بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

بررسی مونوپولی‌های پویا و ایستا در گراف‌ها با آستانه‌های دلخواه

پایان‌نامهٔ دکتری

حسین سلطانی صوفیانی

استاد راهنما: **دکتر منوچهر ذاکر**

شهریور ۱۳۹۳

ماحصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم به آنان که مهر آسمانی‌شان آرام بخش آلام زمینی‌ام است.

به پدرم به استواری کوه،

به مادرم به زلالی چشمه،

به همسرم به صمیمیت باران.

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس یکتای بی همتا را که لطفش بر ما عیان است، ادای شکرش را هیچ زبان و دریای فضلش را هیچ کران نیست. ای مهربان از تو می‌خواهم همه‌ی کسانی را که در دوران تحصیلاتم مرا یاری نموده‌اند، در سایه‌ی لطف و محبت بی‌کرانت، سلامت، شادکام و موفق بداری.

از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر منوچهر ذاکر که زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده داشتند، کمال سپاس را دارم.

تشکری ویژه دارم از دوست و هم‌کلاسی عزیزم جناب آقای دکتر کاوه خوشخواه که در اکثر کارهای تحقیقاتی با هم همکاری داشتیم و در تدوین این رساله از هیچ کمکی دریغ نکردند و با تشکر از هم‌کلاسی ارجمندم سرکار خانم دکتر میترا نعمتی که در بخشی از کارهای تحقیقاتی با ایشان همکاری داشته‌ام.

از جناب آقای دکتر علی طاهرخانی، سرکار خانم دکتر فاطمه سادات موسوی، جناب آقای دکتر مسعود آرین‌نژاد و جناب آقای دکتر سلمان خدایی‌فر که زحمت داوری این رساله را به عهده داشته‌اند، سپاسگذارم.

همچنین از دوستان و هم‌اتاقی‌های خوبم آقایان یونس فرهنگی، وحید تکنیک، مجتبی کریمی و سایر عزیزانی که محیطی سرشار از دوستی و آرامش را به وجود آوردند، متشکرم.

کمال تشکر و امتنان را از پدر و مادر عزیزم دارم که نه می‌توانم موهایشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست‌های پینه بسته‌شان که ثمره‌ی تلاش برای افتخار من است، مرهمی بیابم.

در نهایت صمیمانه‌ترین تشکرها را باید از همسر عزیزم داشته باشم که با فداکاری تمام پشتیبان و مشوق من در ادامه‌ی کارهای تحقیقاتی‌ام بود و تمام مشکلات و دوری مرا متحمل شد و با همیاری و همدلی این سخت را برایم آسان نمود.

