بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

عنوان

اعداد احاطه‌ای مهار شده تام در گراف‌ها

استاد راهنما

دکتر سید محمود شیخ الاسلامی

پژوهشگر

محمد علی سلیمانی دلارستاقی

مرداد ۱۳۸۸

تبریز– ایران

تقدیم به

همسرم به سبب مهربانی و صبوری‌هایش

و

دختر گلم ملیکا جان

قدردانی

اکنون که به شکرانه الهی و در سایه ایزد منان، این پایان نامه به اتمام رسیده است، بر خود وظیفه می‌دانم تا از تمامی عزیزانی که مرا در انجام این امر یاری نموده‌اند، کمال تشکر و قدردانی بنمایم. امید است که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.

از استاد محترم جناب آقای دکتر سید محمود شیخ‌الاسلامی که به عنوان استاد راهنما بسیار بیشتر از آن‌چه می‌باید به بنده لطف داشته‌اند و گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری و سخاوت در اختیار اینجانب قرار دادند و در مقابل خطاهای بسیار و سؤالات وقت و بی‌وقت در کمال صمیمیت، حوصله و سخاوت پاسخ‌گو و راهنما بوده‌اند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم و به خاطر آموخته‌های بسیار و هدایت آگاهانه در مسیر تحقق و پژوهش، سپاسگزار زحماتشان هستم.

در نهایت، قدردانی خود را از سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیل افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام و خانواده عزیزم، به خصوص همسر و دختر گلم که یاور و مشوق همیشگی من در زندگی و به ویژه در دوران تحصیلاتم بوده‌اند، ابراز می‌دارم.

محمدعلی سلیمانی دلارستاقی

چکیده

فرض کنید G یک گراف با مجموعه رأس‌های V و مجموعه یال‌های E باشد. مجموعه احاطه‌گر S را یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده می‌نامند هرگاه هر رأس از $V-S$ با رأسی از $V-S$ مجاور باشد. مینیمم تعداد اعضای یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده گراف G را عدد احاطه‌ای مهار شده نامیده و با $\gamma_r(G)$ نمایش می‌دهند. مجموعه احاطه‌گر تام S را یک مجموعه احاطه‌گر تام مهار شده نامند هرگاه هر رأس از $V-S$ با رأسی از $V-S$ مجاور باشد. مینیمم تعداد اعضای یک مجموعه احاطه‌گر تام مهار شده گراف G را عدد احاطه‌ای تام مهار شده نامیده و با $\gamma_{tr}(G)$ نمایش می‌دهند. در این رساله، عددهای احاطه‌ای مهار شده و احاطه‌ای تام مهار شده در گراف‌ها و رابطه آنها را با اعداد احاطه‌ای و احاطه‌ای تام مطالعه می‌کنیم. همچنین کران‌هایی را برای مجموع عددهای احاطه‌ای مهار شده یک گراف و مکمل آن ارایه می‌دهیم. **واژه‌های کلیدی:** مجموعه احاطه‌گر، عدد احاطه‌ای، مجموعه احاطه‌گر تام، عدد احاطه‌ای تام، عدد احاطه‌ای مهار شده و عدد عدد احاطه‌ای تام مهار شده.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

یکی از مفاهیم نظریه گراف که در سال‌های اخیر پیشرفت قابل توجهی نموده است، مفهوم احاطه‌گری در گراف‌هاست. این مفهوم اساسی به مجموعه‌های احاطه‌گر و عدد احاطه‌ای در گراف‌ها مربوط می‌شود که برای نخستین بار در سال ۱۸۶۲ توسط دجکنیش[۱] روی صفحه شطرنج مورد استفاده قرار گرفت. اما بعدها به عنوان یک بحث نظری در نظریه گرافها بررسی و مطالعه گردید و تا کنون مقالات متعددی در این زمینه به چاپ رسیده است. فرض کنید G یک گراف با مجموعه رأس‌های V و مجموعه یال‌های E باشد. زیرمجموعه S از رأس‌های G، یک مجموعه احاطه‌گر برای G نامیده می‌شود هرگاه هر رأس $v \in V - S$ با حداقل یک رأس از S مجاور باشد. کوچک‌ترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر G را عدد احاطه‌ای G نامیده و با $\gamma(G)$ نشان می‌دهند. مجموعه احاطه‌گر S در G را یک مجموعه احاطه‌گر تام نامند هرگاه $G[S]$ دارای هیچ رأس منفردی نباشد. کوچک‌ترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر تام G را عدد احاطه‌ای تام G نامیده و با $\gamma_t(G)$ نشان می‌دهند. نوع دیگری از مفاهیم احاطه‌گری به احاطه‌گری مهار شده مربوط می‌شود. مجموعه احاطه‌گر S در گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده نامند هرگاه هر رأس در $V - S$ با حداقل یک رأس از $V - S$ مجاور باشد. مینیمم تعداد اعضای مجموعه احاطه‌گر مهار شده گراف G را عدد احاطه‌ای مهار شده G نامیده و با $\gamma_r(G)$ نمایش می‌دهند. یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده از اندازه‌ی $\gamma_r(G)$ را یک γ_r- مجموعه در G می‌نامند. مجموعه احاطه‌گر تام S در گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر تام مهار شده نامند هرگاه هر رأس در $V - S$ با

