v_k$ و $Q = v_k v_{k+1} ... v_n$ دو گشت باشند، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$P + Q = v_0 v_1 ... v_k v_{k+1} v_{k+2} \ ... \ v_n$$

تعریف ۱۶.۱.۱ هرگاه هیچ یالی در گشت تکرار نشود، آن را یک گذر [۲۴] گوییم.

یک گشت یا گذر بسته است، هرگاه نقاط انتهایی آن‌ها یکی باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱ هرگاه هیچ رأسی در گذر تکرار نشود، آن را یک مسیر [۲۵] می‌نامیم.

تعریف ۱۸.۱.۱ مسیر $v_0 e_1 v_1 ... e_n v_n$ که در آن رابطه $v_0 = v_n$ برقرار باشد را دور [۲۶] گوییم.

---

[۲۱] *Isomorphic*
[۲۲] *Complete*
[۲۳] *Walk*
[۲۴] *Trail*
[۲۵] *Path*
[۲۶] *Circuit*

تعریف ۱۹.۱.۱ طول[۲۷] یک گشت، گذر، مسیر یا دور، تعداد یال‌های موجود در آن می‌باشد.

تعریف ۲۰.۱.۱ هرگاه رئوس u و v در گراف G به هم وصل باشند، فاصله بین رئوس u و v در G را با نماد $d(u,v)$ نمایش می‌دهیم. که در آن $d(u,v)$، طول کوتاهترین (u,v) ـ مسیر در G است.

تعریف ۲۱.۱.۱ گرافی را که هر یال آن جهت‌دار باشد، گراف جهت‌دار[۲۸] گوییم.

تعریف ۲۲.۱.۱ ماتریس وقوع گراف جهت‌دار G را با نماد $A_{D(G)} = [a_{ij}]$ نمایش می‌دهیم که در آن $a_{ij} = ۱$، هرگاه رأس i نقطه‌ی انتهایی کمان j باشد، $a_{ij} = -۱$، هرگاه رأس i نقطه‌ی ابتدایی کمان j باشد و در غیر این‌صورت $a_{ij} = ۰$.

تعریف ۲۳.۱.۱ گراف G را همبند[۲۹] گوییم هرگاه برای هر دو رأس $u, v \in V(G)$، یک (u,v) ـ مسیر بین آن رأس‌ها وجود داشته باشد. در غیر این‌صورت گراف G ناهمبند[۳۰] است.

تعریف ۲۴.۱.۱ هر زیرگراف همبند ماکسیمال از گراف G، یک مؤلفه[۳۱] گراف G نامیده می‌شود. مؤلفه یا یک گراف بدیهی[۳۲] است اگر هیچ یالی نداشته باشد؛ در غیر این‌صورت آن را غیربدیهی گوییم.

تعریف ۲۵.۱.۱ یک برش رأسی[۳۳] گراف G، مجموعه‌ای از رأس‌ها است که با حذف آنها، تعداد مؤلفه‌های همبند گراف G افزایش یابد.

هرگاه این مجموعه شامل تنها یک رأس باشد، به آن رأس، رأس برشی[۳۴] می‌گوییم.

---

[۲۷] *Length*
[۲۸] *Digraph*
[۲۹] *Connected*
[۳۰] *Disconnected*
[۳۱] *Component*
[۳۲] *Trivial*
[۳۳] *Vertex Cut*
[۳۴] *Cut Vertex*

تعریف ۲۶.۱.۱ یک برش یالی[۳۵] از گراف G، مجموعه ای از یال‌ها است که با حذف آنها تعداد مؤلفه‌های G افزایش یابد.

یک برش یالی را مینیمال گویند هرگاه حذف آن از G یک گراف ناهمبند ایجاد کند، اما هیچ زیرمجموعه حقیقی از آن این خاصیت را نداشته باشد. برش یالی مینیمال، بند[۳۶] نامیده می‌شود.

تعریف ۲۷.۱.۱ هرگاه G_1 و G_2 دو گراف باشند، اجتماع[۳۷] آن‌ها که با نماد $G_1 \cup G_2$ نمایش داده می‌شود، گرافی است که مجموعه رئوس آن $V(G_1) \cup V(G_2)$ و مجموعه یال‌های آن $E(G_1) \cup E(G_2)$ می‌باشد.

تعریف ۲۸.۱.۱ فرض کنید G یک گراف و e یک یال آن باشد، ادغام[۳۸] یال e با نقاط انتهایی u و v یعنی حذف دو رأس u و v و یال e از گراف G و افزودن رأس جدید x به آن به‌طوری‌که هر یال واقع بر u یا v در G واقع بر رأس جدید x در گراف جدید باشد. این گراف را با $G.e$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۹.۱.۱ گرافی که هیچ دوری نداشته باشد را یک گراف بی‌دور[۳۹] گویند. گراف بی‌دور را جنگل[۴۰] نیز می‌گویند.

تعریف ۳۰.۱.۱ گراف بی‌دور همبند را درخت[۴۱] می‌نامند.

هر زیرگراف فراگیر از گراف G که یک درخت باشد را درخت فراگیر[۴۲] گراف G گویند.

تعریف ۳۱.۱.۱ هرگاه رأس v از گراف G دارای درجه‌ی یک باشد، آن را یک برگ[۴۳] گوییم.

---

[۳۵] *Edge Cut*
[۳۶] *Bond*
[۳۷] *Union*
[۳۸] *Contraction*
[۳۹] *Acyclic*
[۴۰] *Forest*
[۴۱] *Tree*
[۴۲] *Spanning tree*
[۴۳] *Leavs*

تعریف ۳۲.۱.۱ همبندی گراف G که آن را با $\kappa(G)$ نمایش می‌دهیم عبارت‌است از کمترین تعداد رأس‌هایی که با حذف آن‌ها یک گراف ناهمبند یا یک رأس تنها حاصل می‌شود.

