دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

عملگرهای ترکیبی وزن‌دار کران‌دار مرتب بتوی فضای برگمن

استاد راهنما

حمید واعظی

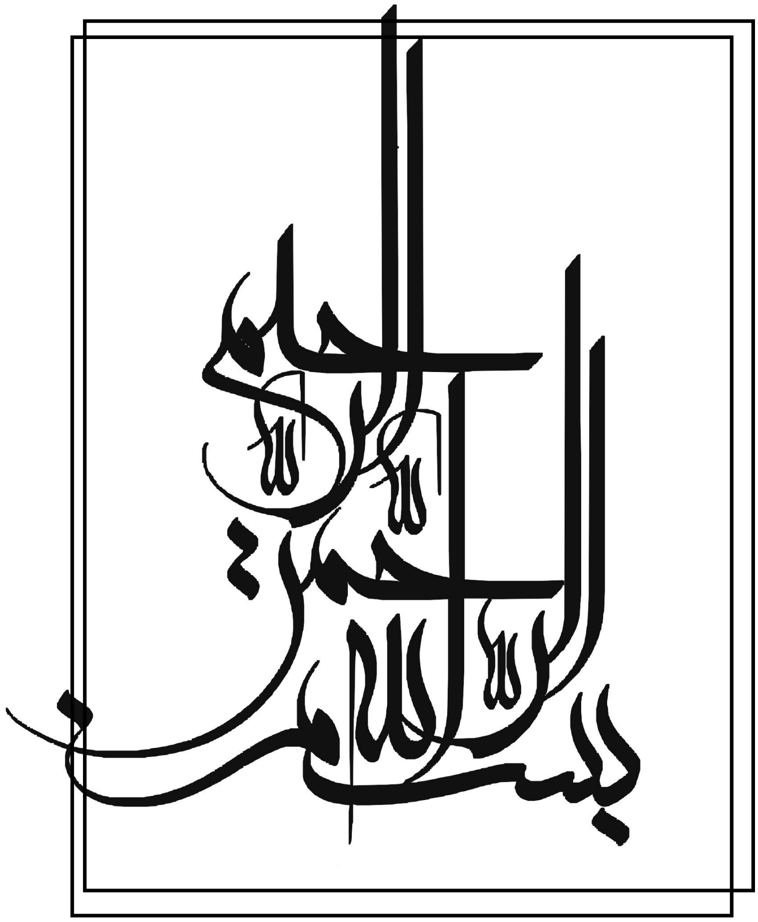
استاد مشاور

حسین امامعلی‌پور

پژوهشگر

سمیه صبوری اصل

۱۳۹۲


بسم الله الرحمن الرحیم

ستایش

ستایش می کنم کسی را که منّتش عظیم است و نعمتش فراوان؛ و رحمتش (بر غضبش) پیشی گرفته است. سخن و حکم او تامیّت یافته (و قطعی است)؛ خواست او نافذ و برهانش رسا و حکمش بر عدالت است.

ستایش می کنم، به سان سپاس آن که معترف به ربوبیّتش و پرخضوع در بندگی اوست. و از گناه خویش (بریده) کنده شده و به توحید او اقرار می نماید. و از وعید و بیم عذابش به خود او پناه می برد. و از درگاه پروردگارش امیدوار آمرزشی است که او را نجات بخشد، در روزی که (انسان را به گرفتاری خویش مشغول و) از بستگان و فرزندانش غافل می سازد.

از او یاری و هدایت می جوییم و به او ایمان داریم و بر او توکّل می کنیم. از ضمیری با اخلاص و یقین، برای او) به توحید) گواهی می دهم و او را به یکتایی می شناسم. یکتا شناسی فردی مؤمن و استوار (در یقین). و او را یگانه می شمارم، یگانه دانستن بنده ای خاضع. نه در پادشاهی خود شریکی دارد و نه در آفرینشش یاوری. برتر از آن است که مشاور و وزیری داشته باشد و منزّه است از داشتن همانند و نظیری بر کردارها آگاهی یافت و پوشیده داشت و از نهان امور مطّلع گردید و بدان آگاه است و اقتدار و چیرگی دارد. نافرمانی گشت و آمرزید، طاعت و بندگی اش نمودند و او سکرگزاری نمود. فرمان روایی کرد و عدالت گسترد؛ و برتر از شائبه ی هر نقص و عیبی است و (آنچه شایسته ی هر چیزی بود، به او) عطا فرمود. همیشه بوده و هست و هیچ گاه زوال نمی یابد و چیزی همانندش نیست. و او پیش از هر چیزی است و پس از هر چیزی. پروردگاری است که به عزّتش یگانه و به قدرت خویش پادشاه (و مقتدر). و به برتری شأنش پاک (و منزّه) است. و به علوّ مقامش (به حق) خود را بزرگ می شمارد. دیده ای او را نمی بیند و نگرشی (در معرفت) بر او احاطه پیدا نمی کند. قوی و مقتدر و بینا و شنوا و برتر و حکیم و رئوف و مهربان و عزتمند و داناست. هر آن که به توصیف او برآید، در وصفش حیران ماند. (به آفریدگان) نزدیک است و (در رفعت مقام، از آنان) دور است. .