---

[۱] De Jacnish

حداقل یک رأس از $V-S$ مجاور باشد. مینیمم تعداد اعضای مجموعه احاطه‌گر تام مهار شده گراف G را عدد احاطه‌ای تام مهار شده G نامیده و با $\gamma_{tr}(G)$ نمایش می‌دهند. یک مجموعه احاطه‌گر تام مهار شده از اندازه‌ی $\gamma_{tr}(G)$ را یک $\gamma_{tr}-$ مجموعه در G می‌نامند. مجموعه‌های احاطه‌گر مهار شده نخستین بار در سال ۱۹۹۹ توسط دومک [۲] و همکارانش معرفی گردید. او در طی دو مقاله که در سال‌های ۱۹۹۹ و ۲۰۰۰ منتشر گردیدند، مجموعه‌های احاطه‌گر مهار شده و احاطه‌گر تام مهار شده را معرفی نمود و اعداد احاطه‌ای مهار شده و احاطه‌ای تام مهار شده را برای برخی از گراف‌ها و به ویژه درخت‌ها بررسی نمود. در سال ۲۰۰۷، هتینگ [۳] و سایر همکارانش رابطه بین اعداد احاطه‌ای مهار شده (و اعداد احاطه‌ای تام مهار شده) در یک گراف و مکمل آن را مورد مطالعه قرار دادند. در فصل اول این رساله، پس از ارایه تعاریف اولیه، مفهوم احاطه‌گری و احاطه‌گری مهار شده در گراف‌ها را بیان می‌کنیم. در فصل دوم، عدد احاطه‌ای مهار شده در گراف‌ها را مطالعه‌کرده و کران‌هایی را برای مجموع عددهای احاطه‌ای مهار شده یک گراف و مکمل آن ارایه نموده و گراف‌هایی که این کران‌ها برای آنها قابل وصول هستند، را مشخص می‌کنیم. در فصل سوم یک کران پایین برای عدد احاطه‌ای مهار شده در درخت‌ها ارایه نموده و درخت‌هایی را که برای آنها این کران قابل وصول است را به صورت ساختاری دسته‌بندی می‌کنیم. فصل چهارم را به عدد احاطه‌ای تام مهار شده در درخت‌ها اختصاص داده‌ایم. در فصل پنجم مفهوم افرازهای دوماتیک مهار شده و دوماتیک تام مهار شده را تعریف نموده و رابطه پارامترهای مربوطه را با پارامترهای مشابه در افرازهای دوماتیک و دوماتیک تام مطالعه می‌کنیم.

---

[۲] Domke

[۳] Hattingh

فصل ۱

مقدمه

در این فصل، ابتدا برخی تعاریف مقدماتی نظریه گراف و سپس مفهوم احاطه‌گری و سایر مفاهیم مرتبط با آن را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، مطرح می‌کنیم. برای آشنایی بیشتر با تعاریف و نمادهای اولیه در نظریه گراف که در این جا تعریف نشده‌اند، خواننده را به [۷] و [۱۶] ارجاع می‌دهیم.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

در این رساله، منظور از گراف G، گرافی متناهی بدون جهت و ساده با مجموعه رأس‌های V و مجموعه یال‌های E است. تعداد رأس‌های گراف G را مرتبه‌ی آن نامیده و با $n(G)$ نمایش می‌دهیم. **همسایگی باز** رأس v از G، $N_G(v)$ ، مجموعه تمام رأس‌هایی از G است که با v مجاوراند. به عبارت دیگر،

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}.$$

همسایگی بسته رأس v عبارت است از $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. اگر $S \subseteq V(G)$، همسایگی باز و همسایگی بسته S به ترتیب عبارت اند از $N_G(S) = \bigcup_{v\in S} N_G(v)$ و $N_G[S] = N_G(S) \cup S$.