چکیده

گسترش تاثیر در شبکه‌ها به شکل گرافی مدل‌سازی می‌شود که نشان دهنده‌ی اعضا و ارتباط بین آن‌ها می‌باشد و هر عضو برای تاثیر نپذیرفتن دارای آستانه‌ای است. اگر تعداد اعضای مرتبط با عضوی که قبلا تحت تاثیر پدیده بوده‌اند، حداقل به اندازه‌ی آستانه‌اش باشد، آنگاه این عضو نیز تاثیر می‌پذیرد. گسترش تاثیر بسته به این که تنها در یک مرحله انجام گیرد یا اینکه رئوسی که در مرحله‌ای فعال شده‌اند خود در مراحل بعد در فعال شدن رئوس دیگر تاثیر داشته باشند، مونوپولی ایستا یا پویا نامیده می‌شود. در این رساله کران‌های پایینی برحسب اندازه‌ی کمر زوج و فرد گراف برای مونوپولی‌های ایستا ارائه شده است. برای گراف‌های جهتدار با آستانه‌های ثابت ۲ و آستانه‌ی اکثریت مطلق نشان داده شده است که مساله‌ی تعیین اندازه‌ی کوچکترین مونوپولی پویا مساله‌ای NP -سخت می‌باشد. همچنین کران بالای نصف تعداد رئوس را برای اندازه‌ی کوچکترین مونوپولی پویای اکثریت مطلق در گراف‌های جهتدار بدون یال چندگانه، که بهترین کران یافته شده در این زمینه می‌باشد، به دست آورده‌ایم. پس از آن به معرفی مونوپولی‌های پویا با آستانه‌گذاری‌های احتمالاتی پرداخته‌ایم و برای اندازه‌ی کوچکترین مونوپولی آن‌ها خاصیت تجمعی حول امید ریاضی‌اش را نشان داده‌ایم و از آن کران بالایی که بهترین کران ممکن است، به دست آورده‌ایم. در ادامه کران‌های پایینی برای اندازه‌ی مونوپولی‌های پویای گراف‌ها با آستانه‌های احتمالاتی ثابت شده است. در پایان اندازه‌ی کوچکترین مونوپولی ایستا و همچنین پویا با آستانه‌ی متوسط داده شده را برحسب اندازه‌ی کوچک‌ترین پوشش راسی جزئی فرمول‌بندی کرده‌ایم و NP -سخت بودن تعیین اندازه‌ی کوچک‌ترین پوشش راسی جزئی را روی گراف‌های دوبخشی، مسطح و وتری نشان داده‌ایم و از آن NP -سخت بودن تعیین اندازه‌ی کوچک‌ترین مونوپولی ایستا و پویا با آستانه‌ی متوسط داده شده را روی این دسته از گراف‌ها به دست آورده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: *گسترش تاثیر در گراف‌ها، مونوپولی پویا، مونوپولی ایستا، پوشش راسی جزئی.*

فهرست

لیست تصاویر

پیش‌گفتار

پدیده‌های مختلفی در شبکه‌های اجتماعی حقیقی و مجازی گسترش می‌یابد که در این گسترش، هر عضو، از اعضای دیگر شبکه که با آن‌ها در ارتباط است، تاثیرپذیر است. از جمله‌ی این پدیده‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد؛ انتخاب مکانی خاص برای گردشگری که فرد تصمیم می‌گیرد به آن مکان خاص برود یا نرود، انتخابات که در آن فرد برای رای دادن یا ندادن به نامزدی خاص تصمیم می‌گیرد، شیوع بیماری‌های ویروسی که واگیردار هستند، ویروسی شدن کامپیوترهای موجود در یک شبکه، پذیرش و خرید محصولات یک شرکت جدید توسط مشتریان و ... همگی پدیده‌هایی هستند که گسترش آن‌ها میان اعضای شبکه، تحت تاثیر اعضای دیگر آن شبکه که قبلا آن پدیده را تجربه کرده‌اند، می‌باشد. بدیهی است که توانایی کنترل گسترش این پدیده‌ها برای بسیاری از افراد، شرکت‌ها و گروه‌ها به لحاظ منافع سیاسی و اقتصادی امری مطلوب است. با توجه به آنچه گفته شد، در دهه‌های اخیر مطالعه و مدل‌سازی گسترش تاثیر عقاید در شبکه‌ها مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. مدل‌سازی ریاضی گسترش تاثیر در شبکه‌ها توسط نظریه گراف انجام می‌شود. به این صورت شبکه مورد نظر را با یک گراف مدل‌سازی می‌کنیم که هر عضو شبکه را با یک راس نشان داده و اگر دو عضو شبکه با هم در ارتباط باشند، رئوس نظیر آن‌ها را با یال به هم متصل می‌کنیم. برای مدل‌سازی گسترش تاثیر در گراف‌ها از مفهوم مونوپولی‌ها استفاده می‌کنیم که در آن هر راسی دارای یک حد آستانه‌ای است که اگر حداقل به تعداد آستانه‌اش همسایه‌ی فعال داشته باشد، خودش نیز فعال می‌گردد. حال بسته به این که فعال شدن تنها در یک مرحله انجام گردد یا اینکه رئوسی که فعال می‌شوند در مراحل بعد بتوانند رئوس دیگر را نیز فعال نمایند، مونوپولی ایستا یا پویا نامیده می‌شود.