خطبه بدون نقطه حضرت علی (ع) در مدح و ستایش خداوند

تقدیم به:

ژرف اندیشان حق.

بنام خدا

و ملَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **حمید واعظی** ، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر**حسین امامعلی‌پور** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این گردایه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.
همچنین از جناب آقای دکتر**پورمحمود آقابابا** که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.
آقای دکتر حجتی ریاست دانشکده علوم ریاضی، دکتر اصغر رنجبری مدیرگروه ریاضی محض و نیز کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.
در پایان از زحمات و حمایتهای بی دریغ پدرم، مادرم و برادر و خواهرانم کمال تشکر و قدردانی را دارم و بر دستان پرمهرشان بوسه می‌زنم.

سمیه صبوری اصل
۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: صبوری اصل   نام: سمیه
عنوان: عملگرهای ترکیبی وزن‌دار کران‌دار مرتب بتوی فضای برگمن
استاد راهنما : حمید واعظی استاد مشاور : حسین امامعلی‌پور
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی محض   گرایش: آنالیز ریاضی   دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی   تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۲   تعداد صفحات: ۵۵
کلید واژه‌ها: عملگرهای ترکیبی وزن‌دار، عملگرهای کران‌دار مرتب، فضای برگمن، فضای بلاخ

چکیده

کران‌داری، فشردگی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار روی فضای برگمن با استفاده از تبدیل‌های برزین عمومی سرشت‌نمایی شده‌اند. اغلب نتایج بدست‌آمده برای فضاهای هاردی و فضای برگمن برقرار هستند. در این پایاننامه کران‌داری مرتب عملگر ترکیبی وزن‌دار روی فضای برگمن L_a^2 را بررسی می‌کنیم و آن را به فضای هاردی و فضای برگمن وزن‌دار تعمیم می‌دهیم.

فهرست مطالب

مقدمه

عملگرهای ترکیبی در دهه شصت به‌طور کلاسیک توسط نوردگرین [1] و ریدج [2] معرفی گردید بعداً ریاضیدانان زیادی توجه خود را به این حیطه از نظریه عملگرها معطوف ساختند. شاید یکی از عوامل مهمی که این نوع از عملگرها مهم جلوه می‌کند در برداشتن رده وسیعی از عملگرهای کران‌دار روی فضای باناخ می‌باشد. معمولاً این نوع عملگرها از دو دیدگاه مورد توجه بوده است اول فضایی که این نوع عملگرها روی آن تعریف می‌شوند مانند $C(X)$، H^p، فضای برگمن L^p_a و غیره، دوم خواص این عملگرها مانند کران‌داری، فشردگی، برد بسته داشتن، عضویت در کلاس شاتن و ... و مقالات زیادی با این دو دیدگاه به چاپ رسیده است. از بین خواص این عملگرها، کران‌داری و خصوصاً فشردگی و برد بسته داشتن از توجه ویژه‌ای برخوردار بوده است. ریاضیدانان کران‌داری و فشردگی این عملگرها را روی فضاهای مختلف مورد مطالعه قرار داده‌اند.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌ای با عنوان:

Order Bounded Weighted Composition Operators Mapping into the Bergman Space

که در مجله: Complex Analysis and Operator Theory

در سال ۲۰۱۱ به چاپ رسیده، تهیه شده است که کران‌داری مرتب عملگر ترکیبی وزن‌دار uC_φ از فضای برگمن وزن‌دار $L^p_a(dA_\alpha)$، فضای از نوع وزن‌دار H^∞_α یا فضای از نوع بلاخ $\mathcal{B}_\alpha$ بتوی $L^q_\alpha(dA_\beta)$ را موردبررسی قرار می‌دهد. این پایان‌نامه شامل چهار فصل است:

فصل اول به بررسی مفاهیم و تعاریف مقدماتی آنالیز اختصاص یافته است. در فصل دوم کران‌داری

[1] Nordgren

[2] Ridge

عملگرهای ترکیبی وزن‌دار در فضای برگمن را بررسی می‌کنیم. در فصل سوم به بررسی کران‌داری عملگر $uC_\varphi : L^p_a(dA_\alpha) \longrightarrow L^q_a(dA_\beta)$ می‌پردازیم و در فصل چهارم کران‌داری مرتب عملگر $uC^\varphi : H^\infty_\alpha or \mathcal{B}_\alpha \longrightarrow L^q_a(dA_\beta)$ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل ۱

مفاهیم وتعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل به بررسی مفاهیم و تعاریف اولیه آنالیز پرداخته شده است.

تعریف ۱.۱.۱. گردایه τ از زیرمجموعه‌های مجموعه X را یک توپولوژی درX گوییم، هرگاه τ دارای سه خاصیت زیر باشد

۱) $\phi \in \tau$ و $X \in \tau$

۲)اگر برای هر i، $1 \leq i \leq n$، $v_i \in \tau$ و $V = \bigcap_{i=1}^{n} v_i$ آنگاه $V \in \tau$

۳)اگر $\{v_\alpha\} \subset \tau$، آنگاه $\bigcup v_\alpha \in \tau$.

هرگاه τ یک توپولوژی روی X باشد X را یک فضای توپولوژیک و اعضای τ را مجموعه‌های باز در X می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد.

۱) X را یک فضای هاسدورف گوییم، اگر برای هر $p, q \in X$، همسایگی‌های U از p و V از q موجود باشد به‌طوری‌که $U \cap V = \varnothing$.

۲) X به‌طور موضعی فشرده است، اگر هر نقطه‌اش، همسایگی با بست فشرده داشته باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فضای X را جدائی پذیر گوئیم، هرگاه دارای زیرمجموعه چگال شمارش‌پذیر باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید f یک تابع حقیقی(یا حقیقی وسعت‌یافته) بر یک فضای توپولوژیک باشد. اگر به‌ازای هر α حقیقی مجموعه $\{x : f(x) > \alpha\}$ باز باشد f را نیم‌پیوسته پائینی و اگر به‌ازای هر α حقیقی مجموعه $\{x : f(x) < \alpha\}$ بازباشد f را نیم‌پیوسته بالائی گوئیم.

تعریف ۵.۱.۱ (σ-جبر). الف)گردایه Σ از زیر مجموعه‌های مجموعه X را یک σ -جبر روی X نامیم هرگاه

۱) $X \in \Sigma$,

۲)اگر $A \in \Sigma$ آنگاه $A^c \in \Sigma$,

۳) اگر $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ و برای هر i، $A_i \in \Sigma$, آنگاه $A \in \Sigma$.

در اینصورت (X, Σ) یا به‌طور خلاصه، X را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای Σ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر نامند.

ب) تابع f تعریف شده روی فضای اندازه‌پذیر X به‌توی فضای توپولوژیکی Y را یک تابع اندازه پذیر گوئیم هرگاه برای هر مجموعه باز v در Y، $f^{-1}(v)$ در X اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم تابع $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ به‌گونه‌ای باشد که برای $\{A_i\} \subset \Sigma$ شمارش‌پذیر واز هم جدا داشته باشیم:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(Ai)$$

و به ازای دست کم یک $A \in \Sigma$، $\mu(A) < \infty$ باشد. در این‌صورت μ را یک اندازه مثبت و فضای اندازه‌پذیر X را که μ روی σ -جبر آن تعریف شده، فضای اندازه می‌نامیم.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک و β کوچکترین σ -جبر شامل τ در X باشد. در اینصورت اعضای β را مجموعه‌های بورل می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱. اندازه μ تعریف شده بر σ -جبر β در فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشرده X یک اندازه بورل نام دارد.

تعریف ۹.۱.۱. فضای اندازه (X, Σ, μ) را σ -متناهی نامیم هرگاه وجود داشته $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ به‌طوری‌که، $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ و $\mu(E_i) < \infty$.