قضیه ۳۳.۱.۱ (ویتنی[۴۴]) اگر G یک گراف بی‌طوقه و فاقد رأس تنها و حداقل سه رأس داشته باشد، آن‌گاه G ۲ ـ همبند است اگر و تنها اگر برای هر دو یال متمایز G دوری از G شامل این دو یال وجود داشته باشد.

برهان : به مرجع [۱۳]، قضیه [۴.۱.۱] مراجعه شود. ■

تعریف ۳۴.۱.۱ یک گراف را مسطح‌شده[۴۵] گویند هرگاه رسم بدون تقاطع یال‌ها در صفحه داشته باشد.

تعریف ۳۵.۱.۱ قسمتی از صفحه که توسط مجموعه‌ای از یال‌های گراف مسطح G احاطه شده باشد و شامل هیچ رأسی از گراف نباشد را وجه‌های[۴۶] یک گراف مسطح می‌نامند.

تعریف ۳۶.۱.۱ گراف دوگان [۴۷] یک گراف مسطح، گراف مسطح G^* است که رأس‌های آن متناظر با وجه‌های G است و یال‌های G^* نیز متناظر با یال‌های G هستند که در آن اگر e یالی از G و مرز بین وجه X و وجه Y از آن باشد، آن‌گاه نقاط انتهایی یال e^*، متناظر با یال e و رأس‌های x^* و y^* از G^*، متناظر با وجه‌های X و Y از G را به‌هم وصل می‌کند.

هر یال برش از G متناظر با یک طوقه G^* است، زیرا وجوه دو طرف یک پل یکسان هستند.

اگر دو وجه متفاوت G بیش از یک یال مرزی داشته باشند، آن‌گاه یال‌های موازی در G^* خواهیم داشت.

[۴۴] *Whitney*
[۴۵] *Planar*
[۴۶] *Face*
[۴۷] *Dual*

۲.۱ مفاهیم مقدماتی از نظریه متروید

تعریف ۱.۲.۱ مترویدِ[۴۸] M زوج مرتب $M = (E, \mathcal{I})$ است که در آن E یک مجموعه متناهی بوده و $\mathcal{I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های E می‌باشد که در سه شرط زیر صدق می‌کند:

$I1$) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

$I2$) اگر $I \in \mathcal{I}$ و $I' \subseteq I$، آن‌گاه $I' \in \mathcal{I}$.

$I3$) اگر $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ و $|I_1| < |I_2|$، آن‌گاه عضوی مانند $e \in I_2 - I_1$ وجود دارد به‌طوری‌که $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

نکته ۲.۲.۱ فرض کنیم $M = (E, \mathcal{I})$ یک مترویید باشد. دراین صورت:

(۱) M را یک مترویید روی E می‌گویند و E را مجموعه‌ی زمینه[۴۹] مترویید M گویند.

(۲) هر عضو $\mathcal{I}$ را یک مجموعه مستقل مترویید M گویند و زیرمجموعه‌های E که عضو $\mathcal{I}$ نیستند را مجموعه‌های وابسته مترویید M می‌گویند.

تعریف ۳.۲.۱ زیرمجموعه‌های وابسته مینیمال مترویید M را یک دور گوییم. گردایه تمامی دورهای مترویید M را با $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ یا با $\mathcal{C}$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۴.۲.۱ فرض کنید E مجموعه‌ای از بردارها و $\mathcal{F}$ گردایه تمام زیرمجموعه‌های مستقل خطی E باشد. دراین‌صورت $(E, \mathcal{F})$ یک مترویید است. مترویید حاصل را یک مترویید برداری[۵۰] گویند.

برهان : به مرجع [۱۰]، لم [۱.۱.۱] مراجعه شود. ■

---

[۴۸] *Matroid*
[۴۹] *Ground set*
[۵۰] *Vector matroid*

مثال ۵.۲.۱ فرض کنید A ماتریس زیر باشد:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

که در آن ستون‌ها به ترتیب از چپ ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ برچسب گذاری شده‌اند. دراین‌صورت با فرض:

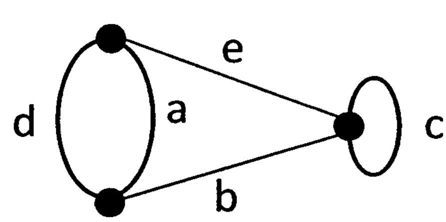
$E = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{۱\}, \{۲\}, \{۴\}, \{۵\}, \{۱, ۲\}, \{۱, ۵\}, \{۲, ۴\}, \{۲, ۵\}, \{۴, ۵\}\}$

$(E, \mathcal{I})$ یک ماتروید می‌باشد.

گزاره ۶.۲.۱ فرض کنید E مجموعه یال‌های گراف G و $\mathcal{C}$ گردایه تمام دورهای G باشد، دراین‌صورت $\mathcal{C}$ گردایه دورهای یک ماتروید روی مجموعه E است. این ماتروید را ماتروید دوری[۵۱] گراف G گوییم و آن را با نماد $M(G)$ نمایش می‌دهیم.

برهان : به مرجع [۱۰]، گزاره [۱.۱.۷] مراجعه شود. ■

مثال ۷.۲.۱ گراف زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۱.۱. گراف G

ماتروید دوری حاصل از این گراف، ماترویدی با مجموعه‌ی زمینه $E = \{a, ..., e\}$ و مجموعه مستقل

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{b, d\}, \{d, e\}\}$$

وگردایه‌ی دورهای

[۵۱] Cycle matroid