فرض کنید G یک گراف باشد. در اینصورت به تابع $\tau : V(G) \longrightarrow \mathbb{N}\cup\{0\}$ یک آستانه‌گذاری برای رئوس G گوییم، هرگاه به ازای هر راس $v \in V(G)$ داشته باشیم $\tau(v) \leq \deg(v)$. زیرمجموعه‌ی

D از رئوس گراف G یک τ-مونوپولی پویا (τ-مونوپولی دینامیکی) یا به اختصار دینامو گوییم، هرگاه رئوس G را بتوان به مجموعه‌های $D_0, D_1, \ldots, D_k$ چنان افراز کرد که $D_0 = D$ و به ازای هر i، $1 \le i \le k$، هر راس $v \in D_i$ دارای حداقل $\tau(v)$ همسایه در $D_0 \cup \cdots \cup D_{i-1}$ باشد. اندازه‌ی کوچکترین مونوپولی پویای گراف G با تابع آستانه‌ی τ را با نماد $\mathrm{dyn}_\tau(G)$ نشان می‌دهیم. ساختار مونوپولی‌های پویا، به زبان فرآیندهای دینامیکی در زمان گسسته، به صورت زیر بیان می‌شود. یک فرآیند دینامیکی روی رئوس گراف G را در نظر بگیرید که بعضی از رئوس آن در ابتدا به عنوان رئوس فعال در نظر گرفته می‌شوند. رئوس فعال در هر زمان گسسته‌ی $t \ge 0$ را با D_t نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم در ابتدای فرآیند (در زمان صفر) رئوس زیرمجموعه‌ی $D \subseteq V(G)$ فعال می‌باشند یا به عبارتی $D_0 = D$. در هر زمان گسسته‌ی t هر راس غیرفعال v اگر دارای حداقل $\tau(v)$ همسایه‌ی فعال در $D_0, \cdots, D_{t-1}$ باشد، فعال می‌گردد. اگر در پایان فرآیند، همه‌ی رئوس فعال شده بودند، در اینصورت به زیرمجموعه‌ی ابتدایی D مونوپولی پویا یا دینامو می‌گویند.

از طرفی اگر فرآیند فوق را به صورت تک مرحله‌ای در نظر بگیریم، یعنی فقط زمان گسسته‌ی ۰ و ۱ داشته باشیم، در اینصورت به مجموعه‌ی D، مونوپولی ایستا (مونوپولی استاتیک) و یا به اختصار استامو می‌گوییم. به عبارت دیگر زیرمجموعه‌ی D از رئوس گراف G را مونوپولی ایستای گراف G با تابع آستانه‌ی τ گوییم، هرگاه هر راس $v \in V(G) \setminus D$ دارای حداقل $\tau(v)$ همسایه در D باشد. اندازه‌ی کوچکترین مونوپولی ایستای گراف G با تابع آستانه‌ی τ را با نماد $\mathrm{mon}_\tau(G)$ نشان می‌دهیم.

در حقیقت مونوپولی ایستا تعمیمی از مفهوم مجموعه‌ی احاطه‌گر است. به این معنی که اگر مجموعه‌ی D یک τ-مونوپولی ایستا باشد، هر راس $v \in V(G) \setminus D$ به جای احاطه شدن توسط تنها یک راس از مجموعه‌ی احاطه‌گر، باید توسط حداقل $\tau(v)$ راس احاطه شود. مونوپولی پویا را نیز می‌توان تعمیمی از مفهوم مونوپولی ایستا در نظر گرفت که هر راس پس از احاطه (فعال) شدن، خود در مراحل بعدی می‌تواند به احاطه شدن سایر رئوس کمک کند.

لازم به ذکر است مونوپولی‌های ایستا تحت عنوان اتحاد تهاجمی [1] در مقالاتی مانند [۱۸] [۱۹] [۳۷] [۳۸]، مورد پژوهش قرار گرفته است. از طرفی مونوپولی‌های پویا نیز با عناوین مختلف مانند انتخاب مجموعه‌ی هدف [2] [۱] [۶] [۳۵]، مجموعه‌ی متحول کننده [3] [۲] [۱۳]، گسترش پیام [4] [۱۲] و ... مورد مطالعه‌ی محققین حوزه‌های ترکیبیات و همچنین علوم کامپیوتر قرار گرفته است.