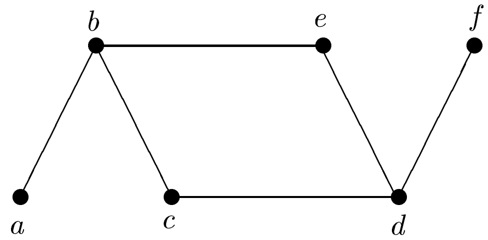
درجه رأس v در گراف G، $\deg_G(v)$، برابر است با $|N_G(v)|$. رأس از درجه صفر را رأس منفرد، رأس از درجه ۱ را برگ، رأس مجاور با حداقل یک برگ را رأس اتکا و رأس اتکای مجاور با بیش از یک برگ را رأس اتکای قوی می‌نامند. در متن حاضر، مجموعه برگ‌ها، رأس‌های اتکا، تعداد برگ‌ها و تعداد رأس‌های اتکای گراف G را به ترتیب با $\Omega(G)$، $S(G)$، $n_1(G)$ و $n_s(G)$ نمایش می‌دهیم.
فرض کنید T یک درخت و u و v دو رأس مجاور در T باشند. در این صورت مؤلفه‌ای از $T - uv$ که شامل u (یا به ترتیب شامل v) است را با $T(u, uv)$ (یا به ترتیب با $T(v, uv)$) نشان می‌دهیم. فرض کنید $V' \subset V(G)$. زیرگراف القایی V'، $G[V']$، زیرگرافی از G است که مجموعه رأس‌های آن V' و مجموعه یال‌های آن، تمام یال‌هایی از G است که دو انتهای آنها در V' هستند. یک مسیر از مرتبه‌ی n را با P_n و یک دور از مرتبه‌ی n را C_n نشان می‌دهیم. زیرتقسیم یال $xy \in E(G)$، عبارت است از حذف این یال و افزودن رأس جدید z همراه با دو یال جدید xz و zy (z را رأس زیرتقسیم می‌نامند).
گراف دوبخشی کامل $K_{1,p}$ را ستاره نامیده و گرافی را که از زیرتقسیم حداکثر $p - 1$ یال ستاره $K_{1,p}$ حاصل می‌شود، یک عنکبوت زخمی نامند.

۲.۱ مجموعه‌های احاطه‌گر

در این بخش، مفهوم احاطه‌گری و چند پارامتر مرتبط با آن را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، معرفی می‌کنیم.
زیر مجموعه S از رأس‌های G را یک مجموعه **احاطه‌گر** نامند هرگاه هر رأس $V(G) - S$ با حداقل یک رأس از S مجاور باشد و یا $N[S] = V(G)$. مجموعه احاطه گر S در G را مینیمم نامند هرگاه هیچ مجموعه احاطه‌گر از اندازه کمتر از $|S|$ موجود نباشد. مینیمم اندازه‌ی یک مجموعه احاطه‌گر در گراف G را **عدد احاطه‌ای** نامیده و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهند. یک مجموعه احاطه‌گر از اندازه‌ی $\gamma(G)$ را یک $\gamma-$ **مجموعه** در G می‌نامند.

مثال ۱.۲.۱ در شکل ۱.۱، مجموعه‌های $S_1 = \{b, d\}$، $S_2 = \{b, d, e\}$ و $S_3 = \{a, b, c, d\}$ مجموعه‌های احاطه‌گر در گراف G می‌باشند. لذا $\gamma(G) \leq 2$. همچنین واضح است که هیچ رأسی تمام

رأس‌های گراف را احاطه نمی‌کند. بنابراین S_1 یک $\gamma-$ مجموعه در G بوده و در نتیجه $\gamma(G) = 2$.