قضیه ۱۰.۱.۱. *هرگاه* $f_n : X \longrightarrow [0, \infty]$ *به ازای* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *اندازه‌پذیر و*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,, \qquad (x \in X)$$

آن‌گاه

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

برهان. ر.ک. [۱۶]. □

قضیه ۱۱.۱.۱. *فرض کنید $f : X \longrightarrow [\circ, \infty]$ اندازه‌پذیر باشد و*

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu\,, \qquad (E \in \Sigma).$$

باشد. در این صورت φ یک اندازه روی $\sum$ است و برای هر $g : X \longrightarrow [\circ, \infty]$ اندازه‌پذیر داریم:

$$\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu.$$

برهان. ر.ک. [۲۱]. □

قضیه ۱۲.۱.۱. *اگر T یک تبدیل اندازه‌پذیر از فضای اندازه‌ی $(X, \sum_X, \mu)$ به‌توی فضای اندازه‌پذیر $(Y, \sum_Y)$ باشد، یعنی $T^{-1}(\sum_Y) \subseteq \sum_X$ و $g : Y \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ آن‌گاه*

$$\int_Y g d(\mu o T^{-1}) = \int_X g T d\mu.$$

مشروط به اینکه انتگرال طرفین موجود باشند.

برهان. ر.ک. [۱۷]. □

تبصره ۱۳.۱.۱. *فرض کنید $F \subset Y$ اندازه‌پذیر باشد. در این صورت،*

$$\int_F g(y) d\mu o T^{-1}(y) = \int_{T^{-1}(F)} g(T(x)) d\mu(x).$$

برهان. کافی است در قضیه بالا از تابع χ_F استفاده کنیم وقتی

$$\chi_F(y) = \begin{cases} 1 & y \in F \\ \circ & y \notin F. \end{cases}$$

□

گزاره ۱۴.۱.۱. *فرض کنید $(X, \sum, \mu)$ یک فضای اندازه باشد و $1 < p, q < \infty$ به طوری‌که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. آن‌گاه برای هر $f, g : X \longrightarrow [\circ, \infty]$ اندازه‌پذیر داریم:*

$$\int_X f g d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

این نامساوی به نامساوی هولدر معروف است. نامساوی بالا به ازای $q = \infty$ ، $p = 1$ نیز برقرار است.

برهان. ر.ک. [۱۹]. □

قضیه ۱.۱.۱۵. (قضیه فوبینی): *فرض کنید $(X,\sum_X,\mu)$ و $(Y,\sum_Y,\lambda)$ دو فضای اندازه σ - متناهی و f یک تابع $(\sum_X\times\sum_Y)$ -اندازه‌پذیر بر $X\times Y$ باشد.*

۱) هرگاه $0\leq f\leq\infty$، $f_x(y)=f(x,y)$ و $f^y=f(x,y)$, آنگاه

(i) *اگر $\varphi(x)=\int_Y f_x d\lambda$ و $\psi(y)=\int_X f^y d\mu$، آن‌گاه φ, $\sum_X$ -اندازه‌پذیر و ψ, $\sum_Y$ - اندازه‌پذیرند و*

(ii) $\int_X \varphi d\mu=\int_{X\times Y} fd(\mu\times\lambda)=\int_Y \psi d\mu$.

۲) هرگاه f مختلط باشد و

$$\int_X\int_Y |f|_x d\lambda d\mu<\infty$$

آن‌گاه

$$f\in L^1(\mu\times\lambda).$$

۳) هرگاه $f\in L^1(\mu\times\lambda)$ آن‌گاه تقریباً به‌ازای هر $x\in X$، $f_x\in L^1(\lambda)$ و به ازای تقریباً هر $y\in Y$، $f^y\in L^1(\mu)$ می‌باشند. توابع φ و ψ که تقریباً همه جا با (i) تعریف شده‌اند به ترتیب در $L^1(\mu)$ و $L^1(\lambda)$ قرار دارند و رابطه‌ی (ii) برقرار می‌باشد.

برهان. ر.ک. [۲۱]. □

قضیه ۱.۱.۱۶. (قضیه همگرایی یکنوای لبگ): *فرض کنیم f_n دنباله ای از توابع اندازه‌پذیر بر X باشد و*

(آ) $\forall x\in X, 0\leq f_1(x)\leq f_2(x)\leq\ldots\leq f_n(x)\leq\infty$,

(ب) $\forall x\in X, \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)=f(x)$.