نتایج پژوهش‌های ما در زمینه‌ی مونوپولی‌ها در مقالات [۲۸] [۳۰] [۳۹] [۴۰] [۲۹] به چاپ رسیده است که شامل مطالعه روی مونوپولی‌های ایستا و همچنین مونوپولی‌های پویا هستند. مطالب این رساله در پنج فصل گردآوری شده است که به ترتیب زیر می‌باشد. در فصل اول، مطالب مقدماتی لازم از نظریه‌ی گراف و نظریه‌ی احتمال و نیز پیچیدگی محاسباتی را بیان نموده و در ادامه‌ی فصل به تعاریف اولیه و بیان برخی نتایج مهم موجود در زمینه‌ی مونوپولی‌ها پرداخته‌ایم.

در فصل دوم که نتایج آن شامل بخشی از نتایج مقاله‌ی [۲۸] است، کران‌های پایینی با استفاده از اندازه‌ی کمر زوج و فرد گراف، برای مونوپولی‌های ایستای اکثریت به شکل $\mathrm{mo}(G) \geq \mathrm{eg}(G)/۳$ و $\mathrm{mo}(G) \geq \mathrm{og}(G)/۳$ ارائه می‌دهیم و در ادامه با افزودن پارامتر جدید، مینیمم درجه‌ی گراف، کران پایینی به صورت زیر را بیان می‌کنیم.

$$\mathrm{mo}(G) \geq \frac{۱}{۴}\left(\frac{\delta(G)}{۲}\right)^{(\mathrm{eg}(G)/۲)-۱}$$

در فصل سوم، به بررسی مونوپولی‌های پویا در گراف‌های جهتدار پرداخته‌ایم که شامل نتایج مقاله‌ی [۳۰] است. در این فصل ابتدا نشان داده‌ایم که مساله‌ی تعیین اندازه‌ی کوچکترین مونوپولی پویا در گراف‌های جهتدار هم با آستانه‌ی اکثریت مطلق و هم با آستانه‌ی ثابت ۲ برای تمامی رئوس، مساله‌ای NP-سخت است. در ادامه برای گراف‌های جهتدار بدون یال چندگانه کران بالای نصف تعداد رئوس

[1] Alliance Offensive

[2] Selection Set Target

[3] Set Conversion

[4] Message of Spread

گراف را ثابت کرده‌ایم که کران‌های موجود در مقالات [۱۰] [۱۱] [۱۲] [۱] به نحو چشمگیری بهبود می‌دهد.

فصل چهارم رساله را به بررسی مونوپولی‌ها با آستانه‌گذاری‌های احتمالاتی اختصاص داده‌ایم که در آن رئوس، آستانه‌های مشخص از پیش تعیین شده ندارند و انتخاب آستانه برای هر راس به روش احتمالاتی انجام می‌گردد. تا کنون مطالعه‌ی چندانی در زمینه‌ی مونوپولی‌ها با آستانه‌های احتمالاتی صورت نگرفته است و تنها در مقاله‌ی [۴۳] نوع خاصی از آن تحت عنوان جوامع همگن توسط ذاکر معرفی شده و بخشی از مقاله به آن اختصاص داده شده است. در این فصل که نتایج آن را از مقاله‌ی [۳۹] بیان می‌کنیم، ابتدا تعریف دقیقی از مونوپولی‌ها با آستانه‌های احتمالاتی در حالت کلی ارائه می‌کنیم. سپس ثابت می‌کنیم که به ازای هر گراف بزرگ با هر نوع آستانه‌گذاری احتمالاتی می‌توان با احتمال بالا حکم کرد که کوچکترین مونوپولی پویا اندازه‌ای نزدیک به امید ریاضی‌اش دارد. با استفاده از مطلب اخیر کران بالایی برای اندازه‌ی کوچکترین مونوپولی با آستانه‌های احتمالاتی بیان می‌کنیم و با مثالی نشان می‌دهیم این کران بهترین کران ممکن می‌باشد. بقیه‌ی فصل را به یافتن کران پایین برای مونوپولی‌های با آستانه‌های احتمالاتی اختصاص داده‌ایم. در قضیه‌ی ۵.۳.۴ تحت شرایطی کرانی به شکل

$$\mathrm{dyn}_{X_n}(G_n) \geq n\Big(۱ - \frac{\epsilon(G_n)}{\overline{\alpha}_n}\Big)\frac{۱-\delta}{f(n)}$$