شکل ۱.۱: گراف G با $\gamma(G) = 2$

نوع دیگری از مجموعه‌های احاطه‌گر، مجموعه احاطه‌گر تام است. مجموعه احاطه‌گر S را یک مجموعه **احاطه‌گر تام** نامند هرگاه زیرگراف القایی $G[S]$ رأس منفرد نداشته باشد. مینیمم تعداد اعضای یک مجموعه احاطه‌گر تام G را **عدد احاطه‌ای تام** نامیده و با $\gamma_{\mathbf{t}}(\mathbf{G})$ نمایش می‌دهند. یک مجموعه احاطه‌گر تام از اندازه‌ی $\gamma_t(G)$ را یک **γ_t- مجموعه** در G می‌نامند.
به وضوح، هر گراف بدون رأس منفرد دارای مجموعه احاطه‌گر تام است. همچنین هر رأس اتکا مشمول در هر مجموعه احاطه‌گر تام می‌باشد.

مثال ۲.۲.۱ در گراف شکل ۱.۱، مجموعه‌های $S_1 = \{b, d, e\}$ و $S_2 = \{a, b, c, d\}$ احاطه‌گر تام هستند. بنابراین $\gamma_t(G) \leq 3$. اما چون هیچ دو رأس مجاور همه رأس‌های G را احاطه نمی‌کنند، لذا S_1 یک γ_t- مجموعه در G است و در نتیجه $\gamma_t(G) = 3$.

نوع دیگری از مجموعه‌های احاطه‌گر که موضوع اصلی این پایان نامه است، مجموعه‌های احاطه‌گر مهار شده هستند. مجموعه احاطه‌گر S در گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده نامند هرگاه هر رأس در $V - S$ با حداقل یک رأس از $V - S$ مجاور باشد. مینیمم تعداد اعضای یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده گراف G را **عدد احاطه‌ای مهار شده** نامیده و با $\gamma_{\mathbf{r}}(\mathbf{G})$ نمایش می‌دهند. یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده از اندازه‌ی $\gamma_r(G)$ را یک **γ_r- مجموعه** در G می‌نامند.

مثال ۳.۲.۱ در شکل ۱.۱، مجموعه‌های $S_1 = \{a, c, f\}$، $S_2 = \{a, b, f\}$، $S_3 = \{a, e, f\}$ و $S_4 = \{a, d, f\}$ مجموعه‌های احاطه‌گر مهار شده در گراف G می‌باشند. لذا $\gamma_r(G) \leq 3$. همچنین واضح است که هیچ مجموعه دو عضوی نمی‌تواند یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده در G باشد. بنابراین $\gamma_r(G) = 3$.

یکی از کاربردهای مفهوم احاطه‌گری مهار شده به زندانی و زندان‌بان مربوط می‌شود. در این مثال هر رأس که مشمول در یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده نیست، همان موقعیت زندانی و هر رأس که مشمول در یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده باشد، همان موقعیت زندان‌بان را دارد. موقعیت هر زندانی چنان است که مورد دید یک زندان‌بان و مورد دید یک زندانی دیگر قرار دارد. یک سیستم زندان و زندان‌بان بهینه و مطلوب، سیستمی است که در آن تعداد زندان‌بان‌ها کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.
مجموعه احاطه‌گر تام S در گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر تام مهار شده نامند هرگاه هر رأس در $V - S$ با حداقل یک رأس از $V - S$ مجاور باشد. مینیمم تعداد اعضای مجموعه احاطه‌گر تام مهار شده گراف G را **عدد احاطه‌ای تام مهار شده** نامیده و با $\gamma_{\mathbf{tr}}(\mathbf{G})$ نمایش می‌دهند. یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده از اندازه‌ی $\gamma_{tr}(G)$ را یک $\gamma_{tr}-$ **مجموعه** در G می‌نامند. به وضوح، هر گراف بدون رأس منفرد دارای مجموعه احاطه‌گر تام مهار شده است. همچنین هر رأس از درجه ۱ و رأس اتکا مشمول در هر مجموعه احاطه‌گر تام مهار شده می‌باشد.