در این صورت f اندازه‌پذیر است و

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_X f_n d\mu=\int_X fd\mu.$$

برهان. ر.ک. [۲۱] □

لم ۱.۱.۱۷. *(لم فاتو) : فرض کنیم به ازای هر* $n \in \mathbb{N}$، $f_n : X \longrightarrow [0, \infty]$ *اندازه پذیر باشد آن‌گاه*

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

برهان. ر.ک. [۲۱] □

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض کنید تابع u روی مجموعه‌ی باز Ω در صفحه تعریف شده باشد. تابع u را زیر توافقی گوییم هرگاه

۱) برای هر $z \in \Omega$، $-\infty \leq u(z) < \infty$,

۲) u در Ω نیم‌پیوسته بالایی باشد،

۳) اگر $\bar{D}(a : r) \subset \Omega$، آن‌گاه

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta,$$

۴) انتگرال ذکر شده در۳)) مساوی $-\infty$ نباشد.

نتیجه ۱.۱.۱۹. *فرض کنید* u *یک تابع زیرتوافقی روی* D *(قرص باز یکه) و* $\bar{D}(a, s) \subset D$, $0 < s < 1$, *باشد آن‌گاه،*

$$u(a) \leq \frac{1}{s^2} \int_{\bar{D}(a,s)} u(z) dA(z),$$

که در آن $dA(z) = \frac{1}{\pi} r dr d\theta$.

برهان. بنا بر تعریف تابع زیرتوافقی چون $E(a) = \bar{D}(a, s) \subset D$, برای هر $r \leq s$ داریم:

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^s u(a) r dr \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^s \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{i\theta}) r d\theta dr$$

$$\Rightarrow \frac{u(a)s^{۲}}{۲} \leq \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{۰}^{s} u(a+re^{i\theta})rdrd\theta$$

$$\Rightarrow \qquad u(a) \leq \frac{۱}{s^{۲}}\int_{E(a)} u(z)dA(z).$$

□

قضیه ۲۰.۱.۱. *هرگاه Ω یک ناحیه بوده، $f \in H(\Omega)$ (فضای توابع تحلیلی روی Ω) و f متحد صفر نباشد، آن‌گاه $|f|^p$، برای $۰ < p < \infty$، زیرتوافقی است.*

برهان. ر.ک. [۲۱]. □

قضیه ۲۱.۱.۱. *فرض کنید K زیر مجموعه‌ی فشرده‌ای از فضای نرم‌دار X باشد. اگر دنباله‌ی توابع $\{f_n\}$ روی K هم‌پیوسته و همگرای نقطه‌وار به f باشد آن‌گاه $\{f_n\}$ روی K همگرای یکنواخت به f است.*

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که f روی K پیوسته‌ی یکنواخت است. $۰ < \varepsilon$ دلخواه را در نظر می‌گیریم. چون $\{f_n\}$ روی K همپیوسته است پس $۰ < \delta$ وجود دارد به طوری‌که وقتی $\|x-y\| < \delta$ آنگاه برای هر n، $\|f_n(x) - f_n(y)\| < \varepsilon$ و چون $\{f_n\}$ به f همگرای نقطه‌وار است برای N به قدر کافی بزرگ $(N = max\{N_x, N_y\})$، $\|f_N(x) - f(x)\| < \varepsilon$ و $\|f_N(y) - f(y)\| < \varepsilon$. بنابراین برای δ ی معرفی شده، وقتی $\|x-y\| < \delta$ داریم:

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(y) + f_N(y) - f(y)\|$$

$$\leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(y)\| + \|f_N(y) - f(y)\| < ۳\varepsilon.$$

حال نشان می‌دهیم که $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت است. فرض کنیم $۰ < \varepsilon$ دلخواه باشد می‌خواهیم نشان دهیم برای n به قدر کافی بزرگ رابطه‌ی $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ برای هر $x \in K$ برقرار است. $\{f_n\}$ هم‌پیوسته و f پیوسته‌ی یکنواخت است. پس $۰ < \delta$ وجود دارد که وقتی $\|x-y\| < \delta$ آن‌گاه $\|f_n(x) - f_n(y)\| < \varepsilon$ و نیز $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