را اثبات می‌کنیم و به مساله‌ی باز مطرح شده در مقاله‌ی [۴۳] توسط ذاکر به طور کامل جواب می‌دهیم. در ادامه یک کران پایین دیگر نیز ارائه داده و این فصل را با ذکر این مطلب که مطالبش قابل تعمیم به گراف‌های جهتدار نیز هستند به پایان می‌بریم.

در فصل پنجم که آخرین فصل رساله است، ابتدا ثابت می‌کنیم که مساله‌ی پوشش راسی جزئی که یافتن اندازه‌ی کوچکترین زیرمجموعه از رئوس که نسبت ثابتی از یال‌ها را پوشش می‌دهد، مساله‌ای NP-سخت است. که در تکمیل نتایج سه مقاله‌ی [۴] [۹] [۲۶] است. در ادامه سراغ مونوپولی‌های با آستانه‌ی متوسط داده شده می‌رویم و ارتباطی تنگاتنگ که بین این موضوع با پوشش راسی جزئی

وجود دارد را با اثبات دو تساوی به صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$\mathrm{Smon}_t(G) = P\beta_{nt/۲}(G)$$

$$\mathrm{Sdyn}_t(G) = P\beta_{nt-m}(G)$$

در نهایت NP -سخت بودن اندازه‌ی کوچکترین مونوپولی‌های ایستا و پویا با آستانه‌ی متوسط داده شده را برای گراف‌های دوبخشی، مسطح و نیز گراف‌های وتری نشان می‌دهیم.

فصل اول

مطالب مقدماتی

در این فصل به طور خلاصه مفاهیم مقدماتی مورد نیاز در سایر فصل‌های رساله را بیان می‌کنیم که شامل چهار بخش مقدماتی در نظریه‌ی گراف، نظریه‌ی احتمال، پیچیدگی محاسباتی و در نهایت نظریه‌ی مونوپولی‌های ایستا و پویا می‌باشد.

۱.۱ مقدماتی از نظریه‌ی گراف

در این بخش تعریف‌های مقدماتی نظریه گراف را بیان می‌کنیم. برای مطالعه‌ی بیشتر در این زمینه می‌توانید به کتاب *مقدمه‌ای بر نظریه گراف* [۴۲] نوشته داگلاس وست [۱] مراجعه کنید. گراف‌های غیرجهتدار (جهتدار) را با $G = (V, E)$ نشان می‌دهیم که در آن V یک مجموعه‌ی دلخواه و ناتهی است و E مجموعه‌ای از زوج‌های بدون ترتیب (مرتب) از عناصر V است. اعضای V را **راس** و عناصر E را **یال** می‌نامیم.

[۱] Douglas West

به دو راس در یک گراف، **مجاور** گفته می‌شود هرگاه آن دو راس توسط یک یال به هم متصل باشند. اگر راسی چون x به راسی چون y توسط یالی در گراف G متصل باشد گوییم x، **همسایه‌ی** y و y همسایه‌ی x است. مجموعه‌ی همسایه‌های راس x در گراف G را با $N_G(x)$ یا به اختصار با $N(x)$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین، تعریف می‌کنیم $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. اگر مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ای از راس‌های گراف G باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی همسایه‌های تمام راس‌های موجود در مجموعه‌ی A را با نماد $N_G(A)$ نشان می‌دهند.