مثال ۴.۲.۱ در گراف شکل ۱.۱، مجموعه $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ احاطه‌گر تام مهار شده است. زیرا رأس‌های a، b، d و f مشمول در هر مجموعه احاطه‌گر تام مهار شده هستند. چون e و c مجاور نیستند، لذا باید مشمول در هر مجموعه احاطه‌گر تام مهار شده باشند. بنابراین $\gamma_{tr}(G) = 6$.

فرض کنید λ و μ دو پارامتر در گراف G باشند. در این صورت G را $(\lambda, \mu)-$ گراف نامند هرگاه $\lambda(G) = \mu(G)$. به ویژه، گراف G را $(\gamma_t, \gamma_{tr})-$ گراف نامند هرگاه $\gamma_t(G) = \gamma_{tr}(G)$. در این پایان‌نامه، $(\gamma_t, \gamma_{tr})-$ درخت‌ها را مطالعه می‌کنیم.
فرض کنید $\mathcal{D}$ یک افراز از رأس‌های گراف G باشد. اگر تمام بلوک‌های این افراز مجموعه‌های احاطه‌گر در G باشند، آن‌گاه $\mathcal{D}$ را یک افراز دوماتیک از G نامند. ماکسیمم تعداد بلوک‌های یک افراز دوماتیک

در G را عدد دوماتیک آن نامیده و با $d(G)$ نشان می‌دهند. مفهوم افراز دوماتیک، نخستین بار در سال ۱۹۷۷ توسط کوکین [1] و همکارانش معرفی گردید [۲]. به همین ترتیب، می‌توان افرازهای دوماتیک تام [۱]، دوماتیک مهار شده و دوماتیک تام مهار شده [۱۱] در گراف را تعریف نمود. عددهای دوماتیک تام، مهار شده و تام مهار شده در گراف G را به ترتیب با $d_t(G)$، $d_r(G)$ و $d_{tr}(G)$ نشان می‌دهند.

---

[1] Cocayne

فصل ۲

عدد احاطه‌ای مهار شده در گراف‌ها

در این فصل، کران‌هایی را برای عدد احاطه‌ای مهار شده در گراف‌ها ارایه کرده و قابل وصول بودن این کران‌ها را بررسی می‌کنیم. علاوه بر این، کران‌هایی را برای مجموع عددهای احاطه‌ای مهار شده یک گراف و مکمل آن ارایه نموده و گراف‌هایی که این کران‌ها برای آنها قابل وصول هستند، را مشخص می‌کنیم.

۱.۲ کران‌هایی برای عدد احاطه‌ای مهار شده در گراف‌ها

برهان گزاره‌های زیر سر راست است و از نوشتن آنها صرفنظر می‌کنیم.

گزاره ۱.۱.۲ اگر $n \neq ۲$ یک عدد صحیح مثبت باشد، آن‌گاه $\gamma_r(K_n) = ۱$.

گزاره ۲.۱.۲ اگر $n \geq ۲$ یک عدد صحیح مثبت باشد، آن‌گاه $\gamma_r(K_{۱,n-۱}) = n$.

گزاره ۳.۱.۲ اگر $n_۱$ و $n_۲$ دو عدد صحیح مثبت باشند به قسمی که $\min\{n_۱, n_۲\} \geq ۲$، آن‌گاه $\gamma_r(K_{n_۱,n_۲}) = ۲$.

گزاره ۴.۱.۲ اگر $t \geq ۳$ یک عدد صحیح مثبت باشد، آن‌گاه

$$\gamma_r(K_{n_۱,n_۲,\ldots,n_t}) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر} \min\{n_۱,n_۲,\ldots,n_t\} = ۱ \\ ۲ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

با توجه به تعریف γ و γ_r، به آسانی می‌توان دید که برای هر گراف G، $\gamma(G) \leq \gamma_r(G)$. فرض کنید $n \geq ۱$ و $k \in \{۱,\ldots,n-۲,n\}$ و G گرافی باشد که از P_{n-k} (مسیری شامل $n-k$ رأس) به وسیله افزودن یک مجموعه از رأس‌های $\{v,v_۱,\ldots,v_{k-۱}\}$ و مجاور کردن v با هر رأس $V(P_{n-k}) \cup \{v_۱,\ldots,v_{k-۱}\}$ حاصل شود. در این صورت G از مرتبه n بوده و $\gamma_r(G) = k$ و $\gamma(G) = ۱$ است. بنابراین گزاره زیر حاصل می‌شود.