فرض کنیم برای $y \in K$ ، $N_\delta^{(y)} = \{x \in X; \|x-y\| < \delta\}$. در این صورت N_δ^y یک مجموعه باز در X است و $K \subset \bigcup_{y\in K} N_\delta^{(y)}$، چون K فشرده است، پس $K \subset \bigcup_{i=1}^m N_\delta^{(y_i)}$. حال $x \in K$ دلخواه در نظر می‌گیریم، پس $y_i \in K$ وجود دارد به طوری‌که $x \in N_\delta^{y_i}$. بنابراین،

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \|f_n(x) - f_n(y_i) + f_n(y_i) - f(y_i) + f(y_i) - f(x)\|$$

$$\leq \|f_n(x) - f_n(y_i)\| + \|f_n(y_i) - f(y_i)\| + \|f(y_i) - f(x)\|.$$

چون $\|x - y_i\| < \delta$ و $f_n(y_i) \longrightarrow f(y_i)$, پس برای $n > N_{y_i}$ داریم $\|f_n(x) - f(x)\| < 3\varepsilon$. پس کافی است برای $\delta > 0$، $N = max\{N_{y_1}, ..., N_{y_m}\}$ انتخاب کنیم. در این صورت به ازای هر $n > N$ ، $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ برای هر $x \in K$. این یعنی $\{f_n\}$ روی K همگرای یکنواخت به f است. $\square$

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید X و Y فضاهای نرم‌دار و $T : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی باشد. T را فشرده نامیم هرگاه برای هر زیرمجموعه کران‌دار M از X ,
$T(M)$ فشرده نسبی باشد؛ یعنی $\overline{T(M)}$ فشرده باشد.

قضیه ۲۳.۱.۱. *فرض کنید $T : X \longrightarrow Y$ فشرده باشد، آن‌گاه T کراندار است.*

برهان. چون T فشرده و $U = \{x \in X : \|X\| \leq 1\}$ کراندار است پس $\overline{T(U)}$ فشرده و در نتیجه کراندار است. بنابراین $\sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| < \infty$. در نتیجه T کراندار است. $\square$

قضیه ۲۴.۱.۱. *فرض کنید $\{T_n\}$ دنباله‌ای از عملگرهای فشرده روی فضای نرم‌دار X به توی فضای باناخ Y باشد، به طوری‌که $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$ ، آن‌گاه T نیز فشرده است.*

برهان. ر.ک. [۱۴]. $\square$

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار و X^* و Y^* به ترتیب دوگان‌های توپولوژیکی آن‌ها باشند. برای عملگر خطی و کراندار $T : X \longrightarrow Y$ ، عملگر الحاقی $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$y^*(Tx) = (T^*y^*)x, \qquad x \in X, y^* \in Y^*.$$

قضیه ۲۶.۱.۱. *اگر T عملگر خطی و کراندار باشد، آن‌گاه عملگر الحاقی T^* نیز خطی و کراندار است و $\|T^*\| = \|T\|$.*

برهان. ر.ک. [۱۸]. $\square$

قضیه ۲۷.۱.۱. *فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند در این صورت $T : X \longrightarrow Y$ فشرده است اگر و تنهااگر $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ فشرده باشد.*

برهان. ر.ک. [۱۸]. $\square$

قضیه ۲۸.۱.۱. *فرض کنید در فضای ضرب داخلی X، $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$، آن‌گاه $< x_n, y_n > \longrightarrow < x, y >$.*

برهان.

$$
\begin{aligned}
| < x_n, y_n > - < x, y > | &= | < x_n, y_n > - < x_n, y > + < x_n, y > - < x, y > | \\
&\leq | < x_n, y_n - y > | + | < x_n - x, y > | \\
&\leq \|x_n\|\|y_n - y\| + \|y\|\|x_n - x\|.
\end{aligned}
$$

چون دنباله‌ی $\{x_n\}$ همگراست پس $\|x_n\|$ کراندار است و چون وقتی $n \longrightarrow \infty$، $x_n - x \longrightarrow 0$ و همچنین $y_n - y \longrightarrow 0$ حکم اثبات می‌شود. $\square$

تعریف ۲۹.۱.۱. فضای ضرب داخلی H را هیلبرت نامیم هرگاه نسبت به نرم حاصل از ضرب داخلی کامل باشد.