به تعداد یال‌هایی که راس v بر آن‌ها واقع است، درجه‌ی راس v می‌گویند و با $\deg(v)$ نشان می‌دهند. مینیمم و ماکزیمم درجه در گراف G به ترتیب با نمادهای $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نشان داده می‌شوند. اگر درجه‌ی راسی زوج باشد، آن را یک **راس زوج** و اگر فرد باشد، آن را یک **راس فرد** می‌گویند. راسی با درجه‌ی صفر را راس **ایزوله** (یا تنها) و راسی با درجه‌ی یک را **برگ** می‌نامند. یک گراف را **زوج** گوییم هرگاه درجه‌ی تمام راس‌های آن زوج باشد. گرافی چون G را d **-منتظم** نامیم هرگاه درجه‌ی همه‌ی راس‌های آن برابر d باشد. گرافی چون H را **زیرگرافِ** گراف G گوییم و با نماد $H \subseteq G$ نشان می‌دهیم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. اگر V' زیر مجموعه‌ای ناتهی از V باشد، زیرگرافی از G که مجموعه‌ی راس‌های آن، V' و مجموعه‌ی یال‌های آن برابر یال‌هایی از G باشد به طوری که هر دو سر آن یال‌ها در V' است، با نماد $G[V']$ نشان داده می‌شود و **زیرگراف القایی** G خوانده می‌شود. اگر H زیرگراف القایی از گراف G باشد آن را به صورت $H \trianglelefteq G$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۱.۱. یک k**-رنگ آمیزی** از یک گراف G، یک برچسب‌گذاری $f : V(G) \to S$ است به طوری که $|S| = k$ (معمولاً مجموعه‌ی S را به شکل $S = [k]$ در نظر می‌گیرند). برچسب‌های استفاده شده **رنگ** هستند و تمام راس‌هایی که دارای رنگ یکسان هستند، یک **کلاس رنگی** را معرفی می‌کنند. یک k-رنگ آمیزی از گراف دلخواه G **مجاز** خوانده می‌شود، هرگاه راس‌هایی که با یکدیگر مجاور هستند، رنگ‌های متفاوت داشته باشند. به کمترین تعداد رنگ لازم برای رنگ‌آمیزی مجاز گراف G عدد رنگی G می‌گویند و آن را با نماد $\chi(G)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۱. در گراف‌های غیرجهتدار **مسیر**، عبارت است از دنباله‌ای از اعضای متمایز مانند $v_0e_1v_1\dots e_nv_n$ که به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، راس v_i توسط یال e_i همسایه‌ی راس v_{i-1} می‌باشد. تعداد یال‌های موجود در یک مسیر را طول مسیر گویند و معمولا یک مسیر به طول n را با نماد P_n نشان می‌دهند. اگر در دنباله‌ی فوق راس v_0 همان راس v_n باشد ولی بقیه‌ی اعضای آن متمایز باشند، در اینصورت به آن **دور** به طول n گویند و آن را با نماد C_n نشان می‌دهند. اگر طول یک دور زوج باشد، آن را **دور زوج** و اگر فرد باشد، آن را **دور فرد** می‌نامیم. **کمر** یک گراف عبارت از طول کوتاهترین دور در آن گراف است. درصورت وجود عدم وجود دور در گراف، کمر آن نامتناهی تعریف می‌شود. در گرافهای جهتدار نیز مسیرها و دورهای جهتدار به صورت مشابه تعریف می‌شوند، با این تفاوت که در دنباله‌ی $v_0e_1v_1\dots e_nv_n$ به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، یال e_i یالی جهتدار از v_{i-1} به v_i می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱. یک گراف را **همبند** گوییم هرگاه بین هر دو راس آن یک مسیر موجود باشد. هر زیرگرافِ همبندِ ماکسیمال گراف G را یک **مولفه‌ی همبندی** گراف G گویند. تعداد مولفه‌های همبندی گراف G را با $c(G)$ نشان می‌دهند. گراف جهتدار را همبند گوییم هر گاه گراف زمینه‌ی آن، که از حذف جهت یال‌ها به دست می‌آید، همبند باشد اما در صورتی که به ازای هر دو راس u و v مسیری جهتدار هم از u به v و هم از v به u موجود باشد، گراف را قویاً همبند گویند. به هر زیرگراف ماکسیمال قویاً همبند نیز یک مولفه‌ی همبندی قوی می‌گویند. ذکر این نکته ضروری است که یافتن مولفه‌های همبندی قوی در گراف‌های جهتدار دارای الگوریتمی با زمان اجرای چندجمله‌ای است.