گزاره ۵.۱.۲ گرافی مانند G موجود است که در آن $\gamma_r(G) - \gamma(G)$ به اندازه کافی بزرگ است.

گزاره ۶.۱.۲ اگر $n \geq ۱$ یک عدد صحیح مثبت باشد، آن‌گاه $\gamma_r(P_n) = n - ۲\lfloor \frac{n-۱}{۳} \rfloor$.

برهان. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده در P_n با رأس‌های $V(P_n) = \{v_۱,\ldots,v_n\}$ باشد. در این صورت $v_۱, v_n \in S$. علاوه بر این، هر مؤلفه از $V - S$ از مرتبه ۲ است. فرض کنید تعداد چنین مؤلفه‌هایی برابر m باشد. بنابراین $n \geq ۲m + m + ۱$ و لذا $m \leq \lfloor \frac{n-۱}{۳} \rfloor$ و در نتیجه $|S| = n - ۲m \geq n - ۲\lfloor \frac{n-۱}{۳} \rfloor$. از طرف دیگر، $V - \{v_i | ۱ \leq i \leq ۳\lfloor \frac{n-۱}{۳} \rfloor, i \equiv ۲ \text{ یا } ۳ (mod\ ۳)\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده از اندازه $n - ۲\lfloor \frac{n-۱}{۳} \rfloor$ است و این برهان را کامل می‌کند. ■

برهان گزاره زیر مشابه برهان گزاره ۶.۱.۲ است و از بیان آن صرفنظر می‌کنیم.

گزاره ۷.۱.۲ اگر $n \geq ۳$ یک عدد صحیح مثبت باشد، آن‌گاه $\gamma_r(C_n) = n - ۲\lfloor \frac{n}{۳} \rfloor$.

واضح است که در هر گراف G از مرتبه‌ی n، $\gamma_r(G) \leq n$. گزاره زیر نشان می‌دهد که $K_{۱,n-۱}$ تنها گرافی است که این کران برای آن دقیق است.

گزاره ۸.۱.۲ فرض کنید G یک گراف همبند از مرتبه‌ی n باشد. در این صورت $\gamma_r(G) = n$ اگر و تنها اگر G یک ستاره باشد.

فرض کنید $G \neq K_{1,n-1}$ گرافی از مرتبه‌ی n باشد. اگر S یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده برای G باشد به قسمی که $V - S \neq \emptyset$، آن‌گاه بنا بر تعریف لازم می‌آید که $|V - S| \geq 2$ و لذا $\gamma_r(G) \leq n - 2$. قضیه‌های زیر گراف‌هایی را مشخص می‌کنند که عدد احاطه‌ای مهار شده آنها برابر $n - 2$ است.

قضیه ۱.۱.۲ اگر T یک درخت از مرتبه‌ی $n \geq 3$ باشد. آن‌گاه $\gamma_r(T) = n - 2$ اگر و تنها اگر P_6 یا $T \not\cong P_4, P_5$ و یا T از P_4، P_5 یا P_6 با افزودن برگ‌هایی به رأس‌های اتکا حاصل شود.

برهان. به آسانی می‌توان دید که اگر P_6 یا $T \not\cong P_4, P_5$ و یا T از P_4، P_5 یا P_6 با افزودن برگ‌هایی به رأس‌های اتکا حاصل شود، آن‌گاه $\gamma_r(T) = n - 2$.
برعکس، فرض کنید T یک درخت از مرتبه‌ی n بوده و $\gamma_r(T) = n - 2$. اگر $diam(T) \geq 6$، آن‌گاه T دارای یک زیرگراف القایی یکریخت با P_7 مانند $v_1 v_2 \ldots v_7$ است. اما در این صورت $V(T) - \{v_2, v_3, v_5, v_7\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده در T از اندازه $n - 4$ است که یک تناقض است. بنابراین $diam(T) \leq 5$. چون T ستاره نیست و تنها درخت‌های از قطر دو ستاره هستند، لذا $diam(T) \geq 3$. سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱. $diam(T) = 3$. در این صورت T دارای یک زیرگراف القایی یکریخت با P_4 مانند $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4\}]$ است. بنابراین v_2 و v_3 با هیچ رأس دیگر از مسیر P_4 مجاور نیستند و هر رأس دیگر در $V - \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ باید با v_2 یا v_3 مجاور باشد.