قضیه ۳۰.۱.۱. *فرض کنیم H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت و $S, T : H_1 \longrightarrow H_2$ عملگرهای خطی کراندار و α اسکالر باشند. آن‌گاه داریم*

(۱) $< T^*y, x > = < y, Tx > \qquad (x \in H_1, y \in H_2)$,

(۲) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$,

(۳) $(T^*)^* = T$,

(۴) $(ST)^* = T^*S^*$ *(در این حالت فرض می‌کنیم* $H_1 = H_2$*)*.

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری و $P : X \longrightarrow H$ یک نگاشت خطی باشد. در این صورت P را تصویر به روی زیرفضای Y از H می‌نامیم، هرگاه $P(X) = Y$ باشد و $P(y) = y$ برای هر $y \in Y$.

گزاره ۳۲.۱.۱. *فرض کنید P تصویر خطی کراندار از فضای هیلبرت H به روی $P(H)$ باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند.*

۱) P *تصویر متعامد است* $(Ker(P) \perp P(H))$,

۲) P *خودالحاق است* $(P^* = P)$,

۳) $\|P\| = 1$.

برهان. ر.ک. [۹]. □

تعریف ۳۳.۱.۱. عملگر $T \in B(X,Y)$ را یکریختی گوییم هرگاه T یک به یک و پوشا باشد و $T^{-1} \in B(Y,X)$.

تعریف ۳۴.۱.۱. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in B(X,Y)$. در این‌صورت T را وارون‌پذیر نامیم هرگاه T یکریختی باشد.

تعریف ۳۵.۱.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ روی میدان حقیقی یا مختلط F باشد و $T \in B(X)$. طیف T، $\sigma(T)$، را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in F; \lambda I - T \text{ وارون‌پذیر نباشد}\}$$

، و نیز مجموعه حلال به شکل $\rho(T) = F \setminus \sigma(T)$ تعریف می‌شود.

تعریف ۳۶.۱.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و $T \in B(X)$ باشد. اسکالر λ را یک مقدار ویژه T گوییم هرگاه $Ker(\lambda I - T) \neq 0$ باشد. و $0 \neq x \in Ker(\lambda I - T)$ را بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ می‌نامیم.

قضیه ۳۷.۱.۱. *فرض کنید X یک فضای باناخ مختلط باشد، $T \in B(X)$ و $P(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$. در این صورت $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$.*

برهان. ر.ک. [۱۰]. □

گزاره ۳۸.۱.۱. *فرض کنید T یک عملگر فشرده روی فضای باناخ X باشد و $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. در این صورت λ یک مقدار ویژه T است.*

برهان. ر.ک. [۹].

□

نتیجه ۳۹.۱.۱. *فرض کنید عملگر فشرده T روی فضای باناخ مختلط X تعریف شده باشد. در این صورت λ ($\lambda \neq 0$) یک مقدار ویژه T است اگر و تنها اگر λ^n یک مقدار ویژه T^n باشد.*

برهان. حکم به راحتی از تلفیق قضیه(۳۷.۱.۱) و گزاره(۳۸.۱.۱) بدست می‌آید. □

قضیه ۴۰.۱.۱. *فرض کنید T عملگر فشرده خودالحاق روی فضای هیلبرت جدایی‌پذیر H باشد آن‌گاه H دارای یک پایه متعامد یکه، متشکل از بردارهای ویژه T است.*

برهان. ر.ک. [۱]. □

تعریف ۴۱.۱.۱. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای نرم‌دار X باشد. گوییم $\{x_n\}$ به طور ضعیف به $x \in X$ میل می‌کند هرگاه برای هر $f^* \in X^*$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} f^*(x_n) = f^*(x)$.

قضیه ۴۲.۱.۱. *فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T \in B(X,Y)$ فشرده باشد. در این صورت هرگاه دنباله‌ی $\{x_n\}$ به طور ضعیف در X به x میل کند داریم $\|Tx_n - Tx\| \longrightarrow 0$.*

برهان. ر.ک. [۱۳]. □

قضیه ۴۳.۱.۱. *(اصل کرانداری یکنواخت): فرض کنید X و Y فضاهای باناخ و $\{T_\alpha\} \subset B(X,Y)$ باشد به طوری که برای هر $x \in X$، $\sup_\alpha \|T_\alpha x\| < \infty$. آن‌گاه $\sup_\alpha \|T_\alpha\| < \infty$.*

برهان. ر.ک. [۲۲]. □