گرافی که هر دو راس آن توسط یک یال به هم متصل باشد، **گراف کامل** نامیده می‌شود و اگر از مرتبه‌ی n باشد، آن را با K_n نشان می‌دهند.

گراف G را **دوبخشی** گوییم هرگاه بتوان مجموعه‌ی راس‌های آن را به دو مجموعه‌ی X و Y افراز نمود به طوری که هر یک از این دو مجموعه در G مستقل باشند. چنین گرافی به‌صورت (X, Y) نمایش داده می‌شود. به گراف دوبخشی روی مجموعه‌ی رئوس X و Y گراف **دوبخشی کامل** گفته می‌شود هرگاه هر راس از X به تمام راس‌های Y متصل باشد و با نماد $K_{m,n}$ نمایش داده می‌شود که در آن

$\left|X\right| = m$ و $\left|Y\right| = n$. اگر $m = 1$ آن‌گاه این گراف، **ستاره** نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. یک **تطابق** در گراف، مجموعه‌ای از یال‌های مستقل است. یعنی مجموعه‌ای از یال‌ها که هیچ دو تا از آن‌ها در یک راس مشترک نباشند. راس‌های دو سر یال‌های یک تطابق را **راس‌های آلوده** توسط آن تطابق می‌گویند. اگر یک تطابق، تمام راس‌های گراف را آلوده کند، گوییم آن تطابق یک **تطابق کامل** است. اگر M یک تطابق در گراف باشد به طوری که برای هر تطابق دیگر M' داشته باشیم

$$\left|M'\right| < \left|M\right|$$

آن‌گاه تطابق M را یک **تطابق ماکزیمم** می‌گویند. مشابه یالی یک مجموعه‌ی مستقل، مجموعه‌ای از یال‌هاست که هیچ دو تای آن‌ها مجاور نباشند که همان تطابق است. تعداد یال‌ها در یک تطابق ماکزیمم از G را با $\alpha'(G)$ نمایش می‌دهیم و آن را **عدد استقلال یالی** G می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. یک **پوشش راسی** از گراف G، زیرمجموعه‌ای مانند K از V است به طوری که حداقل یک سر هر یال G در K باشد. تعداد راس‌های یک پوشش راسی از کمترین اندازه را **عدد پوششی** G نامیده و با $\beta(G)$ نمایش می‌دهند. منظور از یک $\beta(G)$-مجموعه، زیرمجموعه‌ی C از راس‌ها است که در آن C یک پوشش راسی مینیمم از گراف است.

تعریف ۶.۱.۱. گراف ساده‌ی بدون دور، **جنگل** و گراف ساده‌ی همبند و بدون دور، **درخت** نامیده می‌شود.

۲.۱ مقدماتی از نظریه احتمال

آزمایش تصادفی به آزمایشی گفته می‌شود که نتیجه آن قبل از انجام آزمایش مشخص نیست و بتوان آن آزمایش را در شرایط یکسان و به دفعات دلخواه انجام داد. به هر نتیجه‌ی ممکن آزمایش تصادفی یک **برآمد** و به مجموعه‌ی تمام برآمدهای ممکن، **فضای نمونه** می‌گویند که آن را با Ω نشان می‌دهیم. به هر

زیرمجموعه از فضای نمونه **پیشامد تصادفی** می‌گویند. از نظر شهودی **احتمال** پیشامد E که آن را با $P(E)$ نشان می‌دهیم، اندازه‌ای عددی است که میزان انتظار ما برای وقوع آن پیشامد را نشان می دهد. به صورت اصولی‌تر، هر پیشامد E با احتمال $P(E)$ اتفاق می‌افتد به طوری که

آ. $1 \geq P(E) \geq 0$،

ب. $P(\Omega) = 1$،

پ. هر دنباله‌ی شمارا از پیشامدهای دوبدو مجزای $E_1, E_2, \ldots$ در شرط $P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$ صدق کند.