حالت ۲. $diam(T) = 4$. در این صورت T دارای یک زیرگراف القایی یکریخت با P_5 مانند $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}]$ است. اگر v_3 با رأس‌هایی از $V - \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ مجاور باشد، آن‌گاه $V(T) - \{v_2, v_3, v_4\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده در T است و لذا $\gamma_r(T) \leq n - 3$ که این یک تناقض است. لذا هر رأس $V - \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ باید با v_2 یا v_4 مجاور باشد. از طرفی

هر رأس در $V - \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ که با v_2 یا v_4 مجاور است، نمی‌تواند با رأس دیگری از $V - \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ مجاور باشد. از این رو، هر رأس در $V - \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ باید فقط با v_2 یا v_4 مجاور باشد.

حالت ۳. $diam(T) = 5$. در این صورت T دارای یک زیرگراف القایی یکریخت با P_6 مانند $T[\{v_1, v_2, \ldots, v_6\}]$ است. واضح است که v_2 و v_5 فقط می‌توانند با برگ‌هایی مجاور باشند. اگر v_3 (یا به ترتیب v_4) با رأس‌هایی از $V(T) - \{v_1, \ldots, v_6\}$ مجاور باشد، آن‌گاه $V(T) - \{v_2, v_3, v_4\}$ (یا به ترتیب، $V(T) - \{v_3, v_4, v_5\}$) یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده در T از اندازه $n - 3$ است که این یک تناقض است. بنابراین هر رأس در $V(T) - \{v_1, \ldots, v_6\}$ با v_2 یا v_5 مجاور است. ■

قضیه ۲.۱.۲ فرض کنید G یک گراف همبند از مرتبه‌ی n بوده و شامل یک دور باشد. در این صورت $\gamma_r(G) = n - 2$ اگر و تنها اگر C_5 یا $G \cong C_3, C_4$ یا G از C_3 به وسیله افزودن برگ‌هایی به حداکثر دو رأس از آن حاصل شود.

برهان. اگر C_5 یا $G \cong C_3, C_4$ یا G از C_3 به وسیله افزودن برگ‌هایی به حداکثر دو رأس از آن حاصل شود، آن‌گاه به آسانی می‌توان دید که $\gamma_r(G) = n - 2$.

برعکس، فرض کنید $\gamma_r(G) = n - 2$. در این صورت G نمی‌تواند شامل دوری از طول حداقل ۶ باشد. زیرا اگر G شامل یک دور از طول حداقل ۶ که شامل رأس‌های متوالی $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$ است، باشد، آن‌گاه $V(G) - \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده در G است که این یک تناقض است. حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱. G شامل دوری از طول ۴ یا ۵ با رأس‌های متوالی $v_1v_2v_3v_4$ روی دور است. اگر یکی از رأس‌ها مانند v_2 با رأسی غیر از v_1 و v_3 مجاور باشد، آن‌گاه $V(G) - \{v_1, v_2, v_3\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده در G است که این یک تناقض است. بنابراین $G \cong C_4$ یا $G \cong C_5$.

حالت ۲. G دارای دوری از طول ۳ مانند $v_1v_2v_3v_1$ است. اگر رأس‌های v_1، v_2 و v_3 هر کدام با رأسی از $V - \{v_1, v_2, v_3\}$ مجاور باشند، آن‌گاه $V(G) - \{v_1, v_2, v_3\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده در G خواهد بود که این یک تناقض است. بدون کاستن از کلیت مسأله، فرض کنید v_1 فقط با v_2 و v_3 باشد. اگر $u_2 \in N(v_2) - \{v_1, v_2, v_3\}$ و u_2 با رأسی مانند $w_2 \in V(G) - \{v_1, v_2, v_3\}$ مجاور باشد، آن‌گاه $V(G) - \{v_1, v_2, u_2\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده در G از اندازه $n - 3$ است که این یک تناقض است. بنابراین درجه هر رأس در $N(v_2) - \{v_1, v_2, v_3\}$ برابر ۱ است. به همین ترتیب، درجه هر رأس در $N(v_3) - \{v_1, v_2, v_3\}$ نیز برابر ۱ خواهد بود و این برهان را کامل می‌کند. ■