متغیر تصادفی تابعی است از فضای نمونه به مجموعه‌ی اعداد حقیقی $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (متغیرهای تصادفی معمولاً با اعداد حقیقی مقداردهی می‌شوند؛ ولی می‌توان انواع دلخواهی مانند مقدارهای بولی، اعداد مختلط، بردارها، ماتریس‌ها، دنباله‌ها، درخت‌ها، مجموعه‌ها، توابع و فرآیندها را درنظر گرفت). متغیرهای تصادفی در دو نوع گسسته و پیوسته هستند. متغیر تصادفی X را **گسسته** گوییم هرگاه مجموعه‌ی مقادیرش متناهی یا شمارا باشد و آن را **پیوسته** گوییم هرگاه مجموعه‌ی مقادیرش ناشمارا باشد. ابتدا به بررسی متغیرهای تصادفی گسسته می‌پردازیم که اکثر متغیرهای تصادفی مورد استفاده در این رساله از نوع گسسته خواهند بود. به تابعی که بتوان با استفاده از آن احتمال هر یک از مقادیر ممکن متغیر تصادفی را مشخص کرد **تابع جرم احتمال** یا **توزیع احتمال** گویند. فرض کنید X متغیر تصادفی باشد که مقادیر $x_1, \ldots, x_n$ را می‌گیرد. در اینصورت **امید ریاضی** یا **مقدار متوسط** متغیر تصادفی X به صورت $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$ تعریف می‌شود. از طرفی **واریانس** X نیز به صورت $Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ تعریف می‌گردد و معمولاً با نماد σ^2 نشان می‌دهند.

ساده‌ترین نوع توزیع احتمال گسسته، **توزیع برنولی** است. گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع برنولی است، هرگاه $P(X = 1) = p$ و $P(X = 0) = 1 - p$. در حقیقت متغیر تصادفی برنولی نشان دهنده‌ی موفقیت با احتمال p و شکست با احتمال $1 - p$ می‌باشد. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای

تصادفی با توزیع یکسان، همگی برنولی با احتمال موفقیت p، باشند. در اینصورت مجموع این متغیرها دارای **توزیع دوجمله‌ای** خواهد بود. به عبارتی

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p).$$

گوییم متغیر تصادفی X دارای **توزیع پواسون** با پارامتر λ، $\lambda > 0$، می‌باشد، اگر به ازای $k = 0, 1, 2, \ldots$ تابع جرم احتمال آن به شکل

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

باشد. نکته‌ی مهم راجع به توزیع پواسون در این است که توزیع دوجمله‌ای وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند و حاصل‌ضرب np ثابت باقی می‌ماند، به توزیع پواسون میل می‌کند. بنابراین توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = np$ را می‌توان به عنوان تقریب توزیع دوجمله‌ای $B(n,p)$ در نظر گرفت.

فرض کنید $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی پیوسته باشد. در اینصورت تابع نامنفی f را تابع **چگالی احتمال** X گوییم، هرگاه به ازای هر زیرمجموعه‌ی B از اعداد حقیقی داشته باشیم

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx.$$

گوییم متغیر تصادفی X به طور **نرمال** با پارامترهای μ و σ^2 توزیع شده است، اگر تابع چگالی X به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

در صورتی که متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد، آن را با نماد $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ نشان می‌دهیم. به توزیع $N(0,1)$ **توزیع نرمال استاندارد** نیز می‌گویند. قضیه‌ی زیر که به **قضیه‌ی حد مرکزی** مشهور است، یکی از برجسته‌ترین نتایج نظریه‌ی احتمال است که اهمیت توزیع نرمال استاندارد را نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۲.۱. ([۲۴]) فرض کنید $Y_1, Y_2, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با توزیع یکسان و مقدار میانگین متناهی μ و واریانس متناهی غیر صفر σ^2 باشند و همچنین $S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$. در