نتیجه ۱.۱.۲ فرض کنید G یک گراف از مرتبه‌ی n باشد. در این صورت $\gamma_r(G) = n$ اگر و تنها اگر G به صورت اجتماعی از ستاره‌های متمایز و رأس‌های تنها باشد. علاوه بر این، $\gamma_r(G) = n - 2$ اگر و تنها اگر دقیقاً یکی از مؤلفه‌های G با گراف‌هایی که در قضیه‌های ۱.۱.۲ و ۲.۱.۲ به آنها اشاره شد، یکریخت بوده و هر مؤلفه دیگر G، یک ستاره یا P_1 باشد.

گزاره ۹.۱.۲ در گراف G، $\gamma_r(G) = 1$ اگر و تنها اگر $G \cong K_1 + H$ که در آن H یک گراف بدون رأس منفرد است.

در ادامه این بخش، یک کران پایین برای عدد احاطه‌ای مهار شده در درخت‌ها ارایه می‌دهیم.

قضیه ۳.۱.۲ فرض کنید T یک درخت از مرتبه‌ی $n \geq 3$ باشد. در این صورت $\gamma_r(T) \geq \Delta(T)$. همچنین $\gamma_r(T) = \Delta(T)$ اگر و تنها اگر T یک عنکبوت زخمی باشد که ستاره نیست.

برهان. فرض کنید T یک درخت از مرتبه‌ی $n \geq 3$ باشد. چون T دارای حداقل $\Delta(T)$ برگ است و هر مجموعه احاطه‌گر مهار شده باید شامل تمام برگ‌ها باشد، لذا $\gamma_r(T) \geq \Delta(T)$. واضح است که در هر عنکبوت زخمی T که ستاره نباشد، $\gamma_r(T) = \Delta(T)$. فرض کنید v رأسی از درجه $\Delta(T)$ بوده و S

یک γ_r- مجموعه در T باشد. واضح است که S شامل تمام برگ‌های T بوده و لذا S همان مجموعه برگ‌های T است. چون S یک مجموعه احاطه‌گر مهار شده است، لذا هر رأس مانند $x \in V(T) - S$ با حداقل یک رأس مانند $x' \in V(T) - S - \{x\}$ مجاور است و لذا $|V(T) - S| \geq ۲$. همچنین هر رأس در $V - S - \{v\}$ با v و دقیقاً یک رأس از S مجاور است. بنابراین T یک عنکبوت زخمی است. ■

۲.۲ عددهای احاطه‌ای مهار شده در یک گراف و مکمل آن

نوردهاوس[۱] و گادوم[۲] بهترین کران ممکن را برای مجموع عددهای رنگی یگ گراف و مکمل آن ارایه نموده‌اند [۱۲]. همچنین جیگر [۳] و پیان [۴] [۸] کران‌هایی را برای مجموع عددهای احاطه‌ای یک گراف و مکمل آن ارایه نمودند و نشان دادند که در هر گراف G، از مرتبه‌ی $n \geq ۲$، $۳ \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + ۱$. پس از آن جوزف [۵] و آروموگام [۶] [۹] نشان دادند که اگر G یک درخت از مرتبه‌ی n باشد که G و $\overline{G}$ هیچ کدام دارای رأس منفرد نیستند، آن‌گاه $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq \frac{n+۴}{۲}$. در این بخش، یک کران برای مجموع عددهای احاطه‌ای مهار شده در یک گراف و مکمل آن را ارایه نموده و نشان می‌دهیم این کران، بهترین کران ممکن است.

قضیه ۱.۲.۲ **الف)** فرض کنید G یک درخت از مرتبه‌ی $n \geq ۲$ باشد. در این صورت $\gamma_r(G) + \gamma_r(\overline{G}) \geq ۴$.

ب) فرض کنید G یک گراف از مرتبه‌ی $n \geq ۲$ باشد به طوری که $\overline{G} \ncong P_۳$ و $G \ncong P_۳$. در این صورت $\gamma_r(G) + \gamma_r(\overline{G}) \leq n + ۲$. علاوه بر این، این کران‌ها قابل وصول هستند.

---

[۱] Nordhouse
[۲] Gaddum
[۳] Jegear
[۴] payan
[۵] Joseph
[۶] Arumugam